



# GEOMETRICKÁ OPTIKA

# Obsah

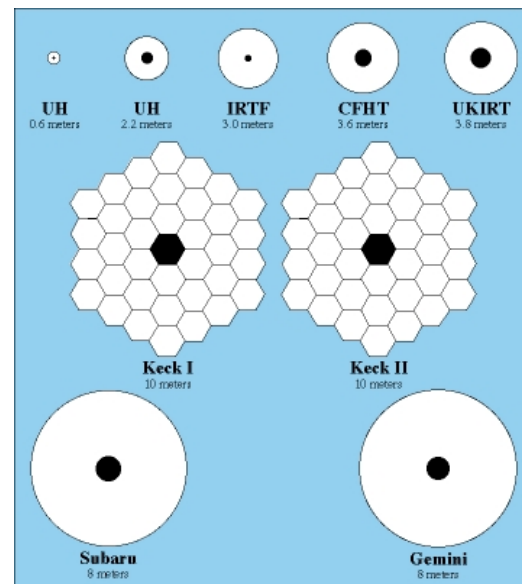
- Základy geometrické (paprskové) optiky

Optické zobrazení

- Zobrazovací rovnice.

# Úvod

**Est rerum omnium magister usus.**  
Praxe je učitelkou všech věcí.



Zdroj: <http://www.ifa.hawaii.edu/mko/>

# Optické zobrazení – Závislost mezi polohou předmětu a obrazu – Zobrazovací rovnice

Jsou-li stanoveny polohy ohnisek a ohniskové vzdálenosti optické (lámavé) plochy (resp. optické soustavy), určí se k danému bodu sdružený bod buď konstruktivně (trasováním paprsku), nebo pomocí zvláštních vztahů, zvaných **zobrazovací rovnice**.

a) **Základní tvar** zobrazovací rovnice

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

Pro  $s \rightarrow -\infty$  je  $s' = f' = \frac{n'r}{n' - n}$ ;

$s' \rightarrow \infty$   $s = f = \frac{nr}{n - n'}$ .

Použití

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}; \quad / \frac{n' - n}{r}$$

$$\frac{\frac{n'}{s'}}{\frac{n' - n}{r}} - \frac{\frac{n}{s}}{\frac{n' - n}{r}} = 1;$$

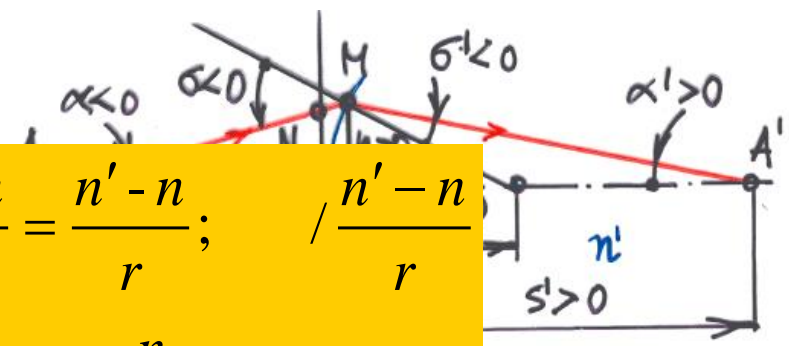
$$\frac{n'r}{n' - n} \frac{1}{s'} + \frac{nr}{n - n'} \frac{1}{s} = 1;$$

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1.$$

obstaneme:

b) **Gaussův tvar** zobrazovací rovnice (zobrazovací rovnice vztažená k hlavním bodům)

