



GEOMETRICKÁ OPTIKA

Přednáška 10

Obsah

- Základy geometrické (papřskové) optiky
 - Zobrazení centrovanou soustavou dvou kulových ploch. Rovnice čočky.
 - Zrcadla.

Úvod



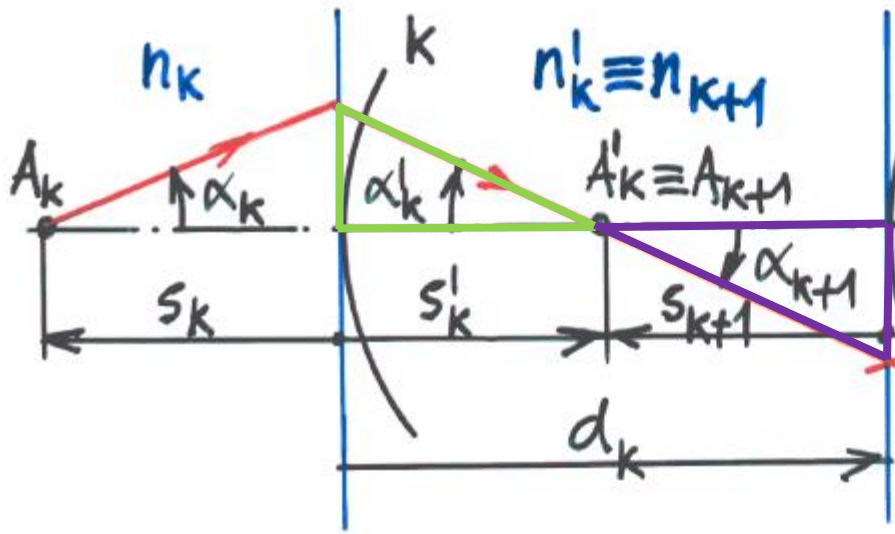
**Dopad velkého úspěchu rozvíří
vítr drobných nepříjemností.**

/Japonské přísloví /

Zdroj: <http://cs.wikiquote.org/>



Optické zobrazení - výpočet chodu paprsků soustavou kulových ploch



$$n(\alpha - \omega) = n'(\alpha' - \omega),$$

$$n_k \left(\alpha_k - \frac{h_k}{r_k} \right) = n_{k+1} \left(\alpha_{k+1} - \frac{h_k}{r_k} \right),$$

$$n_k \alpha_k - \frac{n_k h_k}{r_k} = n_{k+1} \alpha_{k+1} - \frac{n_{k+1} h_k}{r_k},$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{n_k}{n_{k+1}} \alpha_k + h_k \frac{n_{k+1} - n_k}{n_{k+1} r_k}.$$

Rovnice můžeme vyjádřit pomocí úhlů a do

$$\alpha_{k+1} = \frac{n_k}{n_{k+1}} \alpha_k + h_k \frac{n_{k+1} - n_k}{n_{k+1} r_k},$$

rovni
papr

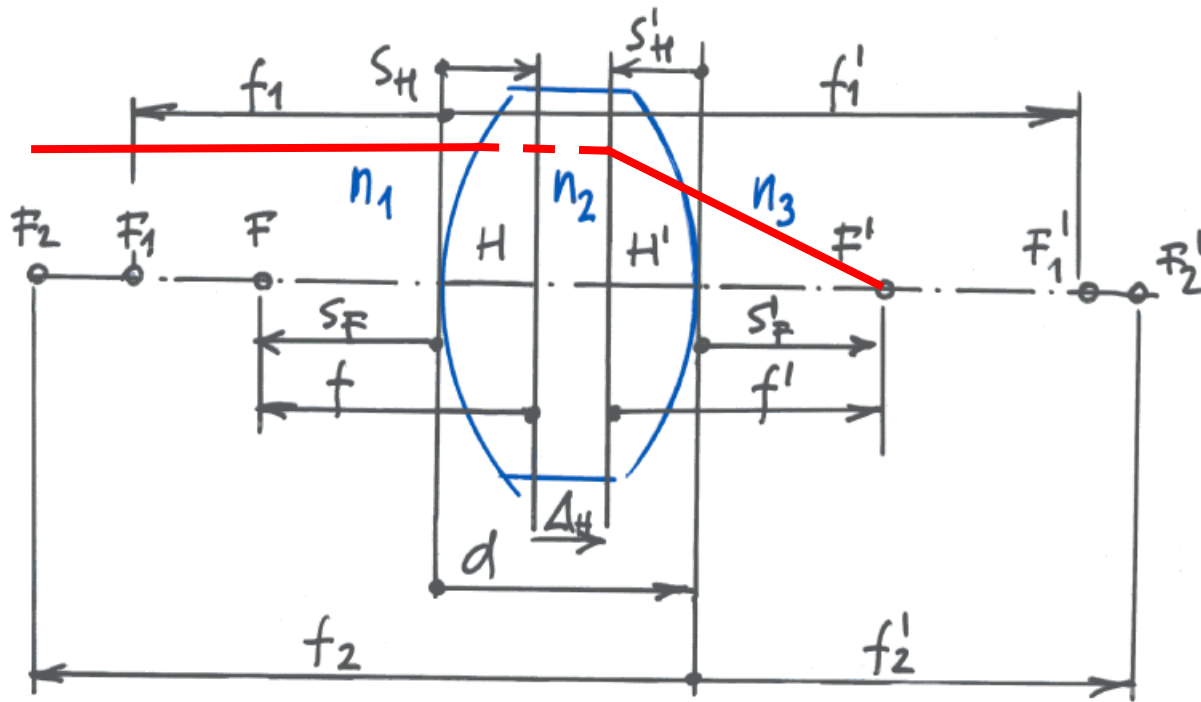
Z obrázku:

$$\frac{h_k}{s'_k} = \frac{h_{k+1}}{s'_k - d_k}, \text{ takže } h_{k+1} = h_k - \frac{h_k}{s'_k} d_k, \text{ nebo}$$

$$h_{k+1} = h_k - \alpha_{k+1} d_k.$$

rovnice dopadových výšek
paprsku

Optické zobrazení - Zobrazení centrovanou soustavou dvou kulových ploch – Rovnice čočky



