Ústav fyzikálního inženýrství
Fakulta strojního inženýrství
VUT v Brně

GEOMETRICKÁ OPTIKA

Přednáška 4

Obsah

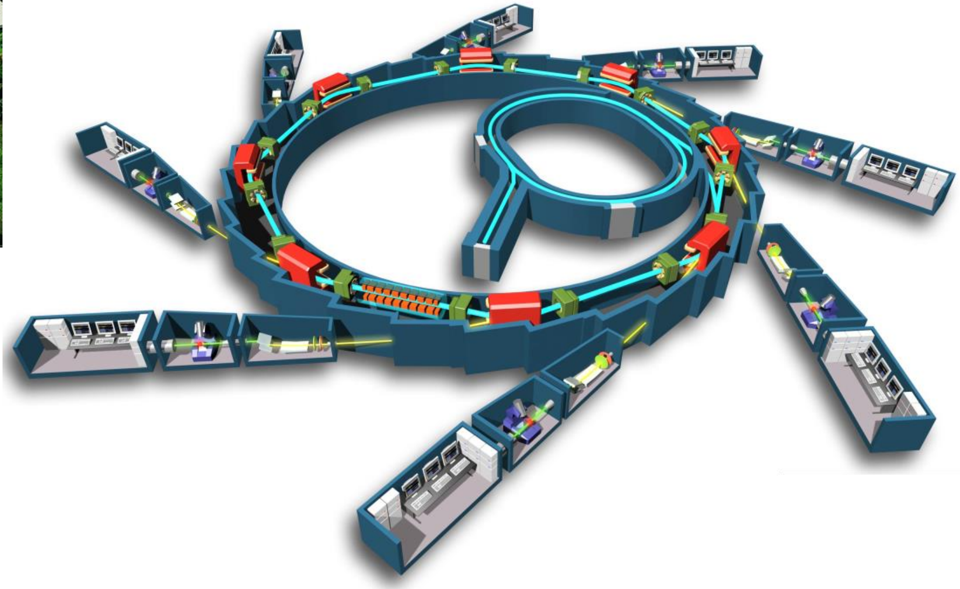
- Základy geometrické (paprskové) optiky

Reálné optické prvky
- hranol pro lom,
- minimální deviace,
- optický klín,
- planparalelní destička.

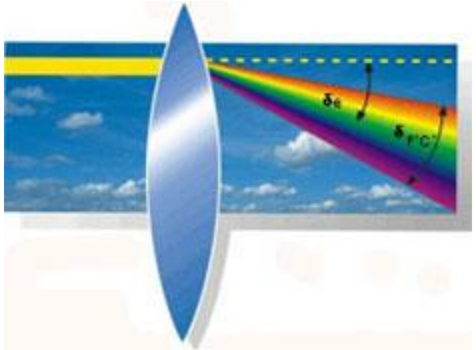
Úvod

Ad impossibilia nemo tenetur

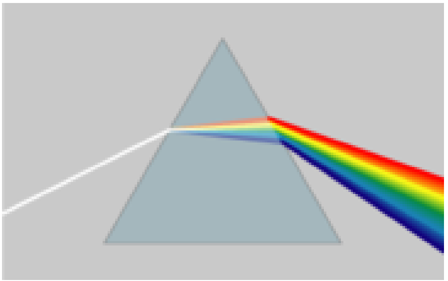
Nikdo nemůže být nucen k nemožnostem.



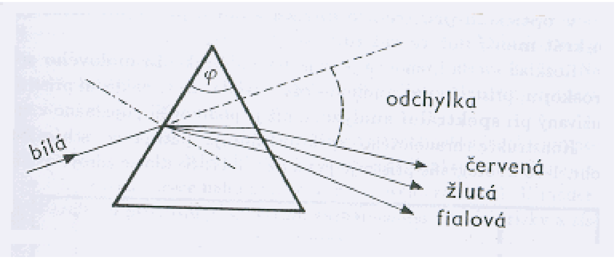
Disperze - opakování



Jestliže optickými prvky jako jsou čočka nebo hranol prochází bílé světlo, rozkládá se do různých barevných odstínů, protože každá barva se lomí jinak. Tento fenomén je znám jako disperze.



- Disperze vzniká důsledkem závislosti rychlosti světla v látkách na frekvenci světla (rychlost světla se zpravidla s rostoucí frekvencí zmenšuje → ve vakuu k disperzi světla nedochází),
- index lomu optického prostředí závisí na frekvenci světla a při (normální) disperzi se s rostoucí frekvencí zvětšuje,
- disperze dokazuje, že bílé světlo je světlo složené z jednoduchých (barevných) světel.



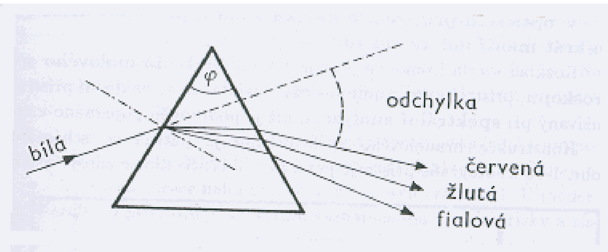
φ … lámavý úhel

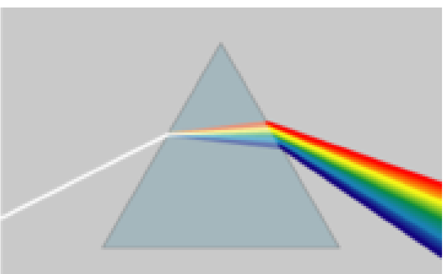
na lámavých plochách optického hranolu se světlo láme dvakrát → hranolové spektrum (řada na sebe navazujících barevných proužků)

Bílé světlo se hranolem rozloží na spektrum, v němž jsou zastoupeny všechny barvy odpovídající paprskům monofrekvenčního světla v posloupnosti : červená (nejmenší hodnota indexu lomu), oranžová, žlutá, zelená, modrá, fialová (největší hodnota indexu lomu).