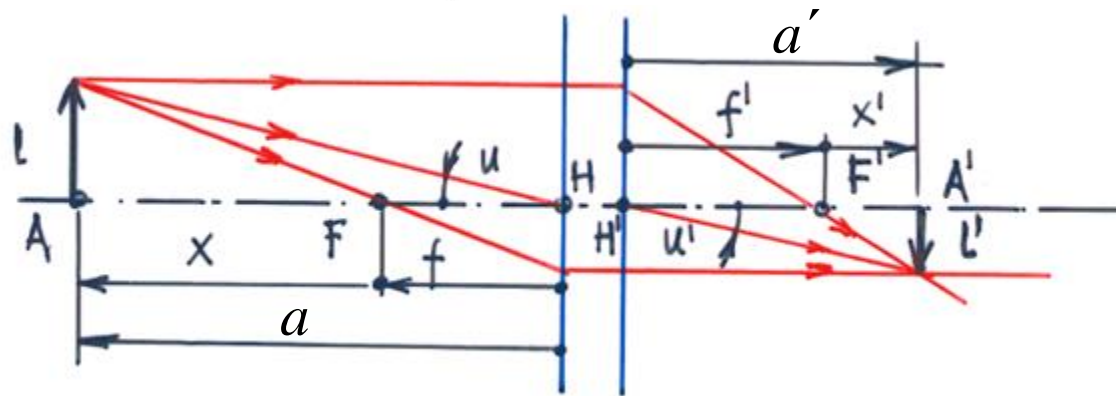
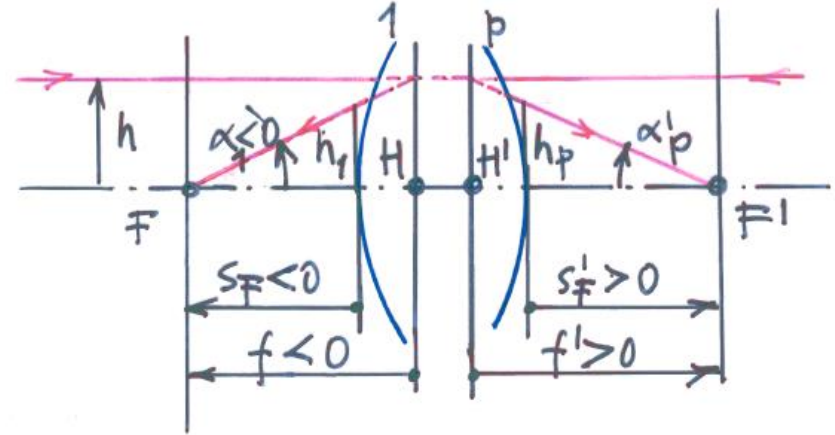
$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1.$$



# Optické zobrazení – Gaussova zobrazovací rovnice

Gaussov tvar zobrazovací rovnice (zobrazovací rovnice vztažená k hlavním bodům)

$$\frac{f'}{a'} + \frac{f}{a} = 1.$$



Pro  $f = -f'$  soustava se nalézá v homogenním prostředí, zobrazovací rovnici vztaženou k hlavním bodům můžeme napsat ve tvaru:

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}.$$

# Optické zobrazení – Newtonova zobrazovací rovnice

Úpravou Gaussovy zobrazovací rovnice  $\frac{f'}{a'} + \frac{f}{a} = 1$ ;

využitím  $a = x + f$  a  $a' = x' + f'$  dostaneme

$$\frac{f'}{x' + f'} + \frac{f}{x + f} = 1.$$

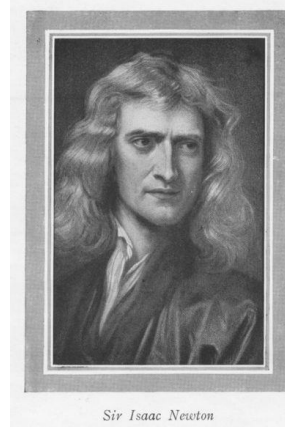
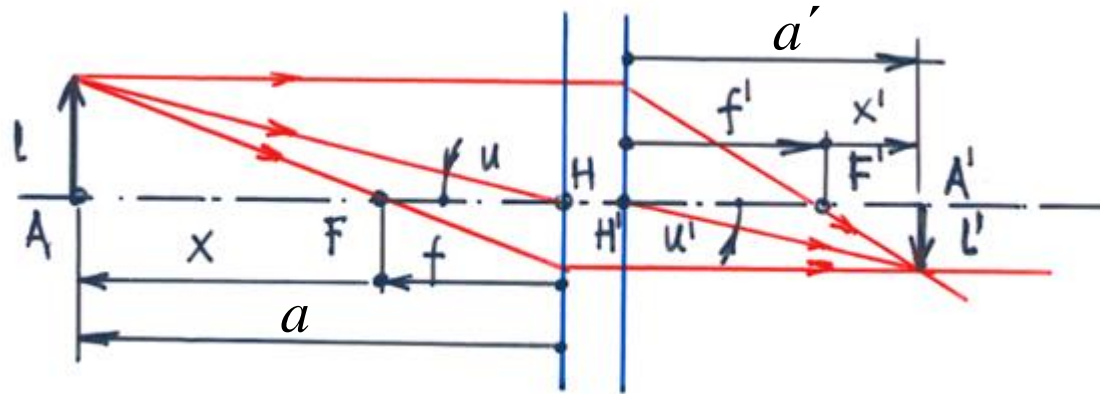
Odkud získáme zobrazovací rovnici

c) **vztaženou na ohniska** – rovnici **Newtonovu**

$$xx' = ff'.$$

Příčné zvětšení v tomto případě je:  $\beta = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$ .

Pro  $f = -f'$  soustava se nalází v homogenním prostředí, zobrazovací rovnici vztaženou k hlavním bodům můžeme napsat ve tvaru:  $xx' = -f'^2$ .



Sir Isaac Newton

Sir Isaac Newton (1643-1726) byl anglický fyzik, matematik, astronom, filosof, teolog a alchymista. Je považován za jednoho z nejvýznamnějších vědců všech dob. Newton ve svém základním díle

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Matematické principy přírodovědy) popsal zákon všeobecné gravitace a svými pohybovými zákony položil základy klasické mechaniky. V rámci svého výzkumu také vytvořil (spolu s Gottfriedem Leibnizem; o prvenství vedli nesmiřitelný spor) základy diferenciálního a integrálního počtu.