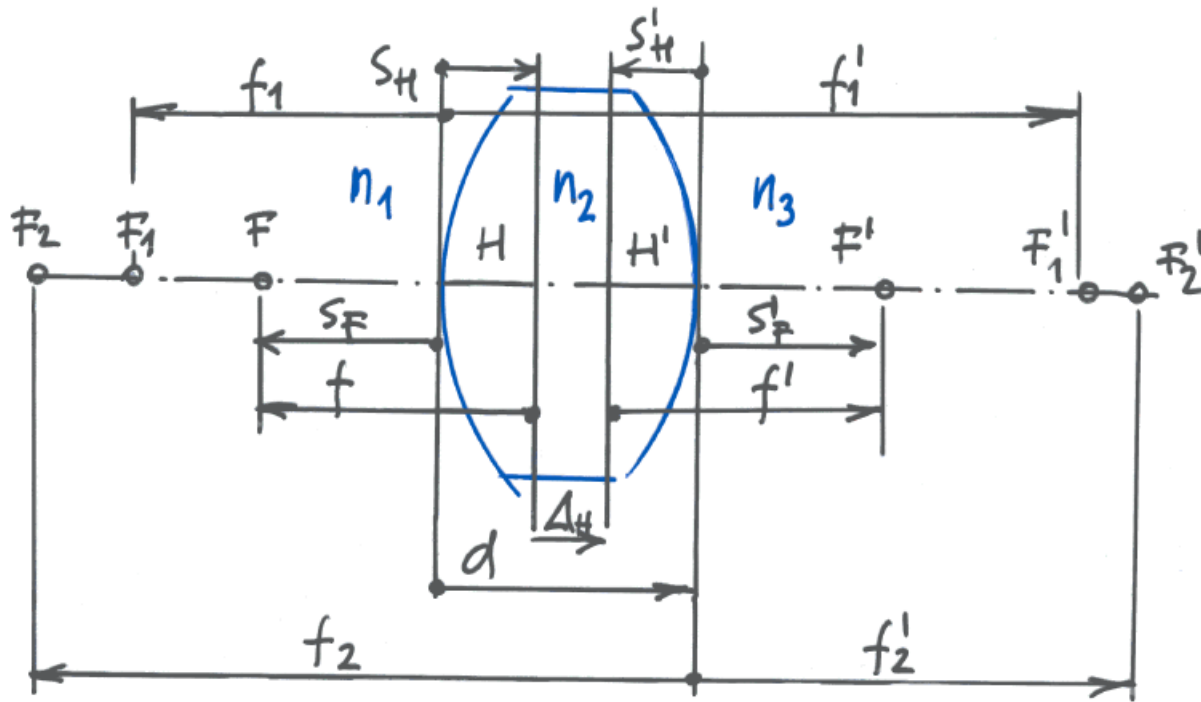
$$\alpha_{k+1} = \frac{n_k}{n_{k+1}} \alpha_k + h_k \frac{n_{k+1} - n_k}{n_{k+1} r_k},$$

$$f' = \frac{h_1}{\alpha_{p+1}}, \quad h_{k+1} = h_k - \alpha_{k+1} d_k.$$

$$f' = \frac{h_1}{\alpha_3}; \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = h_1 \frac{n_2 - n_1}{n_2 r_1}; \quad h_2 = h_1 - \alpha_2 d; \quad \alpha_3 = \frac{n_2}{n_3} \alpha_2 + h_2 \frac{n_3 - n_2}{n_3 r_2};$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{n_3} \left(\frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} \right) - \frac{(n_2 - n_1)(n_3 - n_2)}{n_2 n_3 r_1 r_2} d.$$

Optické zobrazení - Zobrazení centrovanou soustavou dvou kulových ploch – Rovnice čočky



$$\alpha_{k+1} = \frac{n_k}{n_{k+1}} \alpha_k + h_k \frac{n_{k+1} - n_k}{n_{k+1} r_k},$$

$$f' = \frac{h_1}{\alpha_{p+1}}, \quad h_{k+1} = h_k - \alpha_{k+1} d_k.$$

$$f = \frac{h_2}{\alpha_1}; \quad \alpha_3 = 0; \quad \alpha_2 = \frac{n_1}{n_2} \alpha_1 + h_1 \frac{n_2 - n_1}{n_2 r_1}; \quad h_2 = h_1 - \alpha_2 d; \quad 0 = \frac{n_2}{n_3} \alpha_2 + h_2 \frac{n_3 - n_2}{n_3 r_2};$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{n_1} \left(\frac{n_1 - n_2}{r_1} + \frac{n_2 - n_3}{r_2} \right) - \frac{(n_1 - n_2)(n_2 - n_3)}{n_1 n_2 r_1 r_2} d.$$

Optické zobrazení - Zobrazení centrovanou soustavou dvou kulových ploch – Rovnice čočky

Porovnáním vztahů pro ohniskové vzdálenosti

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{n_3} \left(\frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} \right) - \frac{(n_2 - n_1)(n_3 - n_2)}{n_2 n_3 r_1 r_2} d.$$

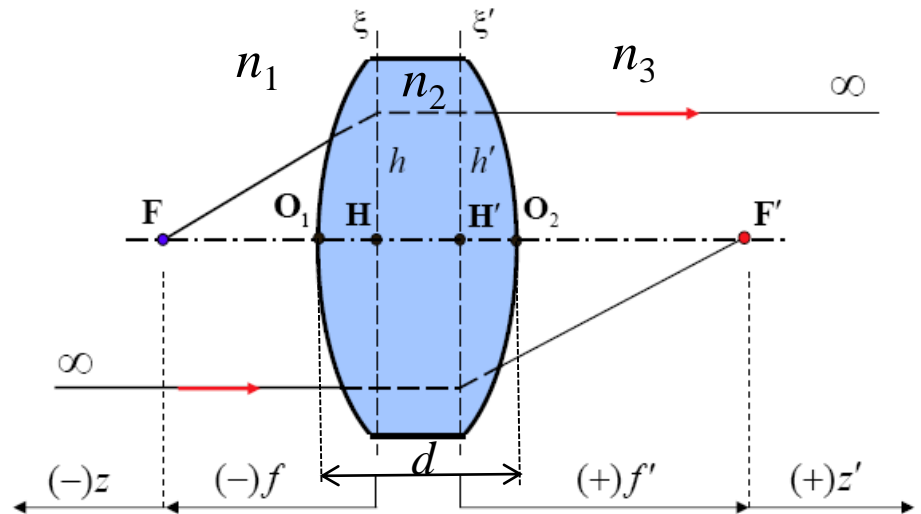
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{n_1} \left(\frac{n_1 - n_2}{r_1} + \frac{n_2 - n_3}{r_2} \right) - \frac{(n_1 - n_2)(n_2 - n_3)}{n_1 n_2 r_1 r_2} d.$$

dostaneme:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n_3}{n_1}.$$

Optická mohutnost:

$$\Phi = \frac{n_3}{f'} = -\frac{n_1}{f}.$$



Optické zobrazení - Zobrazení centrovanou soustavou dvou kulových ploch

Pro ohniskové vzdálenosti jednotlivých ploch čočky platí:

$$f_1' = \frac{n_2 r_1}{n_2 - n_1}; \quad f_1 = -\frac{n_1 r_1}{n_2 - n_1}$$
$$f_2' = \frac{n_3 r_2}{n_3 - n_2}; \quad f_2 = -\frac{n_2 r_2}{n_3 - n_2}.$$