Zdroj: http://www.zeiss.com a http://fyzika.gbn.cz/

Disperze – index lomu





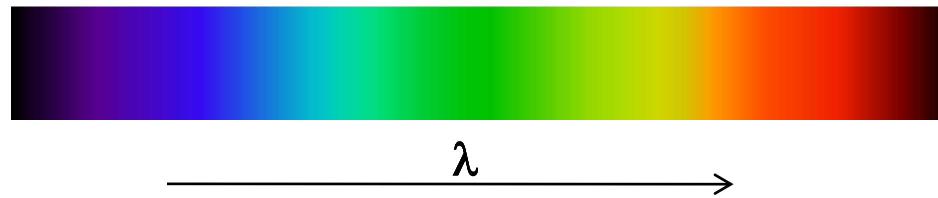
$f = c / \lambda = c_0 / \lambda_0$

λ… vlnová délka světla v daném prostředí, λ_0 … vlnová délka světla ve vakuu,

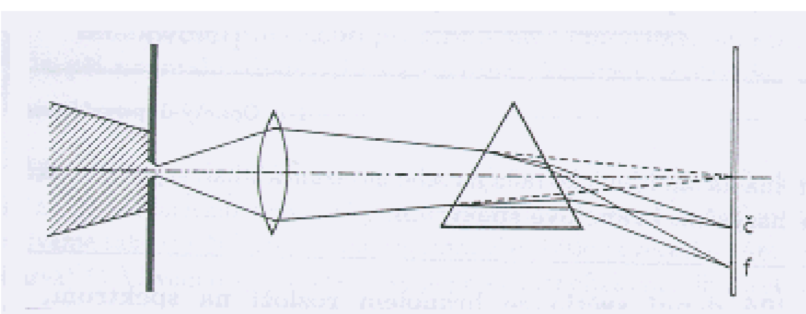
c_0 … rychlost světla ve vakuu

$n = c_0 / c$

$\boldsymbol{\lambda = \lambda_0 / n}$



V optickém prostředí o indexu lomu n je vlnová délka světla n-krát menší než ve vakuu (frekvence se nemění).



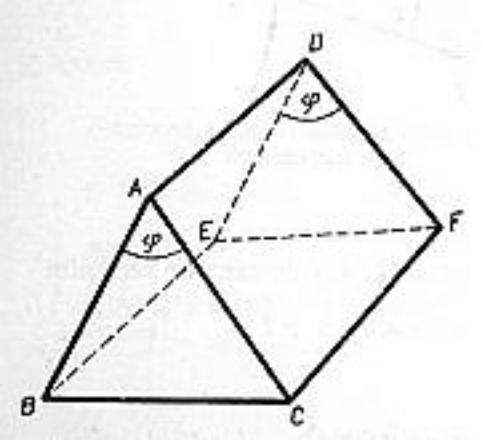
kolimátor (štěrbina umístěná v ohnisku spojné čočky), optický hranol, stínítko

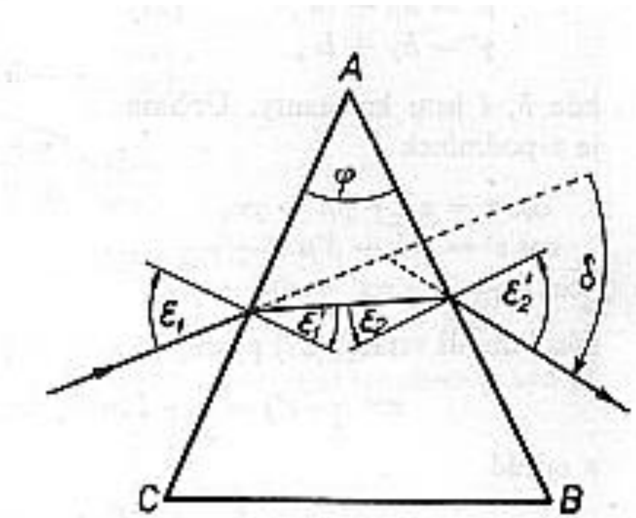
Hranolový spektroskop

- přístroj na studium složení světla,
- základní přístroj používaný ve spektrální analýze

Pozn.: **spektroskop** (spektrum pozorujeme okem pomocí dalekohledu)
spektrograf (spektrum je zaznamenáno na fotografické desce nebo pomocí záznamového zařízení)

Lom světla hranolem





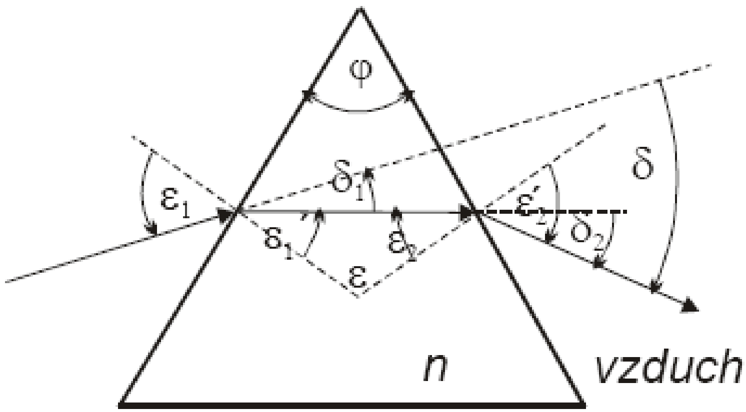
- Hranol – lámavé prostředí omezené dvěma rovinami (jeho stranami), které svírají úhel zvaný **lámavý úhel hranolu** (φ).
- Přímka, v níž se strany hranolu protínají, je **lámavá hrana**, každá rovina na ní kolmá je **hlavní řez hranolu**.
- **Základna hranolu** - rovina (kolmá k ose souměrnosti lámavého úhlu a k hlavnímu řezu), kterou je hranol ukončen.
- Na hranol s lámavým úhlem φ a s indexem lomu *n* dopadá *monochromatické* světlo pod úhlem ε_1. Paprsek vystupující z hranolu určíme z rovnic:

$$\sin \varepsilon_1' = \frac{\sin \varepsilon_1}{n},$$

$$\varepsilon_2 = \varphi - \varepsilon_1',$$

$$\sin \varepsilon_2' = n \sin \varepsilon_2.$$

Lom světla hranolem – úhel deviace



Z podmínky, že součet úhlů ve čtyřúhelníku φ + ε + 90° + 90° = 360° a že v trojúhelníku je $\varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon = 180°$ vyplývá, že $\varphi = \varepsilon_1' + \varepsilon_2$.