Zdroj: [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)

# Optické zobrazení – Zobrazovací rovnice pro libovolnou dvojici sdružených bodů

Využitím příčného zvětšení  $\beta$  můžeme vztáhnout základní tvar zobrazovací rovnice na libovolnou dvojici sdružených bodů  $Z_1Z_j$  optické soustavy.

Je-li  $\beta_Z$  příčné zvětšení sdružených bodů  $Z_1Z_j$ , a označíme-li  $p = \overline{Z_1X_1}$ ,  $p' = \overline{Z'_jX'_j}$

a  $z = \overline{FZ_1}$ ,  $z' = \overline{F'Z'_j}$  platí:

$$x = z + p, \quad x' = z' + p'.$$

Využitím Newtonovy zobrazovací rovnice

$$xx' = ff'; \quad zz' = ff' \quad \text{dostaneme:}$$

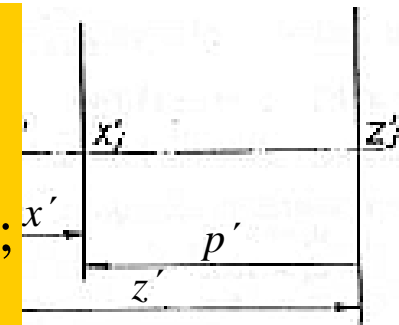
$$z'p + zp' + pp' = 0;$$

$$xx' = zz' = ff';$$

$$zz' = (z + p)(z' + p');$$

$$zz' = zz' + zp' + z'p + pp';$$

$$z'p + zp' + pp' = 0.$$



Poněvadž je  $z = -\frac{f}{\beta_Z}$ ,  $z' = -f'\beta_Z$ ; můžeme psát předešlou rovnici ve tvaru:

$$\frac{f'}{p'}\beta_Z + \frac{1}{\beta_Z p} - 1 = 0; \quad \text{nebo využitím } f' = -\frac{n'_j}{n_1}f; \quad \text{ve tvaru: } \frac{n'_j}{p'}\beta_Z - \frac{n_1}{p}\frac{1}{\beta_Z} = \frac{n'_j}{f}.$$

Pro příčné zvětšení plyne:  $\beta = \frac{n_1}{n'_j} \frac{p'}{p} \frac{1}{\beta_Z}.$

# Optické zobrazení – Afokální soustava, Gaussova zobrazovací rovnice

Pro **afokální soustavu** ( $f' \rightarrow \infty$ ) nabývají tyto rovnice tvaru:

$$\frac{p}{p'} = \frac{n'_j}{n_1} \beta_Z; \quad \beta = \beta_Z. \quad \text{Z posledního vztahu vyplývá, že } \mathbf{\text{příčné zvětšení afokální soustavy je stálé.}}$$

V praxi mají význam zejména případy:

a) kdy  $Z_1, Z_j$  jsou **body hlavní** – zobrazovací rovnice **Gaussova**,  $\beta_Z = 1, z = p, z' = p'$ ,

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1; \quad \beta = -\frac{f}{f'} \frac{p'}{p}, \quad \text{nebo} \quad \frac{n'_j}{p'} - \frac{n_1}{p} = \frac{n'_j}{f'}; \quad \beta = \frac{n_1}{n'_j} \frac{p'}{p}.$$

v případě  $n_j = n_1$  dostáváme:

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}; \quad \beta = \frac{p'}{p}.$$



# Optické zobrazení – Gullstrandova zobrazovací rovnice

b) kdy  $Z_1, Z_j$  jsou **středů pupil** – zobrazovací rovnice **Gullstrandova**,  $\beta_z = \frac{D'}{D}$ , kde  $D$  a  $D'$  jsou průměry vstupní a výstupní pupily.

$$\frac{D'^2 f'}{z'} + \frac{D^2 f}{z} = DD'; \quad \beta = -\frac{f}{f'} \frac{D}{D'} \frac{p'}{p}, \quad \text{nebo} \quad \frac{n'_j D'^2}{z'} - \frac{n_1 D^2}{z} = \frac{n'_j}{f'} DD'; \quad \beta = \frac{n_1}{n'_j} \frac{D}{D'} \frac{z'}{z}.$$

v případě  $n_j=n_1$  a  $\beta>0$  dostáváme:

$$\frac{D'^2}{z'} - \frac{D^2}{z} = \frac{DD'}{f'}; \quad \beta = \frac{D}{D'} \frac{z'}{z},$$

a v případě  $n_j=n_1$  a  $\beta<0$ :

$$\frac{D'^2}{z'} - \frac{D^2}{z} = -\frac{DD'}{f'}; \quad \beta = -\frac{D}{D'} \frac{z'}{z}.$$