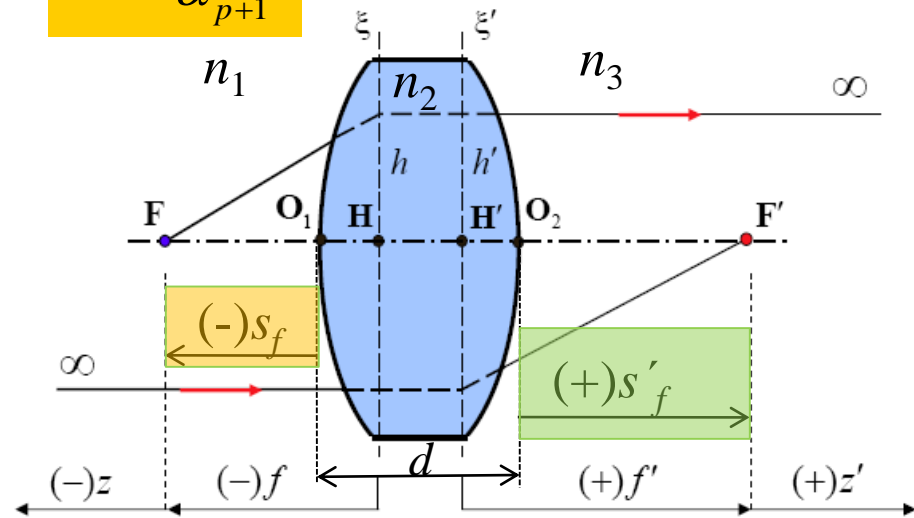
Dosazením do vztahu pro výslednou ohniskovou vzdálenost dostaneme:

$$\Phi = \frac{n_3}{f'} = \left(-\frac{n_1}{f} = \right) \frac{n_2}{f_1'} + \frac{n_3}{f_2'} - \frac{n_3 d}{f_1' f_2'}, \quad \text{nebo: } \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1 \Phi_2 \frac{d}{n_2}.$$

Optické zobrazení - Zobrazení centrovanou soustavou dvou kulových ploch

Sečná vzdálenost obrazového ohniska:

$$s'_F = \frac{h_p}{\alpha_{p+1}}$$

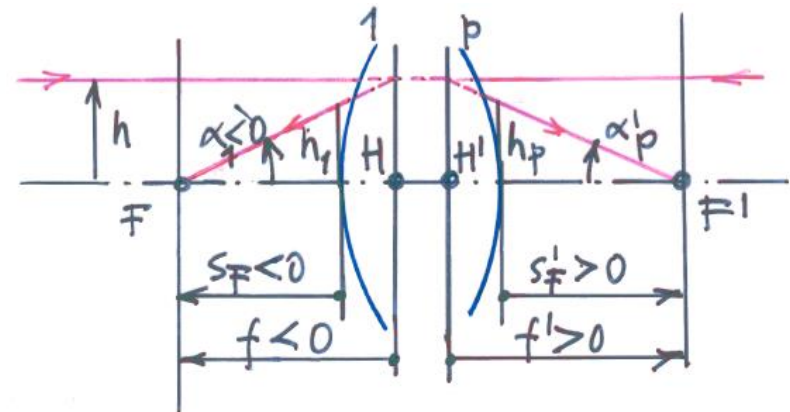


Zdroj: <http://webfyzika.fsv.cvut.cz/>

$$s'_f = \frac{h_2}{\alpha_3} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{h_1}{\alpha_3} = \frac{h_1 \left(1 - \frac{n_2 - n_1}{n_2 r_1} d \right)}{h_1} f' = f' \left(1 - \frac{n_2 - n_1}{n_2 r_1} d \right)$$

Sečná vzdálenost předmětového ohniska:

$$s_f = \frac{h_1}{\alpha_1} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{h_2}{\alpha_1} = f \frac{h_1}{h_2} = f \left(1 - \frac{n_3 - n_2}{n_2 r_2} d \right)$$

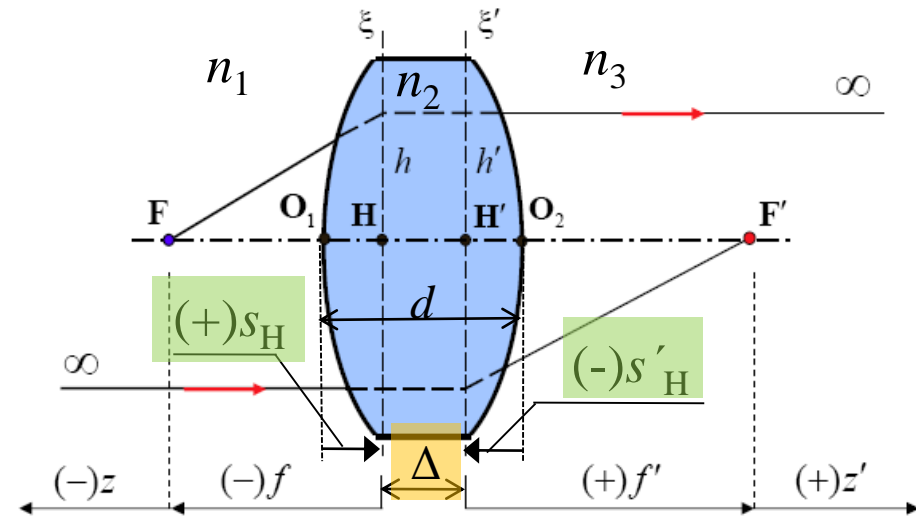


Optické zobrazení - Zobrazení centrovanou soustavou dvou kulových ploch

Vzdálenost hlavních bodů od vrcholů ploch:

$$s'_H = s'_F - f' = -f' \frac{n_2 - n_1}{n_2 r_1} d,$$

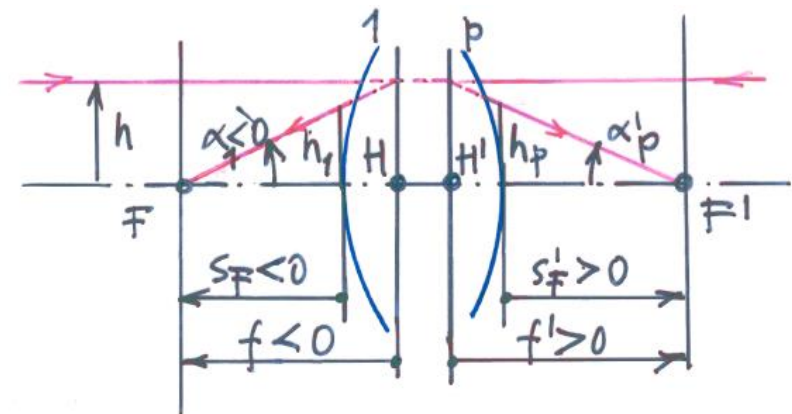
$$s_H = s_F - f = -f \frac{n_1}{n_3} \cdot \frac{n_2 - n_3}{n_2 r_2} d.$$