Jinak zapsáno: $\varepsilon_2 = \varphi - \varepsilon_1'$.

- Pro celkovou odchylku (deviaci) δ lomeného paprsku od dopadajícího platí: $\delta = \delta_1 + \delta_2$.
- Další úhly lomu na rovinách hranolu: $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \delta_1$ a $\varepsilon_2' - \delta_2 = \varepsilon_2$ nebo

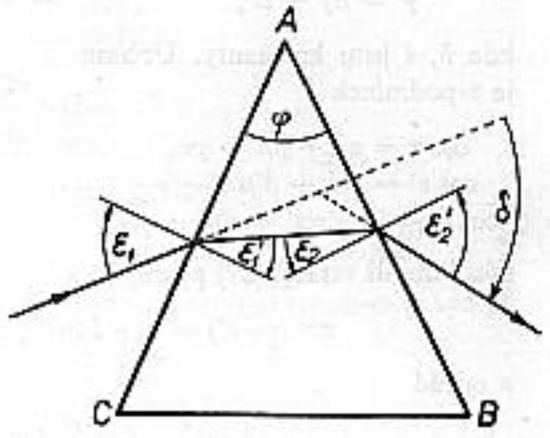
$$\delta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_1' \text{ a } \delta_2 = \varepsilon_2' - \varepsilon_2.$$

Z toho vyplývá: $\delta = (\varepsilon_1 - \varepsilon_1') + (\varepsilon_2' - \varepsilon_2)$.

- Dosazením φ dostaneme: $\delta = (\varepsilon_1 - \varepsilon_1') + (\varepsilon_2' - \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2' - \varphi$,

$$\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2' - \varphi.$$

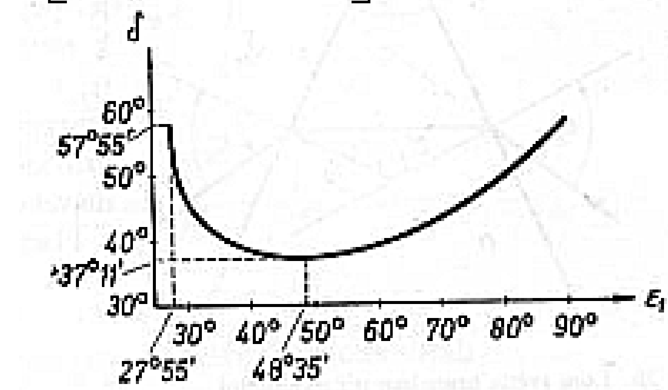
Lom světla hranolem – úhel minimální deviace



- Pro odchylku (deviaci) δ lomeného paprsku od dopadajícího platí:

$$\delta = (\varepsilon_1 - \varepsilon_1') + (\varepsilon_2 - \varepsilon_2') = \varepsilon_1 + \varepsilon_2' - \varphi, \text{ nebo*}$$

$$\delta = \arcsin(n \sin \varepsilon_1') + \arcsin\left[n \sin\left(\varphi - \varepsilon_1'\right)\right] - \varphi.$$



- Závislost odchylky δ na úhlu dopadu ε_1 pro n=1,5 a φ = 60°:
- Podmínka pro extrém: $\dfrac{d\delta}{d\varepsilon_1'} = 0,$ vede k rovnici

$$\delta = \frac{n \cos \varepsilon_1'}{\sqrt{1 - (n \sin \varepsilon_1')^2}} - \frac{n \cos(\varphi - \varepsilon_1')}{\sqrt{1 - \left[n \sin\left(\varphi - \varepsilon_1'\right)\right]^2}} = 0 \text{ nebo po úpravě}$$

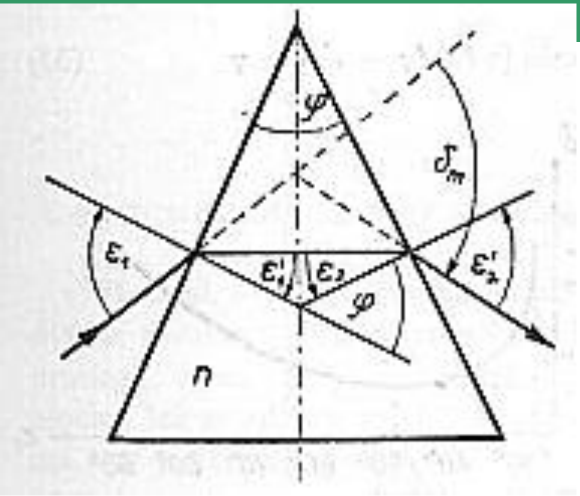
$$\left(1 - n^2\right) \sin\left(\varphi - 2\varepsilon_1'\right) = 0.$$

poněvadž $n \neq 1$, $\sin(\varphi - 2\varepsilon_1') = 0, \rightarrow \varepsilon_1' = \varphi / 2,$

a pro lom světla hranolem při minimální deviaci plyne: $\varepsilon_2 = -\dfrac{\varphi}{2}, \ \varepsilon_2' = -\varepsilon_1.$

*využitím: $\sin \varepsilon_1 = n \sin \varepsilon_1', \ \varepsilon_1' - \varepsilon_2 = \varphi, \ n \sin \varepsilon_2 = \sin \varepsilon_2'$

Lom světla hranolem – úhel minimální deviace



Z výsledku je zřejmé, že minimální odchylka δ_{min} nastane po takový úhel dopadu, při kterém *je paprsek uvnitř hranolu kolmý k rovině souměrnosti lámavého úhlu* $\left(\varepsilon_1' = |\varepsilon_2|\right)$, nebo *paprsek dopadající a vstupující jsou souměrně položeny vzhledem k rovině souměrnosti lámavého úhlu* $\left(\varepsilon_1' = |\varepsilon_2|\right)$.