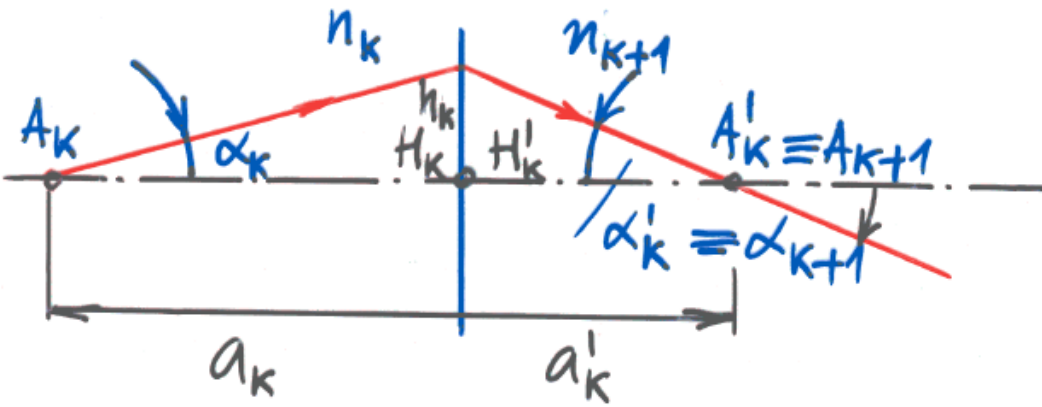


Allvar Gullstrand (1862-1930) byl švédský oftalmolog, nositel Nobelovy ceny za fyziologii a medicínu za rok 1911.

Byl prvním profesorem oftalmologie na univerzitě ve švédské Uppsale. Od roku 1901 spolupracoval Gullstrand v laboratořích Carl Zeiss v Jeně se Siegfriedem Czapskim na konstrukci oftalmologických optických přístrojů. Inicioval vývoj nových přístrojů, navrhoval jejich koncepci a účastnil se klinických testů. K nejdůležitějším výsledkům tohoto vývoje patří Gullstrandův oftalmoskop se štěrbinovým osvětlením pro pozorování očního pozadí z roku 1911.

Zdroj: [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)

# Optické zobrazení – výpočet chodu parasků ideální soustavou



Z obrázku platí:

$$a_k = \frac{h_k}{\operatorname{tg} \alpha_k}; \quad a'_k = \frac{h_k}{\operatorname{tg} \alpha'_k}.$$

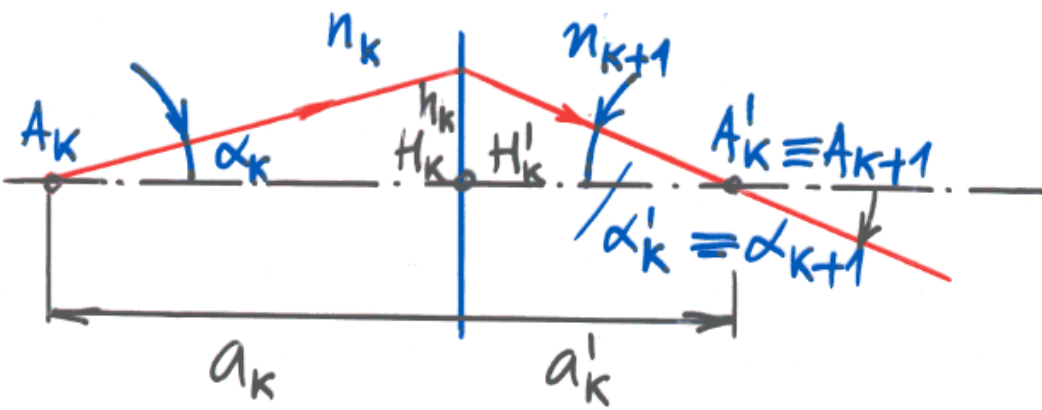
Dosazením do zobrazovací rovnice  $\frac{f'}{a'} + \frac{f}{a} = 1$  dostaneme:

$$\frac{f' \cdot \operatorname{tg} \alpha'_k}{h_k} + \frac{f \cdot \operatorname{tg} \alpha_k}{h_k} = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha'_k = -\frac{f_k}{f'_k} \operatorname{tg} \alpha_k + \frac{h_k}{f'_k}.$$

Protože  $\alpha'_k = \alpha_{k+1}$ ,  $\frac{f'_k}{f_k} = \frac{-n_{k+1}}{n_k}$ ,  $\Phi_k = \frac{n_{k+1}}{f'_k}$ , je

$$\operatorname{tg} \alpha_{k+1} = \frac{n_k}{n_{k+1}} \operatorname{tg} \alpha_k + \frac{h_k \Phi_k}{n_{k+1}}.$$