Zdroj: <http://webfyzika.fsv.cvut.cz/>

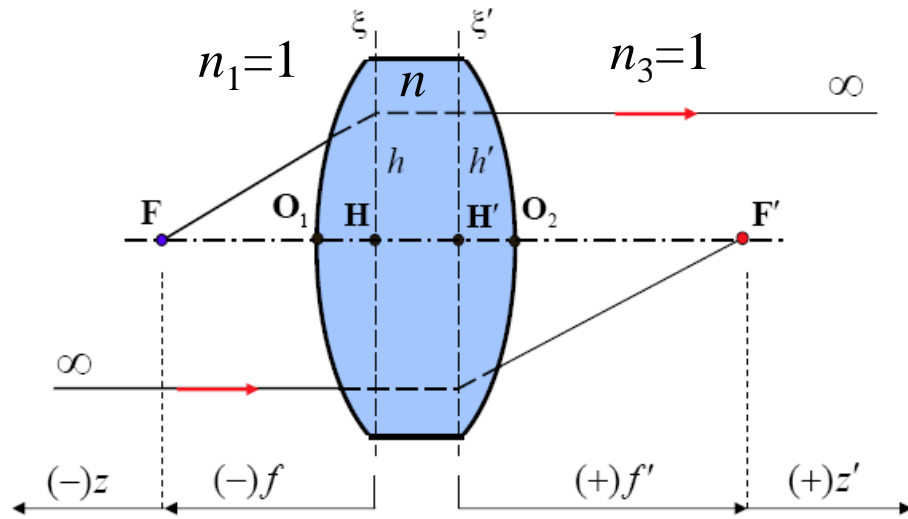
Vzdálenosti mezi hlavními rovinami:

$$\begin{aligned} \Delta_H &= d + s'_H - s_H = \\ &= \left[1 - \frac{f'}{n_2} \left(\frac{n_2 - n_1}{r_1} - \frac{n_1}{n_3} \cdot \frac{n_2 - n_3}{r_2} \right) \right] d. \end{aligned}$$



Optické zobrazení

Čočka ve vzduchu ($n_1=n_3=1$, $n_2=n$)



Zdroj: <http://webfyzika.fsv.cvut.cz/>

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2}{nr_1r_2} d;$$

$$\frac{1}{f} = (1-n) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \frac{(n-1)^2}{nr_1r_2} d;$$

$$f = -f';$$

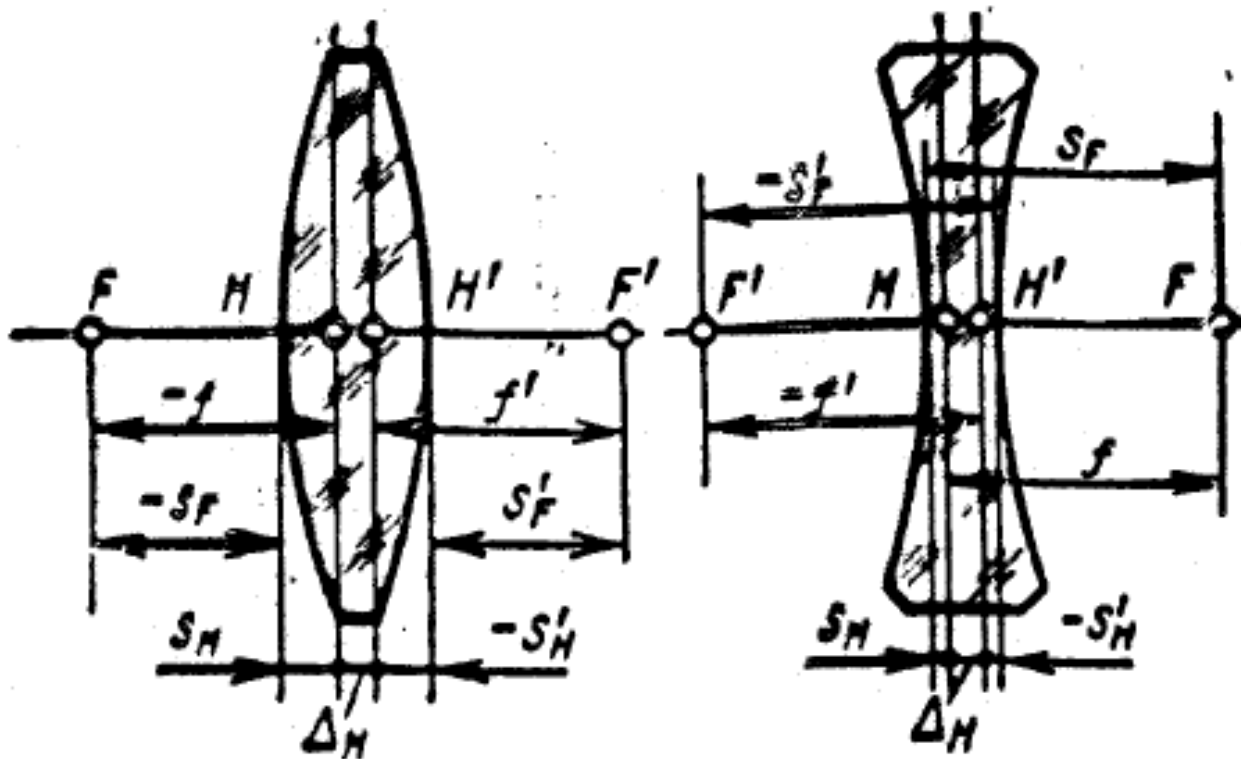
$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1\Phi_2 \frac{d}{n};$$

$$s'_F = f' \left(1 - \frac{n-1}{nr_1} d \right); \quad s_F = -f' \left(1 + \frac{n-1}{nr_2} d \right);$$

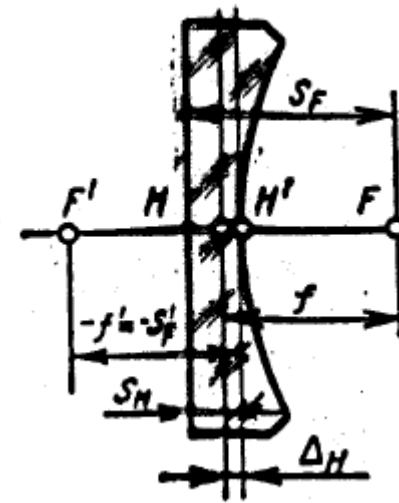
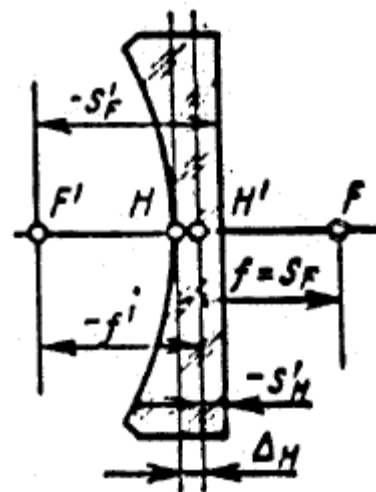
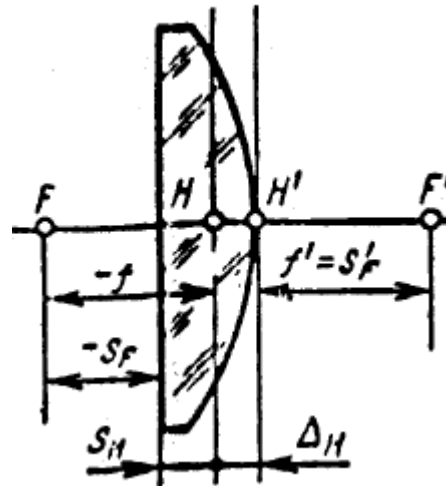
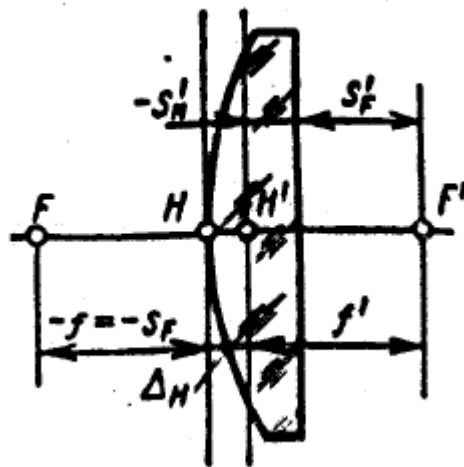
$$s'_H = -f' \frac{n-1}{nr_1} d; \quad s_H = -f' \frac{n-1}{nr_2} d;$$