Platí tedy: $n \sin \varphi/2 = \sin \varepsilon_1$, a pro ε_1 v případě $\varepsilon_2' = -\varepsilon_1$, a $\delta = \delta_m$ dostáváme: $\varepsilon_1 = \dfrac{\varphi + \delta_m}{2}$,

a pro index lomu vychází:

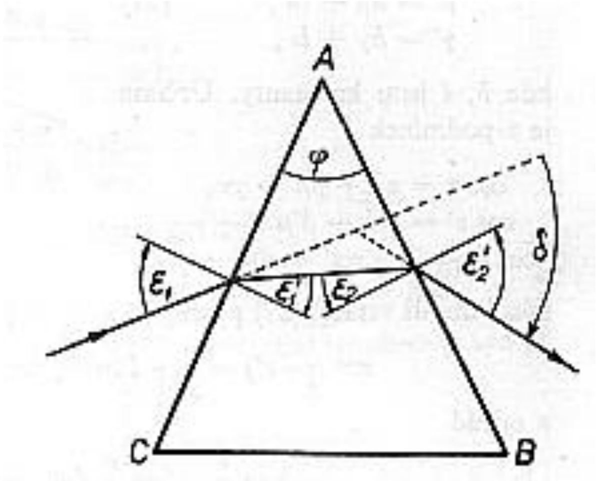
$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \delta_m)}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Na tomto vzorci spočívá Fraunhoferova metoda k určování indexu lomu látek*.

* Viz např.: Fuka/Havelka: Optika str. 778

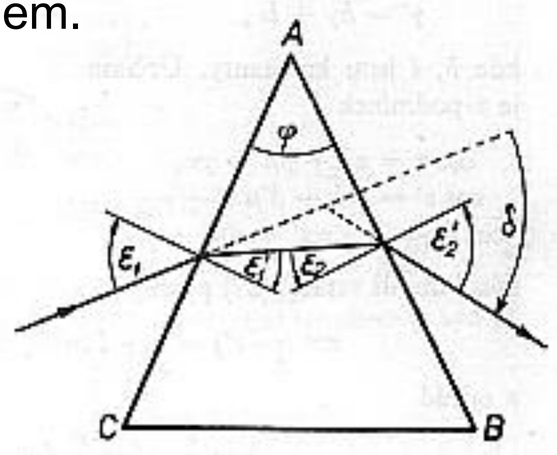
Lom světla hranolem

- Aby paprsek z hranolu vystoupil, je nutné, aby úhel $|\varepsilon_2|$ byl menší než úhel mezný. Paprsek vystupuje podél stěny (tj. $\varepsilon_2' = -90°$), je-li $\sin|\varepsilon_2| = \frac{1}{n}$.
- Ze vztahu $\sin\varepsilon_1 = n\sin(\varphi - |\varepsilon_2|)$, je patrno, že pokud $\varphi > |\varepsilon_2|$, jsou úhly dopadu jen kladné, je-li $\varphi < |\varepsilon_2|$, jsou úhly dopadu kladné i záporné.



Optické klíny (hranoly s malým lámavým úhlem)

- Při malém lámavém úhlu φ hranol nazýváme optickým klínem.
- Omezíme-li se na malé úhly dopadu, rovnice



$$\sin\varepsilon_1' = \frac{\sin\varepsilon_1}{n}, \qquad \varepsilon_2 = \varphi - \varepsilon_1', \qquad \sin\varepsilon_2' = n\sin\varepsilon_2.$$

přejdou na tvar:

$$\varepsilon_1' = \frac{\varepsilon_1}{n}, \qquad \varepsilon_2 = \varphi - \varepsilon_1', \qquad \varepsilon_2' = n\varepsilon_2.$$

- Po dosazení do vzorce pro δ*: $\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2' - \varphi = \varepsilon_1 + n\left(\varphi - \frac{\varepsilon_1}{n}\right) - \varphi = \varepsilon_1 - \varepsilon_1 + n\varphi - \varphi,$

takže $\delta = (n-1)\varphi$.

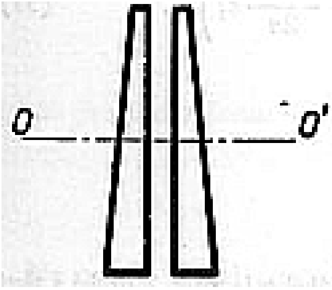
Pozn.: pro libovolný úhel dopadu platí: $\delta = \left(\frac{n\cos\varepsilon_1'}{\cos\varepsilon_1}\right)\varphi \approx (n-1)\left(1 + \frac{n+1}{2n}\varepsilon_1^2\right)\varphi,$ který pro

$\varepsilon_1 \approx 0,$ prochází ve vztah $\delta = (n-1)\varphi$.

* viz Havelka: Optika vz. (1.14) nebo Fuka, Havelka: Optika I, vz. (32)

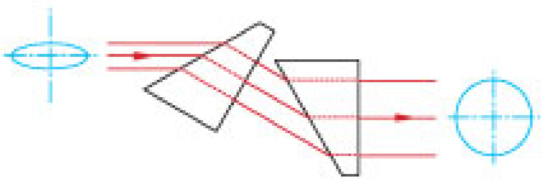
Optické klíny - využití

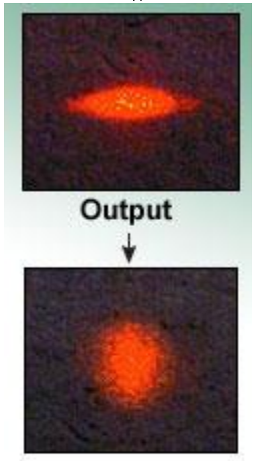
- **Diasporametr** – soustava dvou stejných klínů, které se otáčejí proti sobě kolem osy OO´.



- Jsou-li lámavé hrany klínů rovnoběžné a na stejné straně osy OO´ je odchylka největší (rovná se dvojnásobku odchylky δ_1 jednoho klínu). Otočí-li se každý klín o úhel ψ z této základní polohy, je odchylka soustavy: $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_1^2 + 2\delta_1^2 \cos 2\psi} = 2\delta_1 \cos\psi$.
- Uvedená dvojice klínů představuje tedy klín proměnlivé odchylky od 0 do $2\delta_1$.
- Využití: například na zvýšení měřícího rozsahu fokometrů - tj. přístrojů které měří vrcholovou vzdálenost brýlových čoček, sférických, tórických a prizmatických.