# Optické zobrazení – výpočet chodu parasků ideální soustavou



$$\operatorname{tg} \alpha_{k+1} = \frac{n_k}{n_{k+1}} \operatorname{tg} \alpha_k + \frac{h_k \Phi_k}{n_{k+1}}$$

Pro soustavu ve vzduchu ( $n_k = n_{k+1} = 1$ ) vychází:

$$\operatorname{tg} \alpha_{k+1} = \operatorname{tg} \alpha_k + h_k \Phi_k.$$

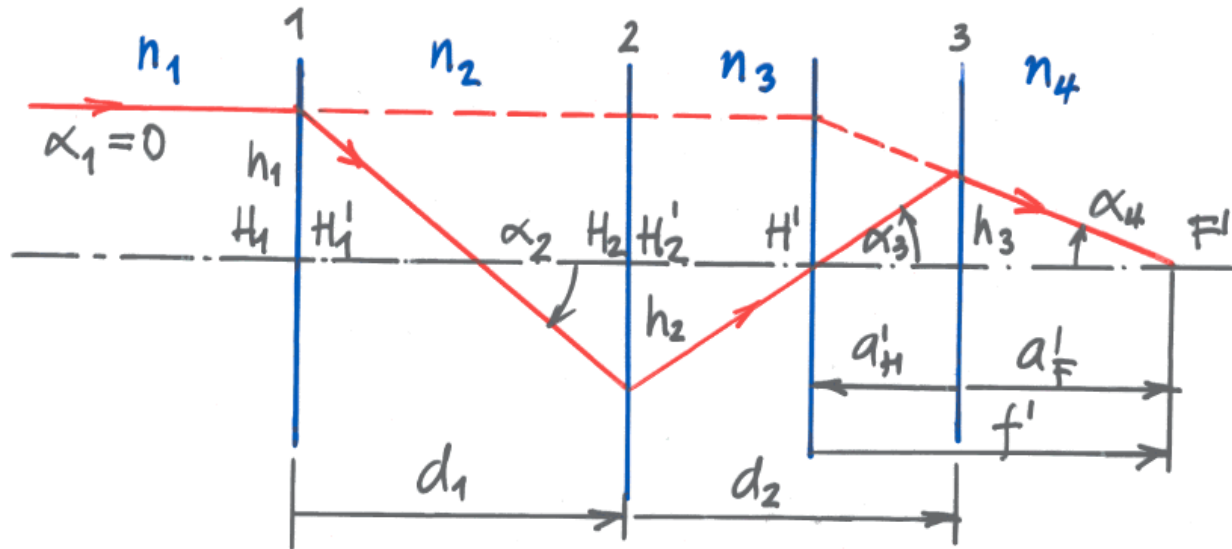
Platí rovněž:

$$h_{k+1} = h_k - \operatorname{tg} \alpha_{k+1} \cdot d_k.$$

Pro paraxiální paprsky platí:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + h_k \Phi_k, \quad h_{k+1} = h_k - \alpha_{k+1} \cdot d_k.$$

# Optické zobrazení – soustava složená z několika prvků



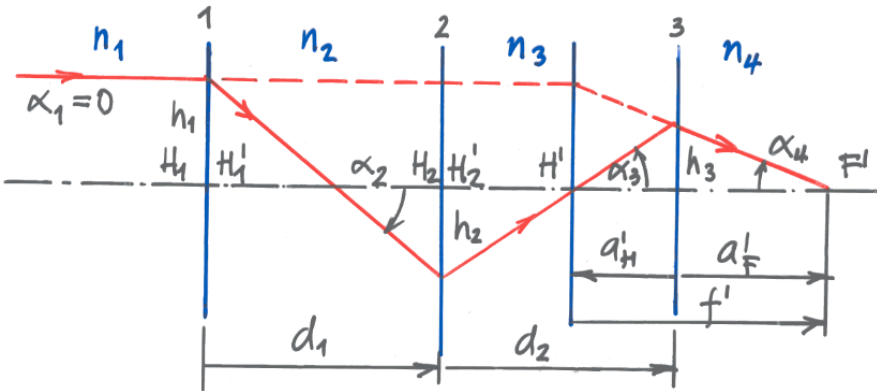
$$a_k = 0; \quad \Phi = \frac{n_4}{f'} = \frac{n_4 \operatorname{tg} \alpha_4}{h_1}.$$

Pomocí soustavy rovnic dopadových výšek a úhlů lze nalézt:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - \frac{\Phi_1 d_1}{n_2} (\Phi_2 + \Phi_3) - \frac{\Phi_3 d_2}{n_3} \left( \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{\Phi_1 \Phi_2 d_1}{n_2} \right).$$

Poloha obrazového ohniska:

# Optické zobrazení – soustava složená z několika prvků



Poloha obrazového  
ohniska:

$$a'_F = \frac{h_3}{\operatorname{tg} \alpha_4} = \frac{n_4 h_3}{\Phi h_1} = \frac{n_4}{\Phi} \left( 1 - \frac{\Phi_1 d_1}{n_2} - \frac{\Phi_1 d_2}{n_3} - \frac{\Phi_2 d_2}{n_3} + \frac{\Phi_1 \Phi_2 d_1 d_2}{n_2 n_3} \right) =$$

$$= \frac{n_4}{\Phi} \left[ 1 - \Phi_1 \left( \frac{d_1}{n_2} + \frac{d_2}{n_3} \right) - \frac{\Phi_2 d_2}{n_3} \left( 1 - \frac{\Phi_1 d_1}{n_2} \right) \right].$$

Pro soustavu  
obklopenou vzduchem:

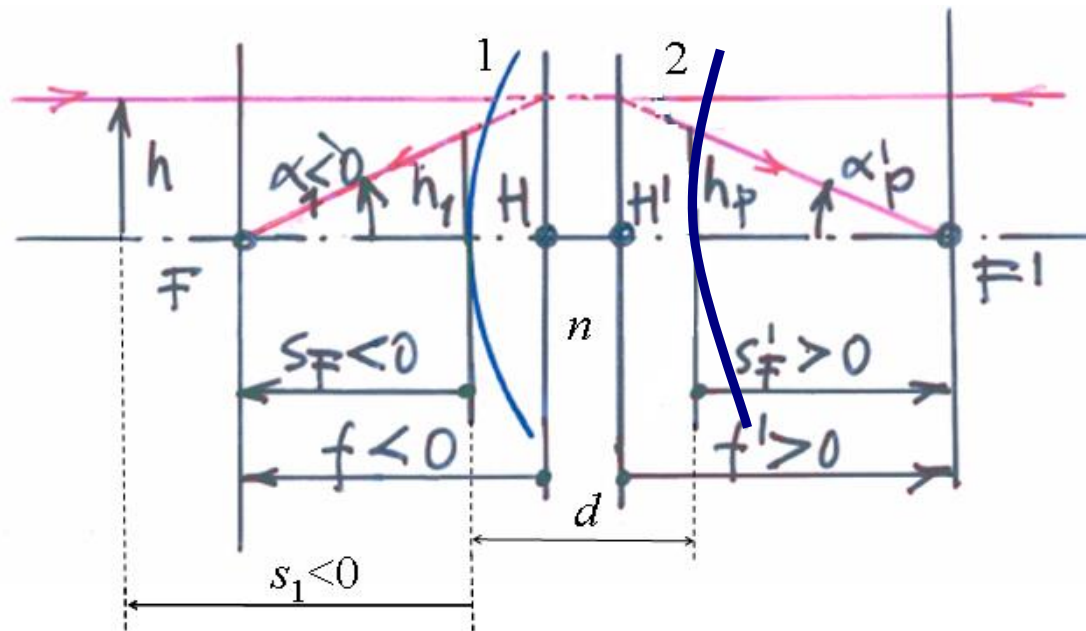
$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_1 d_1 (\Phi_2 + \Phi_3) - \Phi_3 d_2 (\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1 \Phi_2 d_1);$$

$$a'_F = \frac{1}{\Phi} \left[ 1 - \Phi_1 (d_1 + d_2) - \Phi_2 d_2 (1 - \Phi_1 d_1) \right].$$

# Optické zobrazení – soustava složená z několika prvků

Čočka o poloměru křivosti ploch  $r_1=20$  mm,  $r_2=40$  mm tloušťky  $d=6$  mm a zhotovená ze skla s indexem lomu  $n=1,5$  zobrazuje předmět, jenž je vzdálenosti  $s_1=-100$  mm od prvního rozhraní. Určete polohu obrazu trojím způsobem:

- sledováním paraxiálního paprsku;
- zobrazením vztaženým na hlavní body;
- zobrazením vztaženým na ohniska.



