

Cvičení 4.

Počítání s maticemi a vektory

Polmy: matice, operace s maticemi (součet, násobek, součin, transpozice, determinant, hodnota), regulární, singulární matice, výpočet inverzní matice, vektory, skalární, vektorový a smíšený součin vektorů, lineární závislost a nezávislost, báze a dimenze.

1. Jsou zadány matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 & a \\ 0 & 2a & 3 & 0 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, které dvojice z těchto matic lze spolu násobit a v jakém pořadí a násobení proveďte.

2. Vypočítejte determinant následujících matic a zjistěte, zda jsou regulární (u číselných matic) resp. za jakých podmínek jsou regulární (u matic s parametry) a v kladném případě stanovte matice inverzní.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3a. Určete, zda dané vektory $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$, $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]$ jsou lineárně závislé či nezávislé

i) $\mathbf{u} = [1, 2, -2]$, $\mathbf{v} = [-2, -3, 1]$, $\mathbf{w} = [-1, 2, 2]$

ii) $\mathbf{u} = [1, 3, -2]$, $\mathbf{v} = [1, 1, 2]$, $\mathbf{w} = [-1, 2, -8]$

3b. Určete hodnotu parametru a , pro kterou jsou dané vektory lineárně závislé či nezávislé

i) $\mathbf{u} = [1, 1, 1]$, $\mathbf{v} = [1, a, 1]$, $\mathbf{w} = [2, 2, a]$

ii) $\mathbf{u} = [0, 2, a]$, $\mathbf{v} = [-1, 3, 2]$, $\mathbf{w} = [2, -4, a]$

4a. Určete, zda dané vektory jsou ortogonální či ortonormální $\mathbf{u} = [1, -2, 2, 1]$, $\mathbf{v} = [1, 3, 2, 1]$, $\mathbf{w} = [-1, 0, 1, -1]$

4b. Určete parametry a, b tak, aby dané vektory byly ortogonální

i) $\mathbf{u} = [1, 1, 2, 0, 0]$, $\mathbf{v} = [1, -1, 0, 1, a]$, $\mathbf{w} = [1, b, 2, 3, -2]$

ii) $\mathbf{u} = [2, -1, 0, a, b]$, $\mathbf{v} = [a, b, 0, -2, 1]$, $\mathbf{w} = [a, 2b, 5, b, -a]$

4c. Určete vektor $\mathbf{x} = [x, y, z, t]$, který je ortogonální k dané trojici vektorů $\mathbf{u} = [1, 1, 1, 1]$, $\mathbf{v} = [1, -1, -1, 1]$, $\mathbf{w} = [2, 1, 1, 3]$

5. Zapište vzorec pro výpočet skalárního, vektorového a smíšeného součinu vektorů v ortonormální bázi \mathbf{R}^3 . Zapište vzorec pro odchylku dvou vektorů (pomocí skalárního součinu), plochu rovnoběžníka (pomocí vektorového součinu), objem rovnoběžnostěny (pomocí smíšeného součinu).