- **Transformace eliptického svazku** na „kruhový“ (např. u laserových diod)

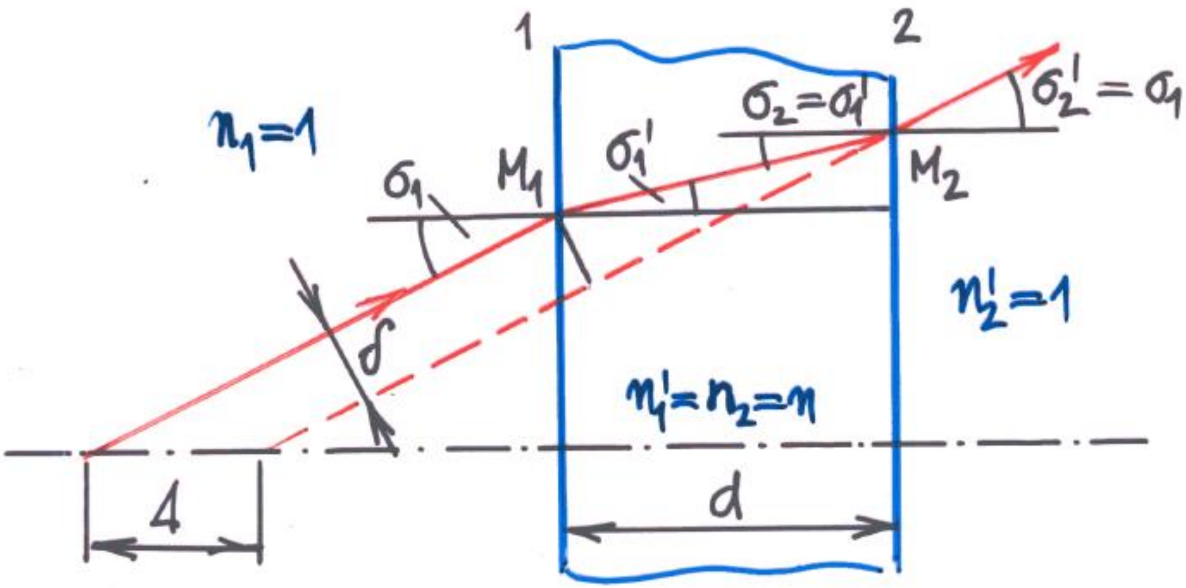




Anamorphic prism pairs
Zdroj: http://www.thorlabs.com/

Planparalelní destička

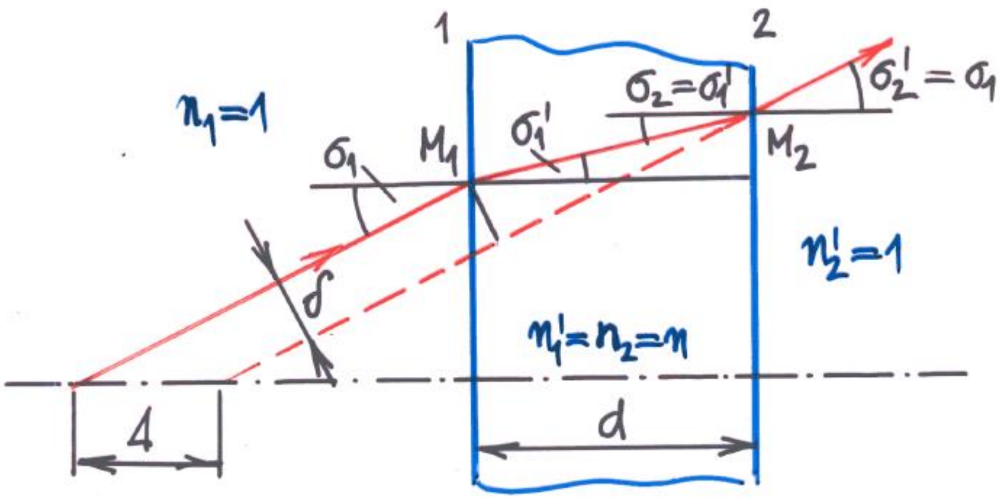
- Pro φ=0° přechází hranol v **planparalelní destičku**.
- Planparalelní destička neodchyluje paprsek, nýbrž jej rovnoběžně posouvá.



$$\delta = M_1M_2 \sin(\sigma_1-\sigma_1') = d\,\frac{\sin(\sigma_1-\sigma_1')}{\cos\sigma_1'} =$$

$$= d\,\frac{\sin\sigma_1\cos\sigma_1' - \cos\sigma_1\sin\sigma_1'}{\cos\sigma_1'} = d\sin\sigma_1\left(1-\frac{\cos\sigma_1\sin\sigma_1'}{\cos\sigma_1'\sin\sigma_1}\right)$$

Planparalelní destička



$$\delta = M_1M_2 \sin(\sigma_1-\sigma_1') = d\,\frac{\sin(\sigma_1-\sigma_1')}{\cos\sigma_1'} =$$

$$= d\,\frac{\sin\sigma_1\cos\sigma_1' - \cos\sigma_1\sin\sigma_1'}{\cos\sigma_1'} =$$

$$= d\sin\sigma_1\left(1-\frac{\cos\sigma_1\sin\sigma_1'}{\cos\sigma_1'\sin\sigma_1}\right)$$