# Optické zobrazení – soustava složená z několika prvků

a) sledováním paraxiálního paprsk

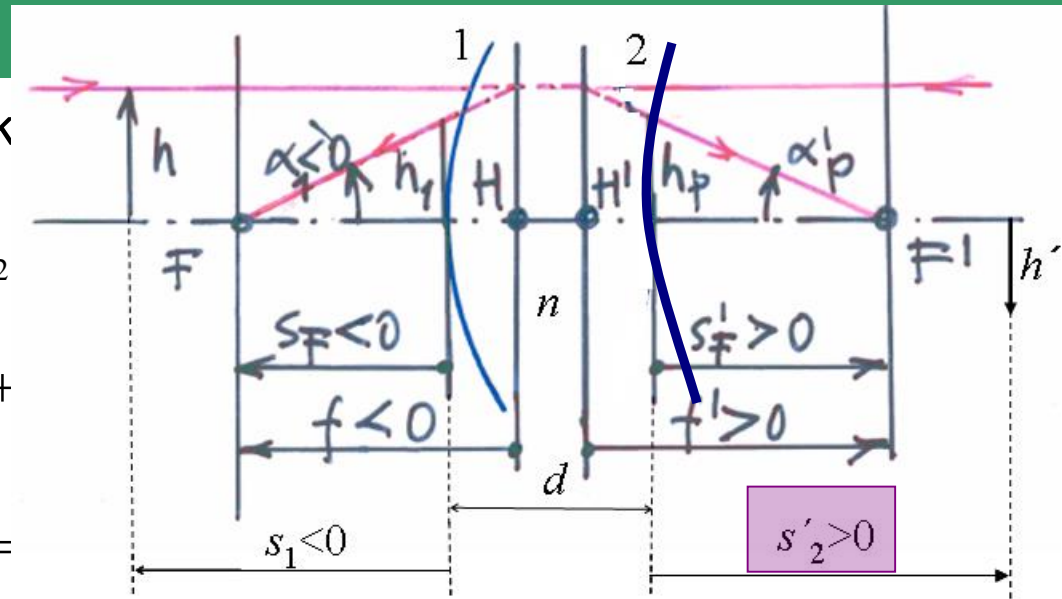
ze zadání:  $n_1 = 1$  (vzduch),  $n'_1 = n_2$

$$\frac{n'_1}{s'_1} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n'_1 - n_1}{r_1} \Rightarrow \frac{n'_1}{s'_1} = \frac{n'_1 - n_1}{r_1} +$$

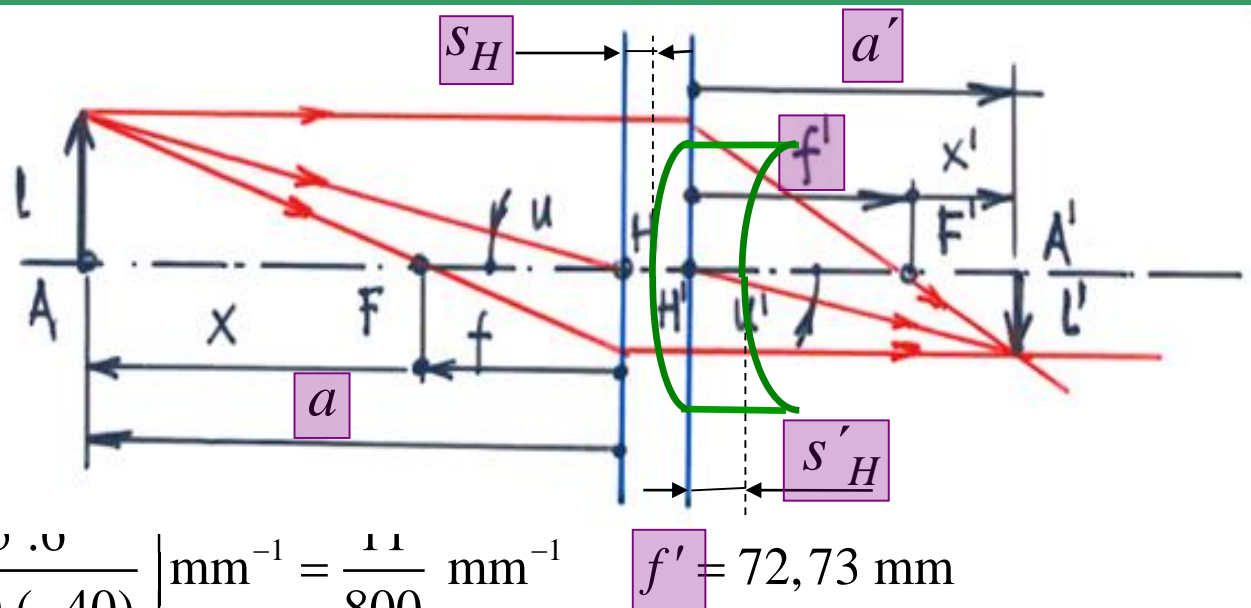
$$s'_1 = \frac{n'_1}{\frac{n'_1 - n_1}{r_1} + \frac{n_1}{s_1}} = \frac{1,5}{\frac{0,5}{20} + \frac{1}{-100}} \text{ mm} =$$

$$s_2 = s'_1 - d = (100 - 6) \text{ mm} = 94 \text{ mm}$$

$$s'_2 = \frac{n'_2}{\frac{n'_2 - n_2}{r_2} + \frac{n_2}{s_2}} = \frac{1}{\frac{-0,5}{40} + \frac{1,5}{94}} \text{ mm} = 289,20 \text{ mm}$$



