Průběh vlnění

Lenka Přibylová

17. listopadu 2010

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \dots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x, protože $y \neq 0$ na celém definičním oboru. Funkce je kladná, nemá žádné body nespojitosti.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-2t)^2+1} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-2t)^2+1} = 0$$

(Pro všechna t je limita typu $\dfrac{1}{\infty} = 0$.) Asymptota se směrnicí je pro $x \to \pm\infty$ stejná: osa x: $y = 0$.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

$$\underline{\quad + \quad}$$

$$\psi' = \left(\frac{1}{(x-2t)^2+1}\right)' = \frac{-2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2} = 0$$
$$x = 2t \quad (t = 1, 2, \dots)$$

$\psi' = \dfrac{-2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2}$;

$\nearrow$	MAX	$\searrow$
	$2t$	

Dosazením nějakého bodu z intervalu $(-\infty, 2t)$ a $(2t, \infty)$ nalezneme znaménko derivace:

$\psi'(2t-1) = \dfrac{-2\cdot(-1)}{((-1)^2+1)^2} > 0$, $\psi'(2t+1) = \dfrac{-2\cdot 1}{(1^2+1)^2} < 0$

Spočteme druhou derivaci, derivujeme jako podíl: $\psi'' = \dfrac{-2((x-2t)^2+1)^2 + 2(x-2t)\cdot 2((x-2t)^2+1)\cdot 2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^4}$ a upravíme.

$$\psi'' = \frac{8(x-2t)^2 - 2((x-2t)^2+1)}{((x-2t)^2+1)^3} = 0$$
$$8(x-2t)^2 - 2((x-2t)^2+1) = 0$$
$$x = 2t \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

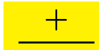
$$\begin{aligned} 8(x-2t)^2 - 2((x-2t)^2+1) &= 0 \\ 6(x-2t)^2 - 2 &= 0 \\ (x-2t)^2 &= \frac{1}{3} \\ x - 2t &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \\ x &= 2t \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

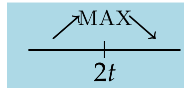
$\psi'' = \dfrac{8(x-2t)^2 - 2((x-2t)^2+1)}{((x-2t)^2+1)^3}$;

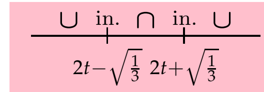
$\cup$	in.	$\cap$	in.	$\cup$
	$2t-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$2t+\sqrt{\frac{1}{3}}$	

Konvexitu zjistíme dosazením do ψ'':

$\psi''(2t-1) = \dfrac{1}{2} > 0$, $\quad \psi''(2t) = -2 < 0$, $\quad \psi''(2t+1) = \dfrac{1}{2} > 0$. Body $x = 2t \pm \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ jsou inflexní.







$f(+\infty) = 0$ $f(-\infty) = 0$ $f(2t) = 1$