Snellův zákon:

$$\sin\sigma_1 = n\sin\sigma_1'$$

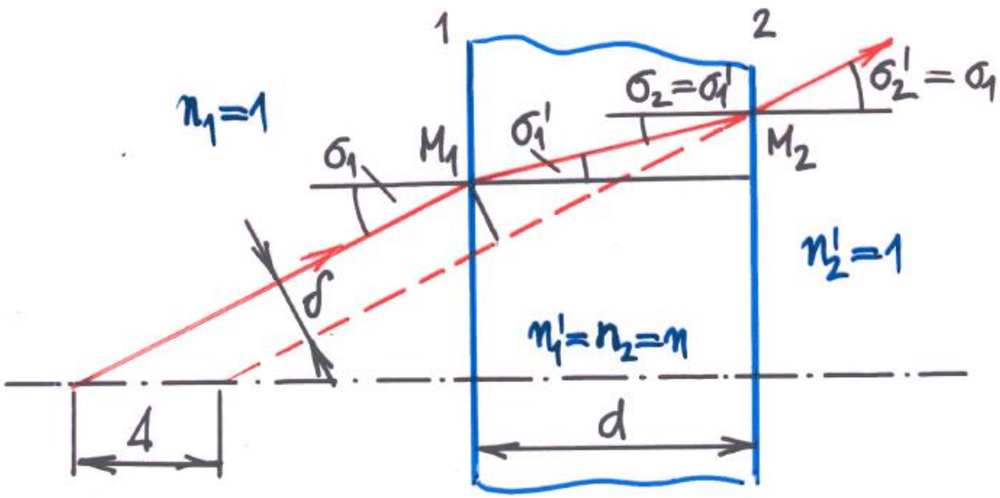
$$\delta = d\sin\sigma_1\left(1-\frac{\cos\sigma_1}{\sqrt{n^2-\sin^2\sigma_1}}\right)$$

$$\Delta = \frac{\delta}{\sin\sigma_1} = d\left(1-\frac{\cos\sigma_1}{\sqrt{n^2-\sin^2\sigma_1}}\right)$$

Pro úhel dopadu $\sigma_1=0$ je

$$\Delta_0 = \frac{n-1}{n}d$$

Planparalelní destička



$$\Delta=\frac{\delta}{\sin\sigma_1}=d\left(1-\frac{\cos\sigma_1}{\sqrt{n^2-\sin^2\sigma_1}}\right)$$

Pro malé úhly dopadu σ_1 platí:

$$\sin\sigma_1 \doteq \sigma_1\left(1-\frac{1}{6}\sigma_1^2\right);$$

$$\sin^2\sigma_1 \doteq \sigma_1^2;$$

$$\cos\sigma_1 \doteq 1-\frac{1}{2}\sigma_1^2.$$

Dále pro $x \ll 1$ platí:

$$(1+x)^n \doteq 1+nx.$$

Potom

$$\Delta \doteq \left(1-\frac{1-\frac{1}{2}\sigma_1^2}{n\sqrt{1-\frac{\sigma_1^2}{n^2}}}\right)d \doteq \left[1-\frac{1}{n}\left(1-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\left(1+\frac{\sigma_1^2}{2n^2}\right)\right]d \doteq$$

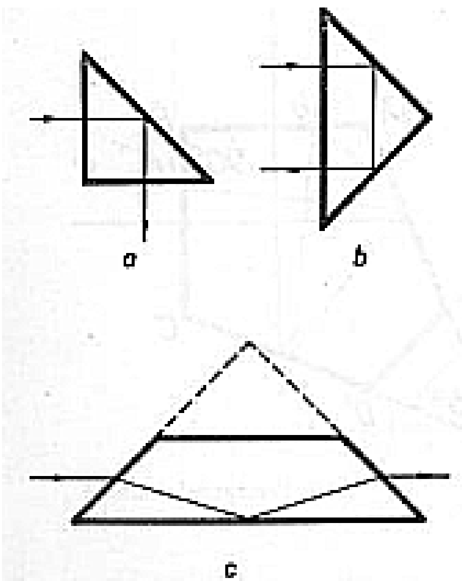
$$=\frac{n-1}{n}\left(1+\frac{n+1}{2n^2}\sigma_1^2\right)d.$$

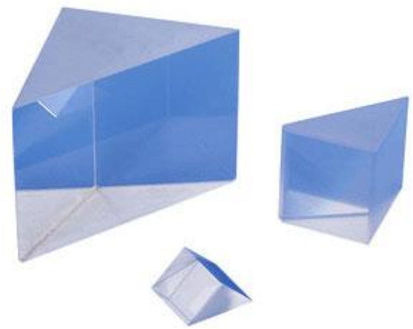
Odrazné hranoly

- Odrazné hranoly (využívá se úplný - totální odraz světla) se využívají zejména v optických přístrojích namísto odrazu na kovech (zrcadla).
- Nahrazují rovinná (kovová) zrcadla.
- Výhody:
  - větší odrazivost,
  - nevzniká dvojitý odraz (jak je tomu u zrcadel s kovovou vrstvou na zadní straně skla),
  - odrazné plochy hranolů jsou pevné a svírají navzájem neproměnný úhel – celek je stabilnější než soustava zrcadel.
- Odrazné hranoly jsou zpravidla sestaveny tak, aby střední paprsky svazků byly kolmé ke stěně vstupní a výstupní (zmenší se tím ztráty světla odrazem a optické vady).
- Odrazné plochy u těchto hranolů se opatřují kovovou vrstvou jenom tehdy, jestliže paprsky dopadají pod úhlem menším než je úhel mezní (viz. např. pentagonální hranol).

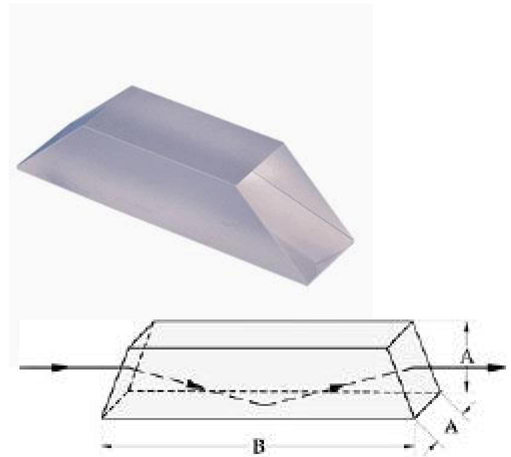
Odrazné hranoly – pravoúhlý rovnoramenný hranol

- Pravoúhlý rovnoramenný hranol má troje využití.