# Optické zobrazování prvků



b) zobrazením vztaheny

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}, \text{ kde } \frac{1}{f'} = \left( \dots \right)$$

$$= \left[ 0,5 \left( \frac{1}{20} - \frac{1}{40} \right) + \frac{0,5 \cdot 0,5}{1,5 \cdot 20 \cdot (-40)} \right] \text{mm}^{-1} = \frac{11}{800} \text{mm}^{-1}$$

$$f' = 72,73 \text{ mm}$$

$$s_H = -f' \frac{n-1}{n} d \frac{1}{r_2} = -\frac{800}{11} \cdot \frac{0,5}{1,5} \cdot 6 \cdot \frac{1}{40} = -3,64 \text{ mm}$$

$$s'_H = -f' \frac{n-1}{n} \frac{d}{r_1} = -\frac{800}{11} \cdot \frac{0,5}{1,5} \cdot \frac{6}{20} = -7,27 \text{ mm}$$

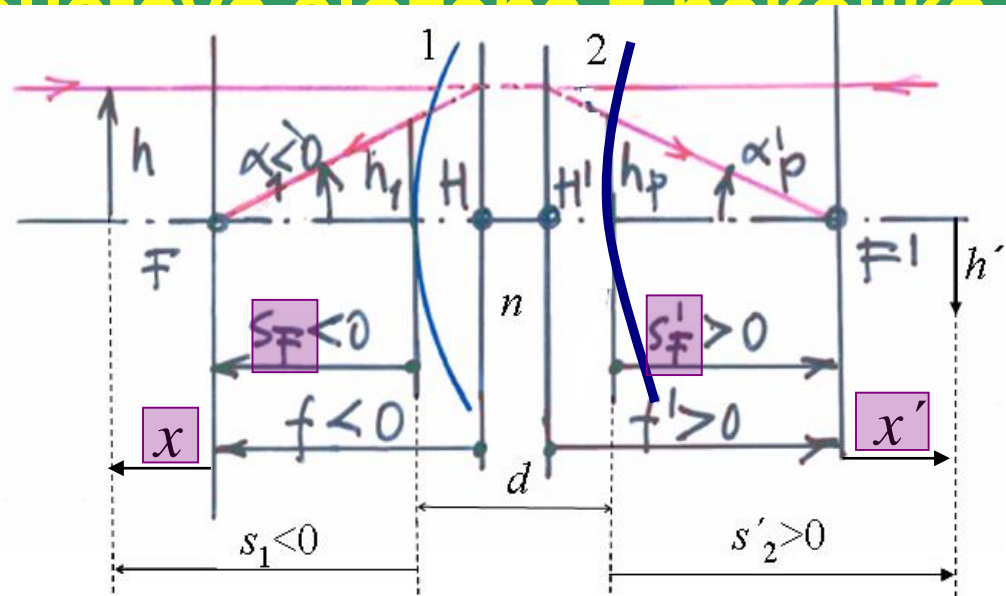
$$a = s_1 - s_H = -100 + 3,64 = -96,36 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{a} = \frac{11}{800} - \frac{1}{96,36} = 0,0034 \text{ mm}^{-1}$$

$$a' = 296,6 \text{ mm}$$



# Optické zobrazení – soustava dvoučlenná z několika prvků



c) zobrazením vztaženým na ohnis

$$xx' = -f'^2$$

$$s_F = s_H - f' =$$

$$= (-3,64 - 72,73) \text{ mm} = -76,37 \text{ mm}$$

$$(s'_F = s'_H + f')$$

$$x = s_1 - s_F = (-100 + 76,37) \text{ mm} = -23,63 \text{ mm}$$

$$x' = -\frac{f'^2}{x} = \frac{72,73^2}{23,63} \text{ mm} = 223,85 \text{ mm}$$

# Optické zobrazení – soustava složená z několika prvků

Čočka o poloměru křivosti ploch  $r_1=20$  mm,  $r_2=-40$  mm tloušťky  $d=6$  mm a zhotovená ze skla s indexem lomu  $n=1,5$  zobrazuje předmět, jenž je vzdálenosti  $s_1=-100$  mm od prvního rozhraní. Určete polohu obrazu trojím způsobem:

- sledováním paraxiálního paprsku  $\rightarrow s'_2=289,2$  mm;
- zobrazením vztaženým na hlavní body  $\rightarrow f'=72,73$  mm;  $s_H=-3,64$  mm;  $s'_H=-7,27$  mm;  $a=-96,36$  mm;  $a'=296,6$  mm;
- zobrazením vztaženým na ohniska  $s_F=-76,37$  mm;  $x=-23,63$  mm;  $x'=223,85$  mm.

Kontrola:

$$s'_2 \approx f' + x' + s'_H = (72,73 + 223,85 - 7,27) \text{ mm} = 289,3 \text{ mm} \approx a' + s'_H = 289,3 \text{ mm}$$

$$s_1 \approx f + x + s_H \approx a + s_H = (-96,36 - 3,64) \text{ mm} = -100 \text{ mm}$$