$$\Delta_H = \left[1 - \frac{f'}{n} (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right] d.$$

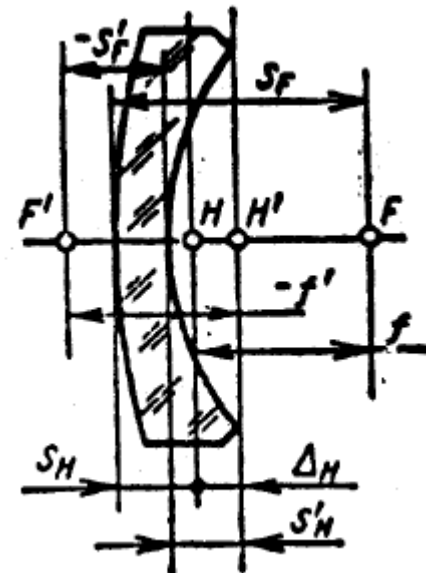
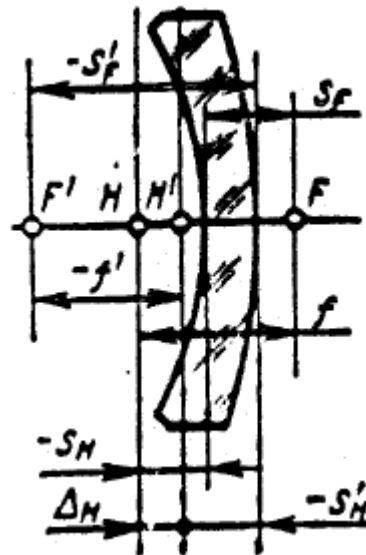
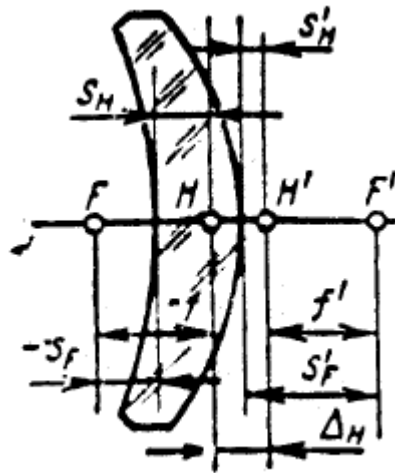
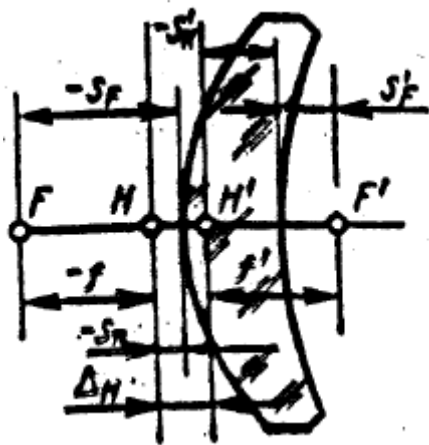
Optické zobrazení - čočky



Optické zobrazení - čočky



Optické zobrazení - čočky



Optické zobrazení – tenká čočka

Prvotní návrh optických soustav – pomocí tenkých čoček ($d = 0$)

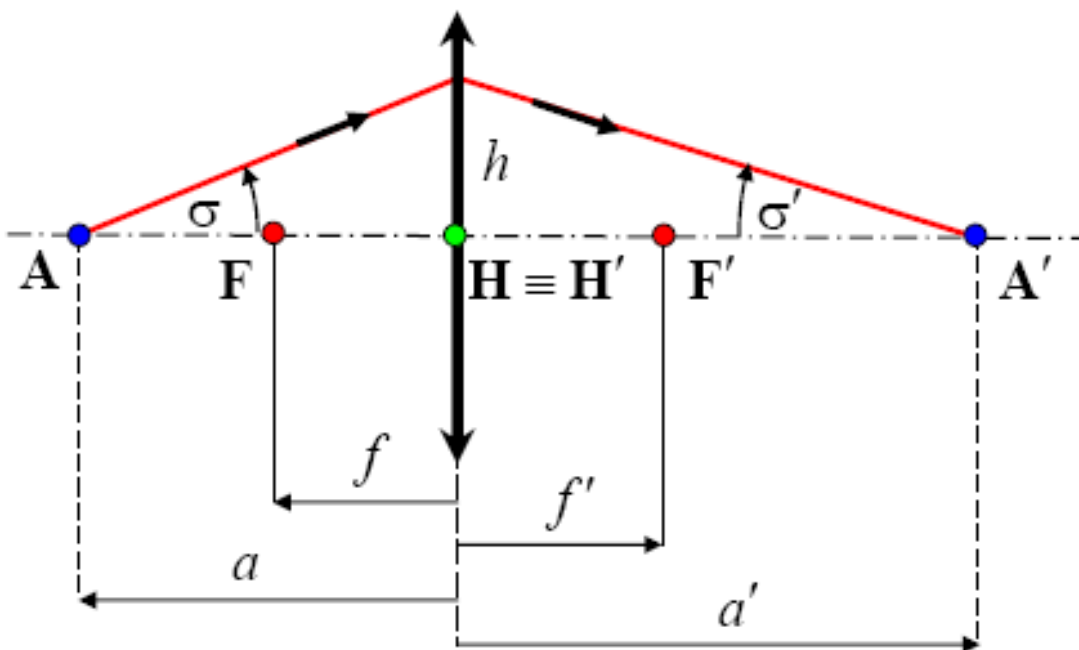
$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'} = \varphi \quad \longrightarrow \quad a' = \frac{a f'}{a + f'}$$

