

Cvičení 10.

Komplexní čísla

Pojmy: Komplexní čísla (imaginární jednotka a její vlastnosti, algebraický, goniometrický a exponenciální tvar komplexního čísla, operace sčítání, násobení, komplexního sdružení, vlastnosti operací velikost a argument komplexního čísla, reálná a imaginární část komplexního čísla, zobrazení komplexního čísla v Gaussově rovině. Výrazy a rovnice s komplexními čísly, Moivreova věta, rozklad polynomu v oboru komplexních čísel.

1. Vyádřete v algebraickém tvaru čísla:

a) $\left(\frac{1+2i}{1-2i}\right)^2 - \left(\frac{1-2i}{1+2i}\right)^2$,

b) $\frac{1}{i} + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$,

c) $(1+i)^4$,

d) $(2-2i)^5 ((2-2i)^*)^3$,

e) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$.

2. Vypočtete absolutní hodnoty čísel z předchozího příkladu.

3. Řešte rovnice v oboru komplexních čísel:

a) $z^2 - 3z + 3 - i = 0$,

b) $z^6 - 0 = 0$,

c) $|z| - z = 1 + 2i$,

d) $|z| = z^3$,

e) $(1-i)z^2 - 2(4+i)z + 3 + 11i = 0$,

f) $z^3 + 1 = 0$,

g) $z^3 - 1 = 0$.

4. Zapište v goniometrickém tvaru komplexní čísla:

a) $1 + i$,

b) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right),$

c) $-i^5,$

d) $-\frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3}).$

5. V Gaussově rovině znázorněte množinu, pro kterou jsou splněny následující rovnosti nebo nerovnosti:

a) $|z - 1| \leq 1,$

b) $|z - 1| = |z + 1| + 3,$

c) $|z + 2 - i| > 2,$

d) $1 \leq |3iz - 1| < 3.$