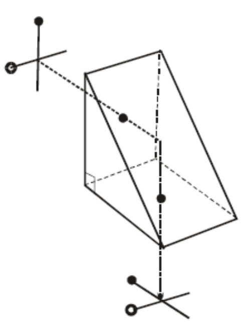


Right angle prisms
Zdroj: http://www.thorlabs.com/

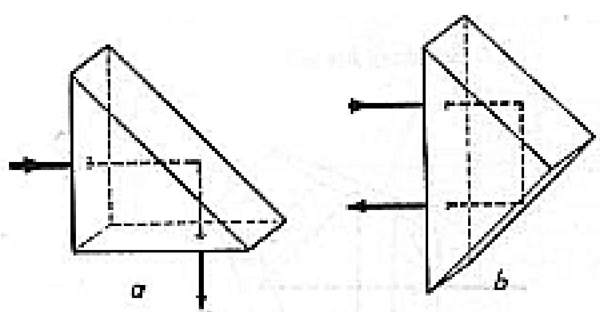


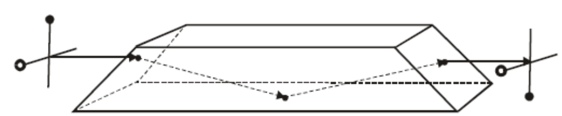
Dove prism
Zdroj: http://www.thorlabs.com/
a http://www.lambda.cz/

- Chod paprsků pravoúhlým rovnoramenným hranolem



Obdoba zrcadla, vytváří však skutečný obraz.

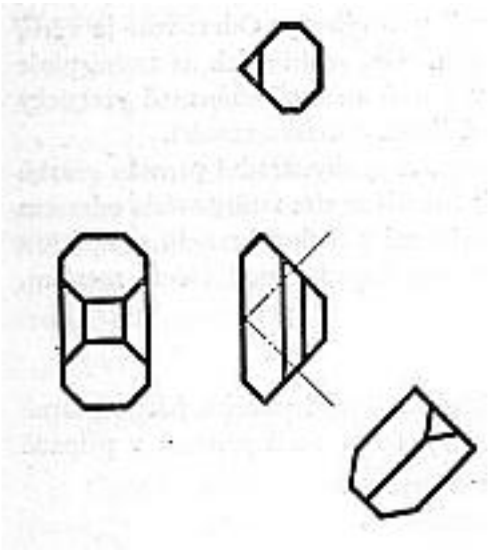




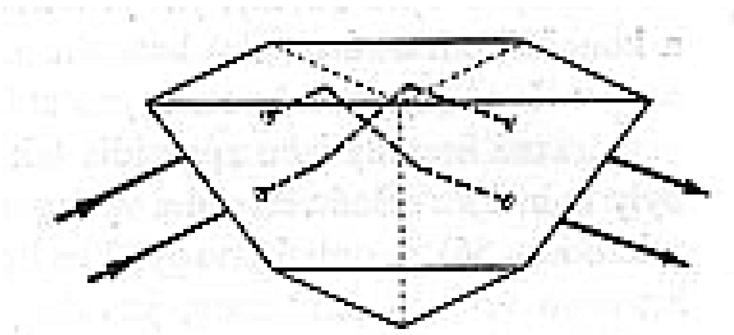
Přetočení obrazu beze změny optické osy.

Odrazné hranoly – střechový hranol

- Střechový hranol má vzhled obyčejného pravoúhlého rovnoramenného hranolu, jehož přeponová stěna je nahrazena dvěma stěnami protínající se pod úhlem 90°.



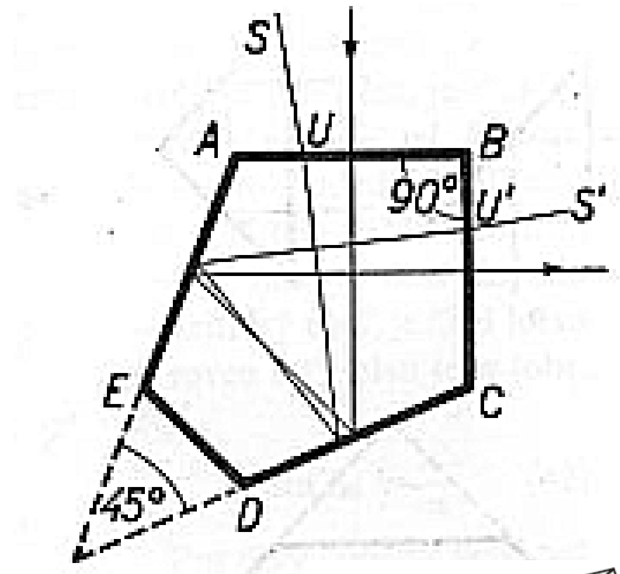
- Chod paprsků střechovým hranolem.



Roof prisms
Zdroj: http://www.thorlabs.com/

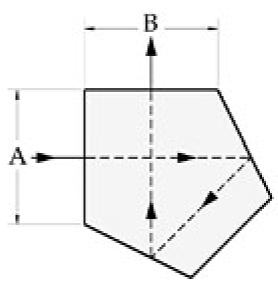
Odrazné hranoly – pentagonální hranol

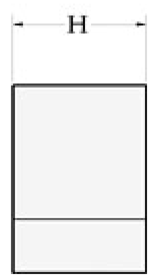
- Kolmým řezem pantagonálním hranolem je pětiúhelník ABCDE. Vstupní stěna AB svírá se stěnou výstupní BC úhel 90°, odrážející stěny AC a CD mohou být pokryty kovovou vrstvou (stříbro, hliník) a svírají úhel 45°, stěna DE nemá optického účinku. Libovolný paprsek SU po dvou odrazech a lomech vystupuje z hranolu ve směru U´S´ kolmém ke směru paprsku kolmém ke směru paprsku dopadajícího, co je velmi důležitá vlastnost tohoto hranolu (využití např. v geodézii).