$$\sigma' - \sigma = \frac{h}{f'} = h\varphi \quad m = \frac{a'}{a} = \frac{\sigma}{\sigma'}$$

$$\varphi = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$s'_{H'} = s_H = \Delta_H = 0$$

$$s'_{F'} = -s_F = f'$$



$$f' = -f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)}$$

**ohnisková vzdálenost
tenké čočky**

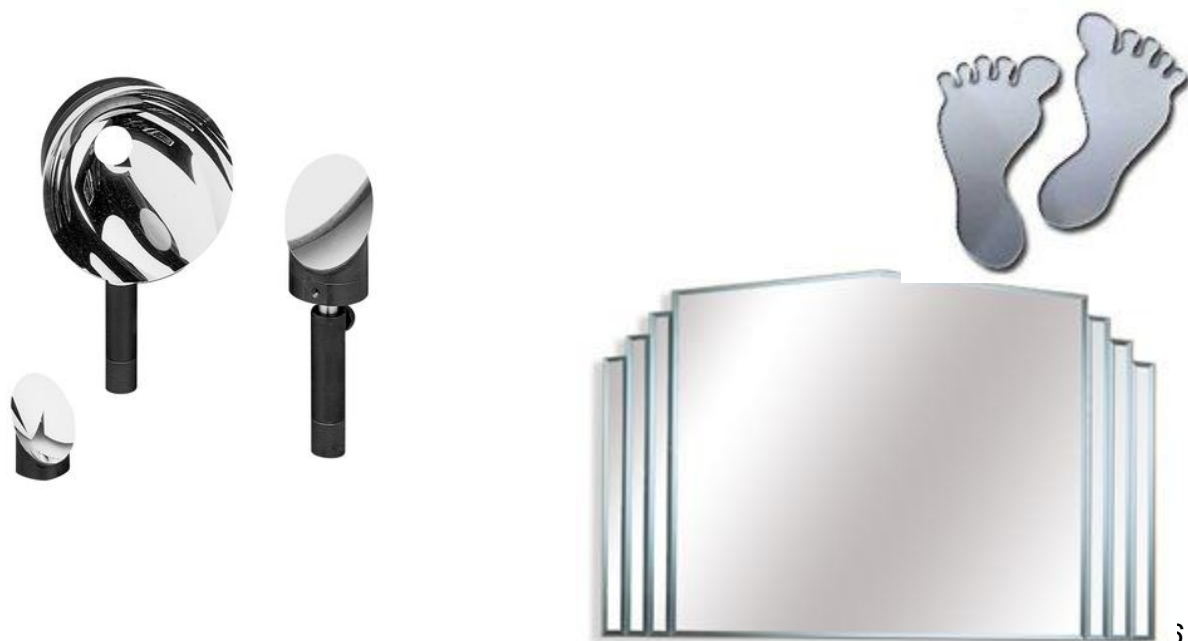
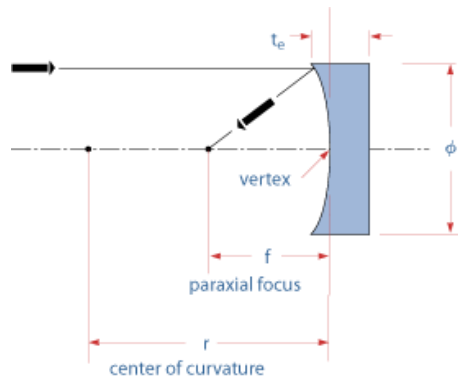
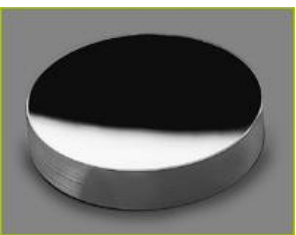
Optické zobrazení - Zrcadla

Výhody (ve srovnání s čočkami):

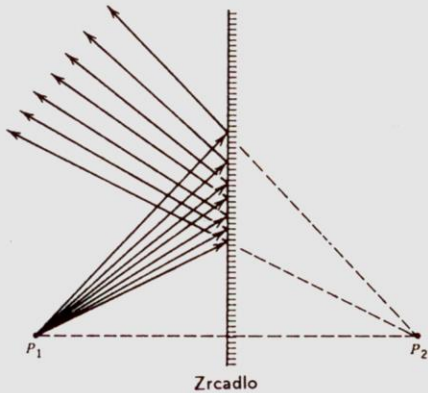
- zrcadla nemají barevné vady,
- lze jich použít v spektrálních oblastech, kde optická skla a jiné krystalické látky nejsou propustné,
- většinou jejich výroba je cenově výhodnější než čoček stejného průměru.

Druhy zrcadel:

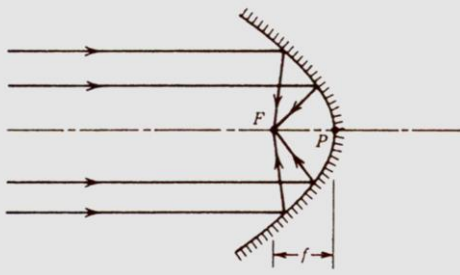
- **zrcadla kulová**, neboli **sférická**, (zvláštní případ pro $r \rightarrow \infty$, je **zrcadlo rovinné**).
- zrcadla nekulová, neboli **asférická** (paraboloidická, elipsoidická atd.)



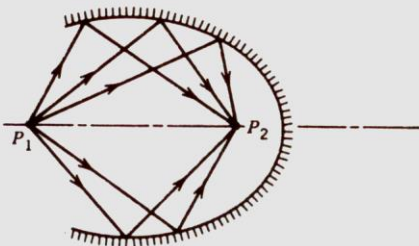
Jednoduché optické prvky – Zrcadla - opakování



- **Rovinná zrcadla** odráží paprsky vycházející z bodu P_1 tak, že odražené paprsky jeví jako vycházející z bodu P_2 , který leží za zrcadlem a nazývá se obraz.



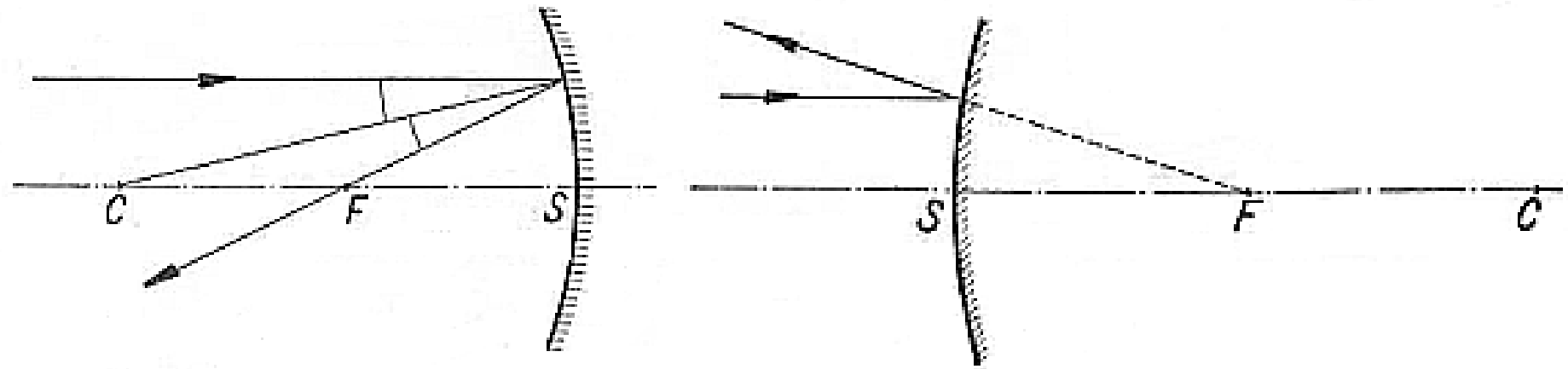
- **Parabolická zrcadla** soustřeďují všechny paprsky dopadající rovnoběžně s osou paraboloidu do jediného bodu zvané **ohnisko**. Vzdálenost $|PF| = f$ se nazývá **ohnisková vzdálenost**. (kolektory/reflektory světla)



- **Eliptická zrcadla** odrážejí všechny paprsky z jednoho z jeho dvou ohnisek (např. P_1) a zobrazují toto ohnisko do druhého ohniska. Vzdálenosti které světlo proběhne z bodu P_1 do bodu P_2 podle kterékoli dráhy, jsou v souladu s Heroovým principem stejné.

Optické zobrazení - Sférické zrcadlo

- Má podobné zobrazovací vlastnosti jako tenká čočka nebo jedna lámavá plocha.
- Odraz paprsku rovnoběžného s osou na konkávním a konvexním zrcadle:



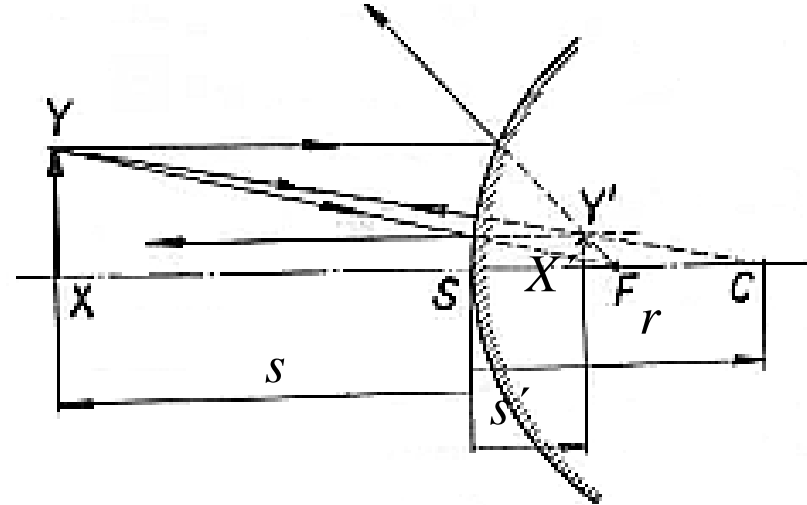
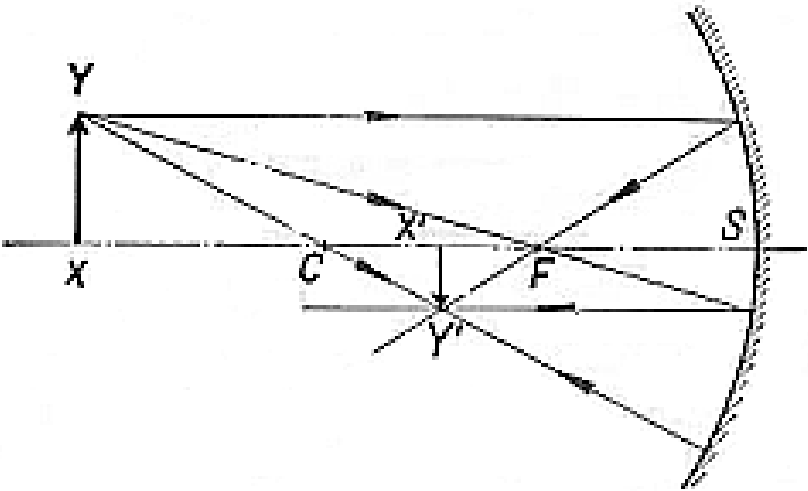
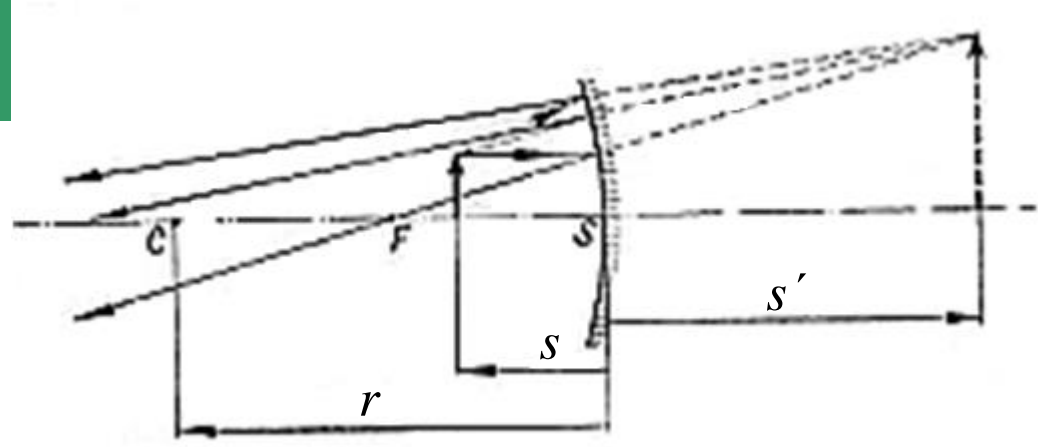
- Platí zákon odrazu (jednodušší výpočet).
- Pro paraxiální paprsky:

$$f = \overline{FS} = \frac{1}{2} \overline{CS}, \text{ nebo } f = -\frac{1}{2} r;$$

- Ohnisková vzdálenost dutého (konkávního) zrcadla je kladná (chová se jako spojná čočka).
- Ohnisková vzdálenost vypuklého (konvexního) zrcadla je záporná.

Optické zobrazení - Sférické zrcadlo, vytvoření obrazu

- Vytvoření obrazu dutým zrcadlem:



Pro paraxiální paprsky platí (vrcholová zobrazovací rovnice zrcadla):

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r};$$

$$s' = \frac{rs}{2s - r}.$$

Příklad:

$$s = -30,$$

$$r = -20$$

$$\Rightarrow s' = -15.$$

Předmětová / obraz. ohnisková vzdálenost:

$$s = f, s' \rightarrow \infty, f = -\frac{r}{2};$$

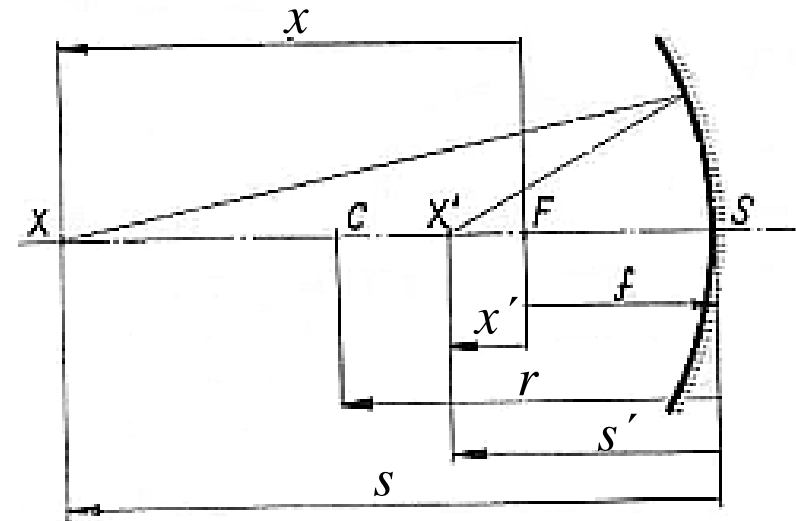
$$s \rightarrow \infty, s' = f', f' = -\frac{r}{2}.$$

Optické zobrazení - Sférické zrcadlo, vytvoření obrazu

- Obě ohniskové vzdálenosti (předmětová, obrazová) jsou stejné.
- Předmětové i obrazové ohnisko splývá s bodem, který půlí vzdálenost mezi vrcholem a středem.
- Hlavní body splývají s vrcholem S a uzlové se středem křivosti C .
- Duté zrcadlo ($r < 0$) má spojné účinky, jeho optická mohutnost

$$\Phi = \frac{1}{f'} = \frac{-2}{r}.$$

Optické zobrazení - Sférické zrcadlo, zobrazovací rovnice



- Platí podobné zobrazovací rovnice jak v případě lámavých ploch:

$$s = x - f, \quad s' = x' - f;$$

dosažením do $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r}$, vychází:

$$\frac{1}{x' - f} + \frac{1}{x - f} = \frac{2}{r}$$

$$= -\frac{1}{f};$$

po úpravě:

$$xx' = f^2.$$

- Pro příčné zvětšení platí:

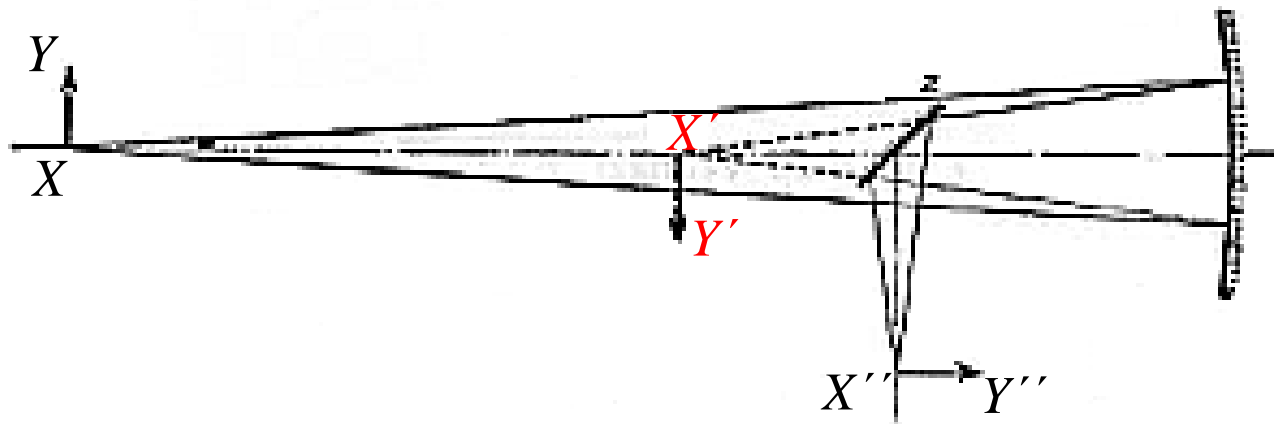
$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}.$$

Poloha předmětu	Poloha obrazu	Obraz
mezi $+\infty$ a C $2f \leq s \leq +\infty$	mezi F a C $f \leq s' \leq 2f$	reálný, převrácený, zmenšený $0 \leq \beta \leq -1$
v C $s = 2f$	v C $s' = 2f$	reálný, převrácený, stejně veliký $\beta = -1$
mezi C a F $f \leq s \leq 2f$	mezi C a $+\infty$ $2f \leq s' \leq +\infty$	reálný, převrácený, zvětšený $-1 \leq \beta \leq -\infty$
mezi F a S $0 \leq s \leq f$	mezi $-\infty$ a S $0 \leq s' \leq -\infty$	virtuální, vzpřímený, zvětšený $+\infty \leq \beta \leq +1$

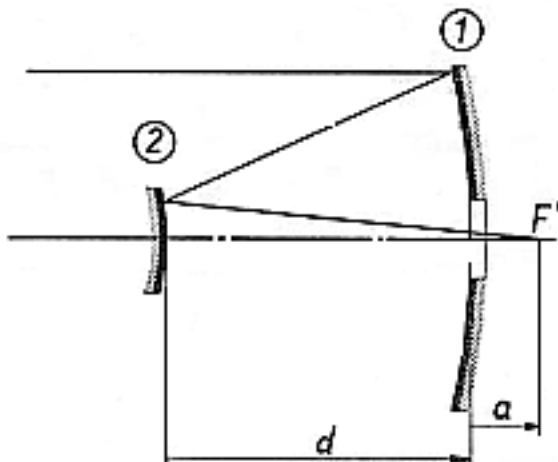
Pozn.: Konvexní zrcadlo dává zmenšený virtuální obraz.

Optické zobrazení - Soustava dvou zrcadel

- Zobrazení jedním zrcadlem je často nevýhodné kvůli tomu, že skuteční obraz se vytváří na téže straně zrcadla, jako je předmět, což stěžuje pozorování tohoto obrazu. Výhodnější polohu obrazu můžeme dosáhnout použitím dvou zrcadel.



Použití rovinného zrcadla z.



Výhodnější je použít **centrované soustavy dvou zrcadel**, z nichž jedno musí být opatřeno otvorem. Tím se dosáhne toho, že **skuteční obraz se vytvoří v témž směru v jakém postupuje světlo od předmětu**, tj. stejným způsobem, jak tomu bylo při zobrazování čočkami.

U této soustavy je třeba znát **polohu obrazového ohniska a ohniskovou vzdálenost**, určíme je stejným postupem jako u soustavy dvou čoček.

Optické zobrazení - Soustava dvou zrcadel – příklad využití

Reflexní objektivy – konfigurace Schwarzschild

