

# Cvičení 11.

## Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika

Pojmy: Kombinatorika (kombinace, variace s opakováním a bez opakování, permutace, faktoriál, vzorce a úlohy z kombinatoriky). Pravděpodobnost (definice a vlastnosti klasické pravděpodobnosti, výpočty). Statistika (veličiny s diskrétním a spojitým rozdělením, střední hodnota, střední kvadratická odchylka, distribuční funkce, medián a percentil.)

1. Střelec provedl  $N = 150$  výstřelů na terč, který je tvořen soustavou  $n = 5$  mezikruží  $MK_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Mezikruží  $MK_i$  přitom zasáhl  $N_i$  krát, kde  $N_1 = 15$ ,  $N_2 = 20$ ,  $N_3 = 35$ ,  $N_4 = 45$ ,  $N_5 = 35$ . Za zásah mezikruží  $MK_i$  získal  $i$ -bodů. Náhodnou veličinu  $X$  s diskrétním rozdělením definujeme jako počet bodů získaných pro jeden náhodný výstřel.

- Určete rozdělení veličiny  $X$ ,  $\{(x_i, p_i)\}$ , kde  $p(i)$  je pravděpodobnost  $i$ , kdy  $x_i = i$ .
- Pravděpodobnost, že pro náhodný výstřel získá střelec alespoň  $I$  bodů,  $I = 1, 2, 3, 4, 5$ .
- Střední hodnotu veličiny  $X$
- Střední kvadratickou odchylku veličiny  $X$ .
- Pravděpodobnost, že při výstřelu získá střelec počet bodů v intervalu  $i \in [2, 4]$ .

2. Jaká je pravděpodobnost, že při současném hodu šesti kostkami padne

- a) na každé kostce jiné číslo,
- b) samé jedničky,
- c) alespoň tři dvojky,
- d) právě tři dvojky,
- e) všechna čísla stejná,
- f) všechna čísla lichá,
- g) součet  $n$ ,  $n = 6, \dots, 36$ .

3. Čtyři osoby si v šatně odložily kabát. Šatnářka při odchodu rozdala kabáty náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že

- a) všechny osoby budou mít svůj kabát,
- b) žádná z osob nebude mít svůj kabát,
- c) alespoň jedna osoba bude mít svůj kabát,
- d) právě jedna osoba bude mít svůj kabát.

4. Dokažte následující kombinatorické identity:

a)

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

b)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

c)

$$\sum_{i=0}^r \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r},$$

d)

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad n > 0; k \geq 0.$$

5. Klíčivost semen je  $\vartheta$  (pravděpodobnost, že semínko vyklíčí), zasadíme-li  $n$  semen, jaká je pravděpodobnost, že

- a) vyklíčí alespoň jedno semeno?
- b) vyklíčí alespoň  $k$  semen?
- c) vyklíčí právě  $k$  semen?