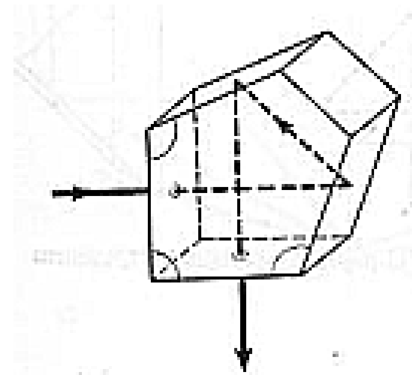


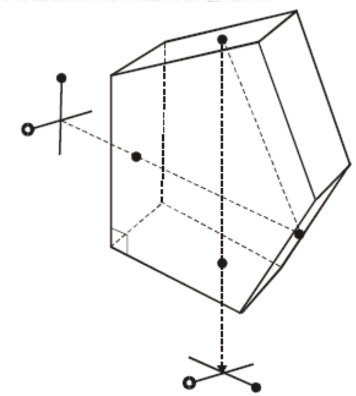
- Chod paprsků pentagonálním hranolem.

Penta prism
Zdroj: http://www.lambda.cc/





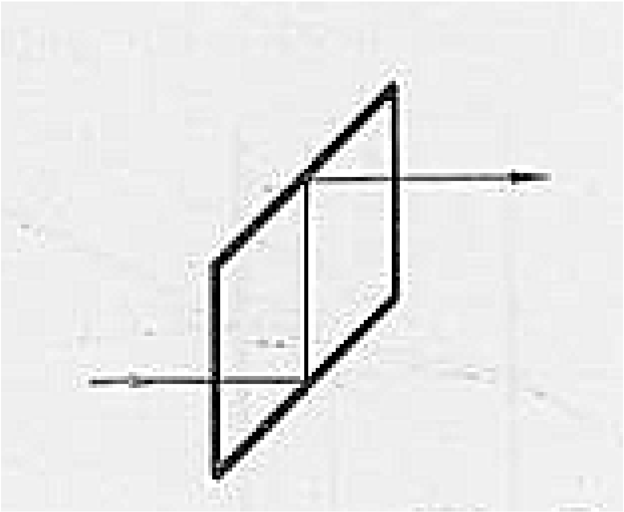




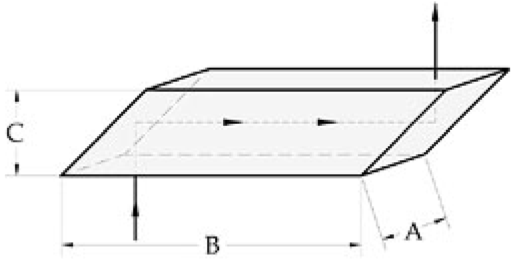
Otočení optické osy o 90°, ale nepřetáčí obraz stranově (jako pravoúhlý hranol). Příklad použití: - jednooká zrcadlovka – tvorba vzpřímeného obrazu v hledáčku.

Odrazné hranoly – rombický hranol

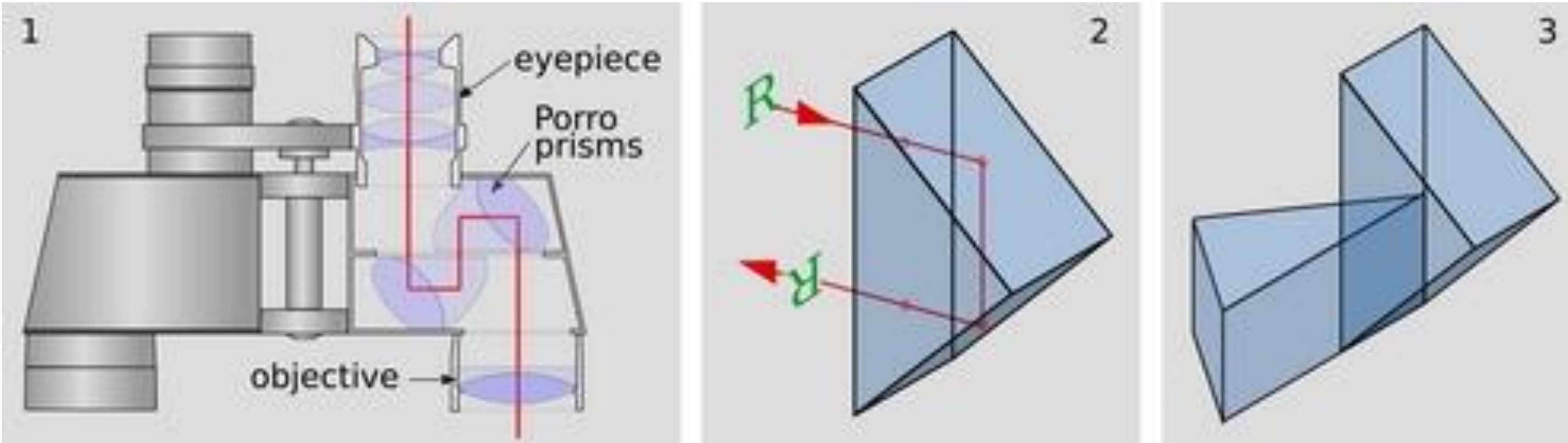
- Rombický hranol se skládá v principu ze dvou pravoúhlých rovnoramenných hranolů.



Rhombic prism
Zdroj: http://www.lambda.cc/



Odrazné hranoly – příklad využití: dalekohled



Panel 1 of the figure shows the optics inside a pair of binoculars. They are essentially a pair of telescopes, one for each eye. But to make them more compact, and allow the eyepieces to be the right distance apart for a human face, they incorporate a set of eight prisms, which fold the light path. In addition, the prisms make the image upright. Panel 2 shows one of these prisms, known as a Porro prism. The light enters along a normal, undergoes two total internal reflections at angles of 45 degrees with respect to the back surfaces, and exits along a normal. The image of the letter R has been flipped across the horizontal. Panel 3 shows a pair of these prisms glued together. The image will be flipped across both the horizontal and the vertical, which makes it oriented the right way for the user of the binoculars.

Zdroj: http://www.lightandmatter.com/

Odrazné hranoly – poznámka

- Každý odrazný hranol působí jako planparalelní destička. Příklad: pravoúhlý rovnoramenný hranol a pentagonální hranol: