



# GEOMETRICKÁ OPTIKA II

*Přednáška - Úvodní*

# Obsah

- Informace o kurzu  
Osnova kurzu.  
Podmínky k získání zápočtu a ke zkoušce.
- Opakování.

# Úvod



**Každý umělec potřebuje k tomu, aby začal pracovat na novém díle, určitý podnět. U mě to jsou zpravidla dluhy.**

*/Federico Fellini/*

# Vyučující

- Přednášky

prof. Ing. Jozef Kaiser, Ph.D.

Ústav fyzikálního inženýrství

A2-2.NP, kancelář 204

Tel.: 5 4114 2846

e-mail: [kaiser@fme.vutbr.cz](mailto:kaiser@fme.vutbr.cz)

Konzultační hodiny: středa 15.00 – 16.00 (po předchozí domluvě)

- Cvičení

Ing. Jan Novotný, Ph.D.

Ústav fyzikálního inženýrství

A2-5.NP, kancelář 519c

Tel.: 5 4114 2828

e-mail: [novotny.j@fme.vutbr.cz](mailto:novotny.j@fme.vutbr.cz)

Konzultační hodiny: úterý 10.00 – 11.00 (po předchozí domluvě)

# Osnova kurzu

- Geometrická optika – 1. semestr, 1/2

1. Zákony geometrické optiky, index lomu prostředí, index lomu vzduchu, vzájemné vztahy. Fermatův princip, odvození zákona lomu a odrazu z tohoto principu.
2. Disperze, Abbéovo číslo, katalogy optických materiálů.
3. Planparalelní destička, hranol pro lom.
4. Minimální deviace, použití, optický klín.
5. Zobrazení kulovou plochou obecně a v paraxiálním prostoru.
6. Základní body jedné kulové plochy.
7. Zobrazení soustavou kulových ploch, polohy základních bodů soustavy, ohniskové vzdálenosti.
8. Zobrazovací rovnice (pro paraxiální prostor).
9. Zobrazení čočkou tenkou, reálné zobrazení čočkou tlustou.
10. Zobrazení soustavou čoček.
11. Omezení paprskových svazků v optické soustavě.
12. Maticová optika
13. Stručné zopakování probrané látky.
14. Písemný test.

# Osnova kurzu

- Geometrická optika – 2. semestr, 2/2

1. Zobrazení soustavou čoček.

2. Omezení paprskových svazků v optické soustavě.

3. Zobrazení zrcadly. Soustava sférických zrcadel.

4. Telecentrický chod hlavních paprsků, paralaxa. Zobrazení bodů prostoru v jedné rovině s tolerovanou neostrotí.

5. Optické vady optických soustav, rozdělení, definice.

6. Podélná otvorová vada.

7. Způsoby korekce podélné otvorové vady.

8. Zkreslení, lom paprsku blízkého paprsku hlavnímu.

9. Sklenuť, astigmatismus.

10. Koma.

11. Abbeovy podmínky, aplanasie, isoplanasie.

12. Vady barevné, obecně, rozdělení.

13. Maticová optika

# Hodnocení kurzu

- Podmínky k udělení zápočtu
  1. Aktivní účast na cvičeních. Tolerují se maximálně **2** absence (ve výjimečných případech náhrada možná při domluvě se cvičícím).
  2. Získání **50%** bodů ze dvou povinných písmenek (v odůvodněných případech možnost získat chybějící body na zápočet vypracováním speciálních úkolů po domluvě se cvičícím).
- Podmínky pro získání zkoušky
  1. Písemný test s otázkami s výběrem odpovědí a úlohami, sestavený z učiva probíraného na přednáškách a cvičeních.
  2. Při úspěšném zvládnutí testu postup do druhého kola – **ústní zkouška**.
  3. Výsledné hodnocení se skládá z hodnocení ze **cvičení (30 %)** a **zkoušky (70 %)**.

# 1. Úvod

- Elektromagnetické vlnění (světlo) se většinou charakterizuje buď frekvencí ( $f$ ) nebo vlnovou délkou ( $\lambda$ ). Platí  $f = \frac{c}{\lambda}$ ,  
kde  $c$  je rychlost světla (v daném prostředí).
- Světlo má částicovou i vlnovou povahu (je emitováno ve formě jednotlivých světlených balíčků – kvant které se nazývají fotony). Energie fotonu je definován jako:  $E = hf$ , kde  $h$  je Planckova konstanta.
- Po dosažení dostaneme:  $E = \frac{hc}{\lambda}$ , tzn. že energie fotonu s kratší vlnovou délkou roste.

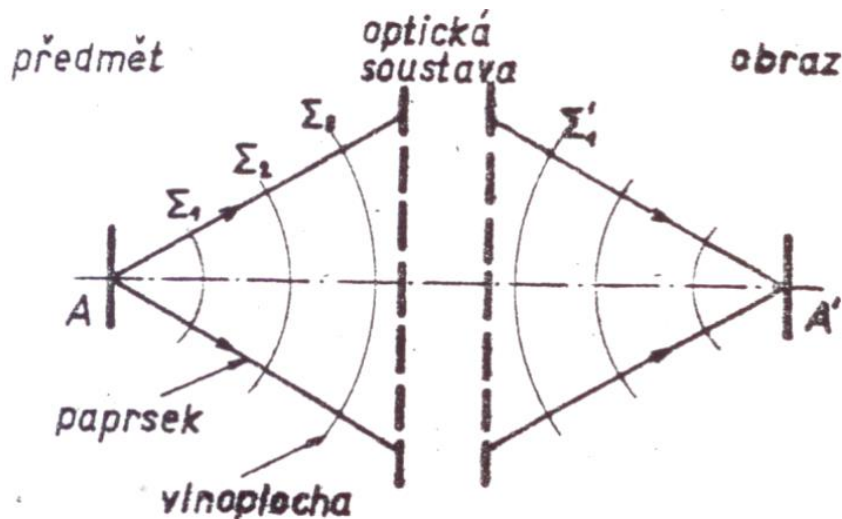
To je jeden z důvodů, proč obecně absorpce záření s kratší vlnovou délkou poškozuje živou tkáň víc než záření s delší vlnovou délkou .  
Například vývin šedého zákalu a zhoubného kožního nádoru může být podporován nepříznivým vlivem krátkovlnného ultrafialového (UV) záření.



# Definice základních pojmů

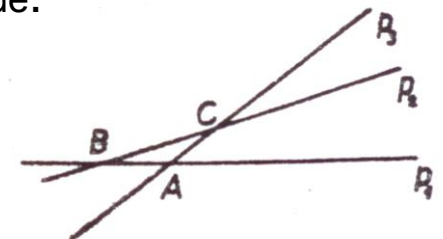
- EM Teorie – světlo se šíří od zdroje jako příčné elektromagnetické vlny podél čar, kolmých na vlnoplochu. Tyto čáry nazýváme světelnými paprsky.
- V transparentním ale nehomogenním prostředí jsou paprsky zakřiveny (zemská atmosféra).
- V anizotropních\* prostředí (většina krystalů) není směr paprsků vždy kolmý k vlnoplochám.
- V homogenních, isotropních látkách, jakých se používá k výrobě optických prvků jsou paprsky přímkami, které sice na rozhraní dvou prostředí mohou náhle změnit směr šíření, ale zůstávají dále přímkami.

\* Anizotropie je vlastnost, kterou se označuje závislost určité veličiny na volbě směru. Opakem anizotropie je izotropie.



**Svazek paprsků** – soubor světelných paprsků kolmých k vlnoploše a vyplňujících určitou její část.

**Homocentrický svazek** – kužel paprsků které se protínají v jediném bodě.

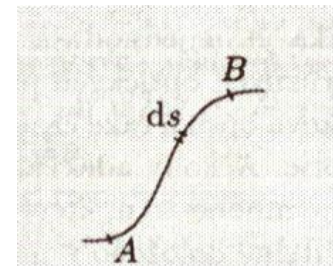


# Paprsková (geometrická) optika - POSTULÁTY

- Světlo se šíří ve formě paprsků. Paprsky jsou emitovány světelnými zdroji a mohou být pozorovány, když dosáhnou optického detektoru.
- Optické prostředí je charakterizováno veličinou  $n \geq 1$ , která se nazývá (absolutní) **index lomu**. Je **poměrem** rychlosti světla ve vakuu  $c_0$  a rychlosti světla v prostředí  $c$ . V důsledku toho **čas**, který světlo potřebuje, aby prošlo vzdálenost  $d$ , se rovná  $d/c = nd/c_0$ . Je tedy **úměrné** součinu  $nd$ , známému jako **délka optické dráhy**.
- V nehomogenním prostředí je index lomu  $n(\mathbf{r})$  funkcí polohy  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ .

Délka optické dráhy mezi dvěma body  $A$  a  $B$  je tedy

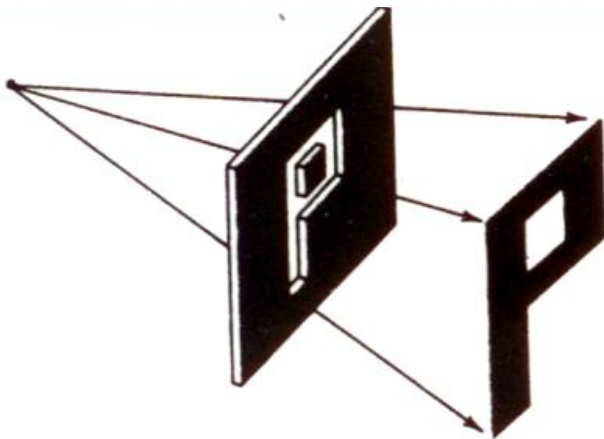
$$\text{délka optické dráhy} = \int_A^B n(\vec{r}) ds, \quad \text{kde}$$



$ds$  je diferenční element délky podél dráhy. **Čas** potřebný k tomu aby světlo prošlo z  $A$  do  $B$  je **úměrný délce optické dráhy**.

# Šíření v homogenním prostředí

- Homogenní prostředí  $\rightarrow$  index lomu  $n$  je všude stejný, stejně jako rychlost světla.
- Dráha s minimálním časem (Fermatův princip) je proto dráhou s minimální vzdáleností.
- Dráha s minimální vzdáleností mezi dvěma body je přímka (Heroův princip), takže **v homogenním prostředí paprsky šíří přímočaře.**

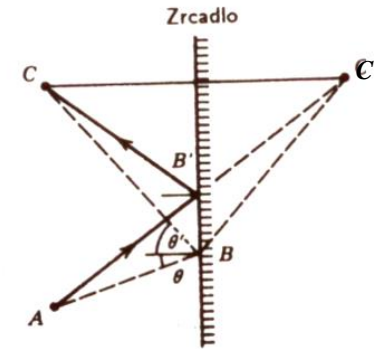
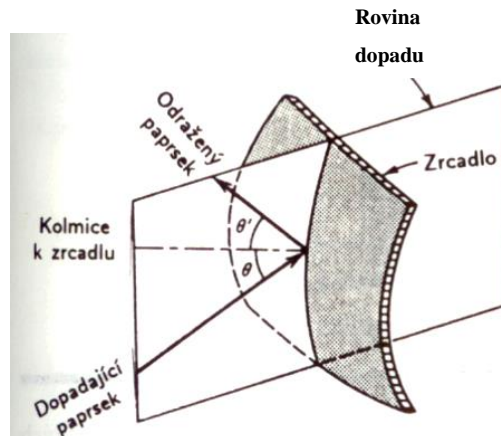


- Světelné paprsky se šíří přímočaře. Stíny jsou dokonalými průměty překážek.

# Odraz od zrcadla

- Světlo se od zrcadel odráží tak, že splňuje zákon odrazu:

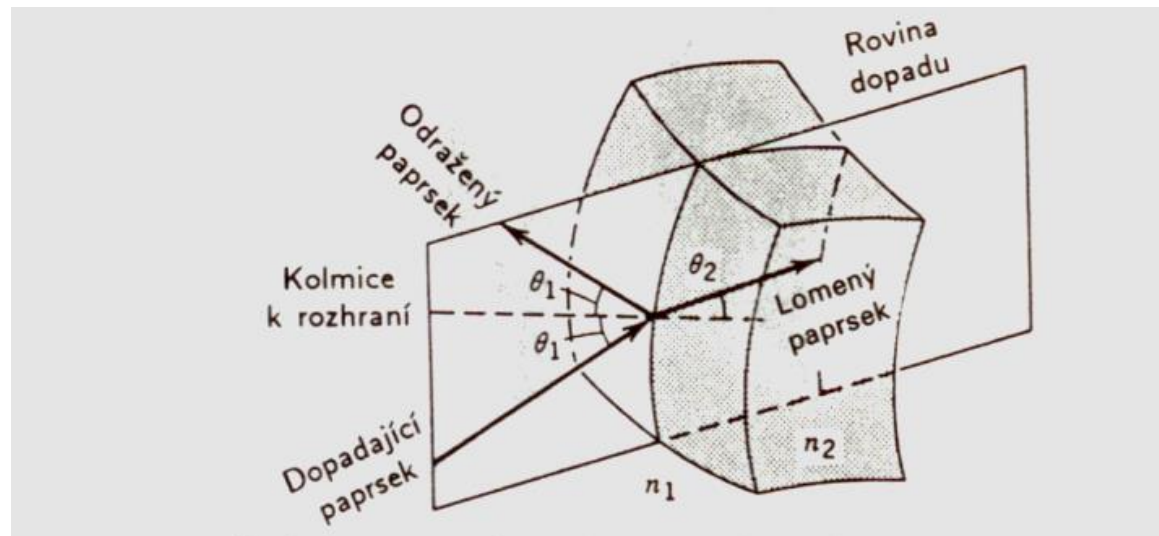
**Odražený paprsek leží v rovině dopadu; úhel odrazu se rovná úhlu dopadu.**



- Důkaz: Zkoumejme paprsek který se šíří z bodu  $A$  do bodu  $C$  po odrazu od rovinného zrcadla. Podle Heroova principu musí být vzdálenost  $|AB| + |BC|$  minimální. Je-li  $C'$  zrcadlový obraz  $C$ , pak  $|BC| = |BC'|$ , takže  $|AB| + |BC'|$  musí být minimální. To nastane, když je  $ABC'$  přímka, tj. když  $B$  je totožné s  $B'$  a  $\theta = \theta'$ .

# Odraz a lom na rozhraní dvou prostředí

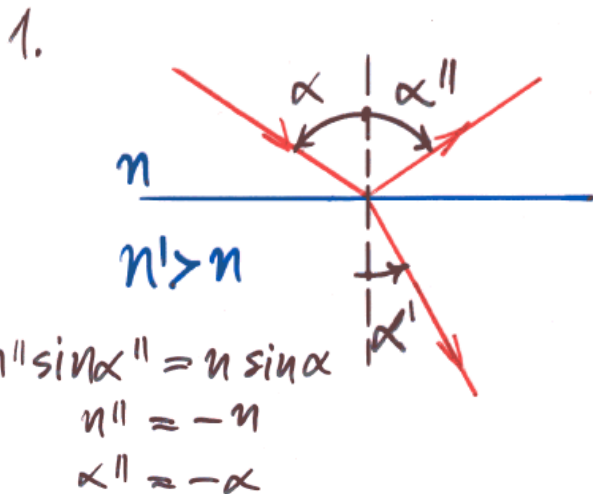
- Na rozhraní mezi dvěma prostředími o indexech lomu  $n_1$  a  $n_2$  se dopadající paprsek štěpí na dva – odražený paprsek a lomený (nebo procházející) paprsek.



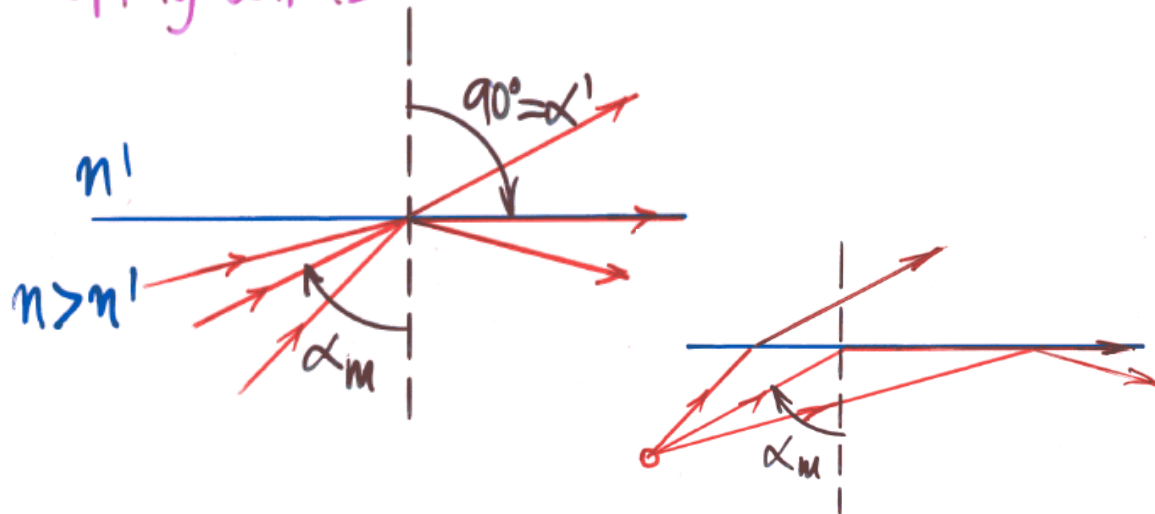
- Odražený paprsek splňuje zákon odrazu. Lomený paprsek splňuje zákon lomu: **Lomený paprsek leží v rovině dopadu; úhel lomu  $\theta_2$  se vztahuje k úhlu dopadu Snellovým zákonem.**
- Snellův zákon: 
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

# Úplný odraz

## ODRAZ SVĚTLA



## 2. Úplný odraz



- Pro vnitřní lom ( $n > n'$ ) je úhel lomu větší než úhel dopadu ( $\alpha' > \alpha$ ), takže růstem  $\alpha$  dosáhne hodnoty  $90^\circ$  jako první  $\alpha'$ . To nastane pro **mezní úhel**  $\alpha_m$ , pro který ze Snellova zákona plyne:

$$n \sin \alpha_m = n' \sin 90^\circ,$$

$$\sin \alpha_m = \frac{n'}{n}.$$

Příklad: Pro  $n = 1,5$  (sklo) a  $n' = 1$  je mezní úhel  $\alpha_m = 42^\circ$ .

# Odraz při lomu

- Světlo, dopadající na vyleštěnou plochu jakéhokoliv průhledného prostředí se nejen láme, ale zčásti též odráží. Úlohu, jaká část dopadajícího světla se láme a jaká se odráží, řešil první Fresnel.

- Odrazivost (reflektivita):  $R = \frac{\text{intenzita odraženého světla}}{\text{intenzita dopadajícího světla}}$

- Propustnost (transmissivita):  $T = \frac{\text{intenzita lomeného světla}}{\text{intenzita dopadajícího světla}}$

- Ze zákona zachování energie platí:  $T + R = 1$

- Koeficient odrazivosti od hladkého rozhraní dvou prostředí se určí z Fresnelových vztahů, které vedou ke vzorci:

$$R = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin^2(\alpha - \alpha')}{\sin^2(\alpha + \alpha')} + \frac{\text{tg}^2(\alpha - \alpha')}{\text{tg}^2(\alpha + \alpha')} \right]$$



Francouzský fyzik Augustin-Jean Fresnel (1788 – 1827); významně přispěl ke vzniku vlnové teorie světla. Šíření světla studoval jak teoreticky, tak i experimentálně.  
Zdroj: <http://en.wikipedia.org/>

## 2. Zdroje (monochromatického) záření

- Zdroje viditelného záření dělíme na:
  - zdroje tepelné (např. žárovky),
  - zdroje výbojové (průchod elektřiny v plynech)
  - luminiscenční
  
- Lasery



# Zdroje tepelné

- Žárovky – výhody:
  - vysoce automatizovaná výroba,
  - vynikající podání barev ( $R_a = 100$ ),
  - možnost přímého napájení z elektrovedné sítě,
  - absence zdraví škodlivých látek.
- Žárovky – nevýhody:
  - nízká účinnost a měrný výkon (kolem 10-15 lm/W)
  - krátká životnost,
  - pokles světelného toku v průběhu života,
  - a závislost parametrů na napájecím napětím.

Pozn.:

Problém krátkého života žárovky se u halogenové žárovky řeší příměsí halogenu, (např. methylenbromid). V žárovce probíhá tzv. halogenový cyklus, kde se při vysoké teplotě vypařující wolfram slučuje a rozpadá např. s bromem. Díky tenzi wolframových par v blízkosti vlákna se omezuje jeho vypařování. Výsledkem je vyšší život a zvýšení světelného toku (měrný výkon až 20 lm/W). U halogenových žárovek je použito křemenné sklo kvůli značně vyšším teplotám (min. 250°C). Problém s UV zářením. Z **tepelných zdrojů monochromatického záření** se asi nejvíc využíval sodíkový (589,0 nm 589,6 nm) a draslíkový (766,5 nm a 769,9 nm) plamen (Bezbarvý Bunsenův plamen, asi 1800 °C, soli různých kovů do něho přidané jej zbarví). 17



Robert Wilhelm  
Eberhard von  
Bunsen  
1811 - 1899



Zdroj:  
<http://www.jergym.hi.edu.cz/~canovm/objevite/objev2/bun.htm>

# Zdroje výbojové

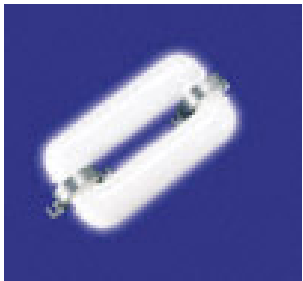
- Průchod elektriny v plynech
  - oblouk v atmosféře plynu nebo páry kovu,
  - využívají přeměny elektrické energie na kinetickou energii elektronů pohybujících se rychle mezi elektrodami,
  - při srážkách elektronů s atomy plynů kovových par se jejich energie mění na optické záření,
  - spektrum záření je čárové, rozložení spektrálních čar závisí na druhu výboje i na složení a tlaku plynné náplně.
    - nízkotlaké (např. zářivky, nízkotlaké sodíkové výbojky)
    - vysokotlaké (např. vysokotlaké rtuťové či sodíkové výbojky).

| Prvek        | Vlnové délky emitovaného světla v nm<br>(nejintenzivnější čáry) |       |       |       |       |
|--------------|---|-------|-------|-------|-------|
| Rtuť (Hg)    | 404,7   | 435,8 | 546,1 |       |       |
| Vodík (H)    | 434,6   | 486,1 | 656,3 |       |       |
| Helium (He)  | 438,8   | 492,2 | 587,6 | 657,8 | 706,5 |
| Kadmium (Cd) | 480,0   | 508,6 | 643,8 |       |       |

# Zdroje luminiscenční

- Příklad využití

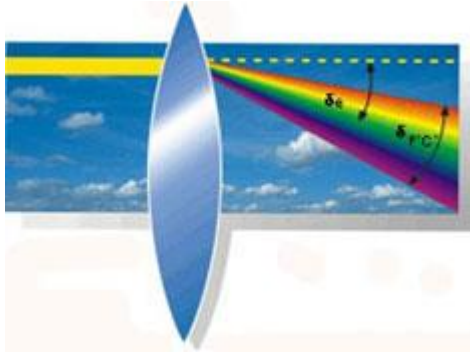
S luminiscencí se setkáváme například u zářivek, které vyzařují světlo, ale jejich povrch je chladný. Zářivka je tvořena trubicí, v níž probíhá výboj v plynu. Zdrojem světla zářivky však není samotný výboj, jehož UV záření je pro lidské oko neviditelné. UV záření dopadá na vrstvu látky, kterou je pokryta vnitřní plocha trubice, a způsobuje její luminiscenci, tj. látka vyzařuje viditelné záření.



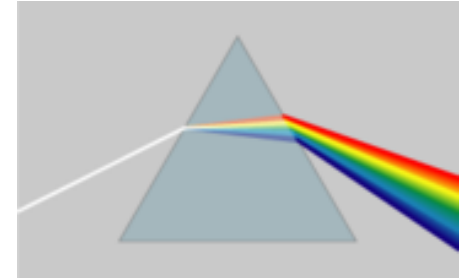
# Lasery

- Od 1960 procházel laser neustálým vývojem. Jednotlivé typy se také postupem času zdokonalovaly a vylepšovaly se jejich parametry.
- Dnes můžeme lasery rozdělit do různých kategorií. Podle materiálů, ze kterých může být získán laserový efekt, jsou to především lasery pevnolátkové, kapalinové a plynové.
- Čerpat energii mohou lasery zejména opticky, elektricky, chemicky nebo termodynamicky.
- Lasery můžeme dělit také podle vyzařované vlnové délky na infračervené, v oblasti viditelného světla, ultrafialové a rentgenové.
- Konečně můžeme lasery dělit podle použití na lasery výzkumné, měřicí, lékařské, technologické, energetické a vojenské.

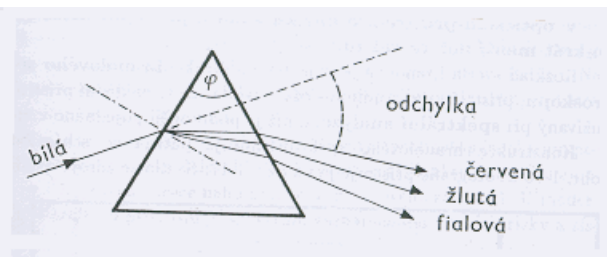
# Disperze



Jestliže se optickými prvky jako jsou čočka nebo hranol prochází bílé světlo, rozkládá se do různých barevných odstínů, protože každá barva se lomí jinak. Tento fenomén je znám jako disperze.



- Disperze vzniká důsledkem závislosti rychlosti světla v látkách na frekvenci světla (rychlost světla se zpravidla s rostoucí frekvencí zmenšuje → ve vakuu k disperzi světla nedochází),
- index lomu optického prostředí závisí na frekvenci světla a při (normální) disperzi se s rostoucí frekvencí zvětšuje,
- disperze dokazuje, že bílé světlo je světlo složené z jednoduchých (barevných) světel.

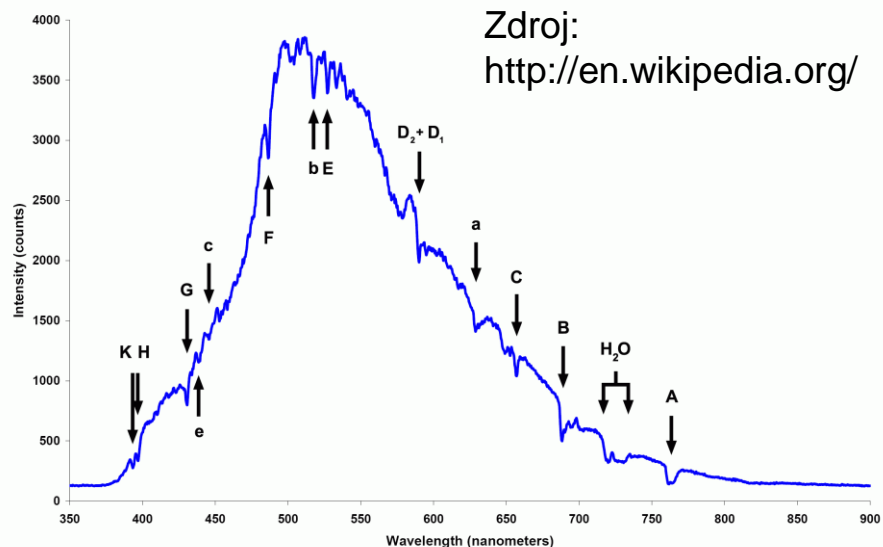


$\varphi$  ... lámavý úhel

na lámavých plochách optického hranolu se světlo láme dvakrát → hranolové spektrum (řada na sebe navazujících barevných proužků)

Bílé světlo se hranolem rozloží na spektrum, v němž jsou zastoupeny všechny barvy odpovídající paprskům monofrekvenčního světla v posloupnosti : červená (nejmenší hodnota indexu lomu), oranžová, žlutá, zelená, modrá, fialová (největší hodnota indexu lomu).

# Fraunhoferovy čáry



| Značka | Vlnová délka v nm | Prvek  |
|--------|-------------------|--------|
| A      | 759,4             | O      |
| B      | 686,7             | O      |
| C      | 656,3             | H      |
| D      | 589,3             | Na     |
| E      | 526,9             | Fe, Ca |
| F      | 486,1             | H      |
| G      | 430,8             | Fe, Ca |
| H      | 396,9             | Ca     |

Chladné páry určitých látek pohlcují ze světla které nimi prochází světelné složky těch vlnových délek, které by (v excitovaném stavu) samy vysílaly. **Fraunhoferovy čáry** jsou absorpční čáry relativně chladných plynů buď v sluneční nebo v zemské atmosféře.

| Barva           | Červená |       | Žlutá |       | Zelená | Modrá |       |       | Fialová |
|-----------------|---------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|---------|
| Značka          | A´      | C     | D     | d     | e      | F     | g     | G´    | h       |
| Prvek           | K       | H     | Na    | He    | Hg     | H     | Hg    | H     | Hg      |
| Vln. délka (nm) | 768,2   | 656,3 | 589,3 | 587,6 | 546,1  | 486,1 | 435,8 | 434,1 | 404,7   |

Obecně, kde není úplného souhlasu s vlnovou délkou Fraunhoferovy čáry, zavádí se označení s čárkou, nebo malé písmeno.

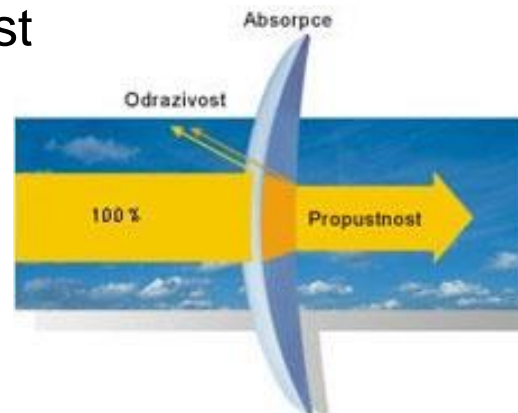
# Charakteristiky optických skel

- Základní materiál prvků optických přístrojů – optické sklo.
- V seznamech optických skel bývají udány indexy lomu pro světla A', C, D e, F, G', h.
- Základní charakteristiky každého optického skla: index lomu  $n_D$  pro sodíkové světlo D (nebo též pro heliové světlo d) a rozdíl indexů lomu:

$$\Delta n = n_F - n_C,$$

tzv. **střední disperze**.

- Odrazivost, absorpce a propustnost



Zdroj:  
<http://www.zeiss.cz/>

# Index lomu prostředí – Abbeovo číslo

- Mimo to udává důležitou charakteristiku skla tzv.

## Abbeovo číslo

$$v = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C},$$

kde  $n_D$ ,  $n_F$  a  $n_C$  je index lomu příslušného materiálu na vlnových délkách odpovídajících Fraunhoferovým čárám D, F a C (tj. 589,2 nm, 486,1 nm a 656,3 nm). Čím je hodnota  $v$  vyšší, tím menší má materiál disperzi a je tedy vhodnější pro použití především pro konstrukci čoček.



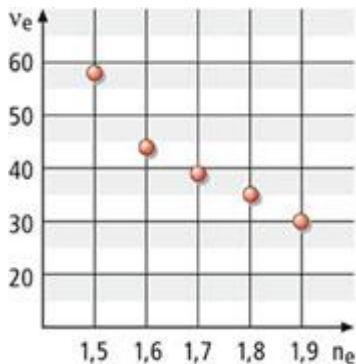
Ernst Karl Abbe, 1840 – 1905, německý fyzik a astronom. Významně přispěl k vzniku teorie optických přístrojů. Konstruoval přístroj Abbeho komparátor.

Zdroj:  
<http://en.wikipedia.org/>

- Poznámka: Abbeovo číslo může být definován

i jako

$$v_e = \frac{n_e - 1}{n_F - n_C} = \frac{\delta_e}{\delta_{FC}}.$$



Čím větší index lomu  $n$ :

- tím vyšší odrazivost,
- tím větší střední disperze,
- tím menší Abbeovo číslo,
- tím nižší propustnost.

Zdroj:  
<http://www.zeiss.cz/>



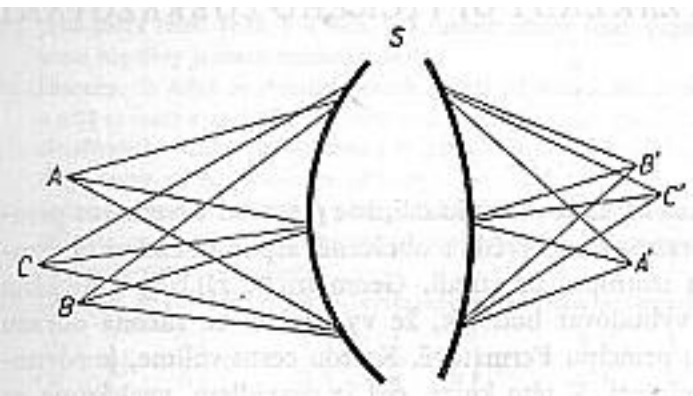
# 3. Obsah

## Reálné optické prvky

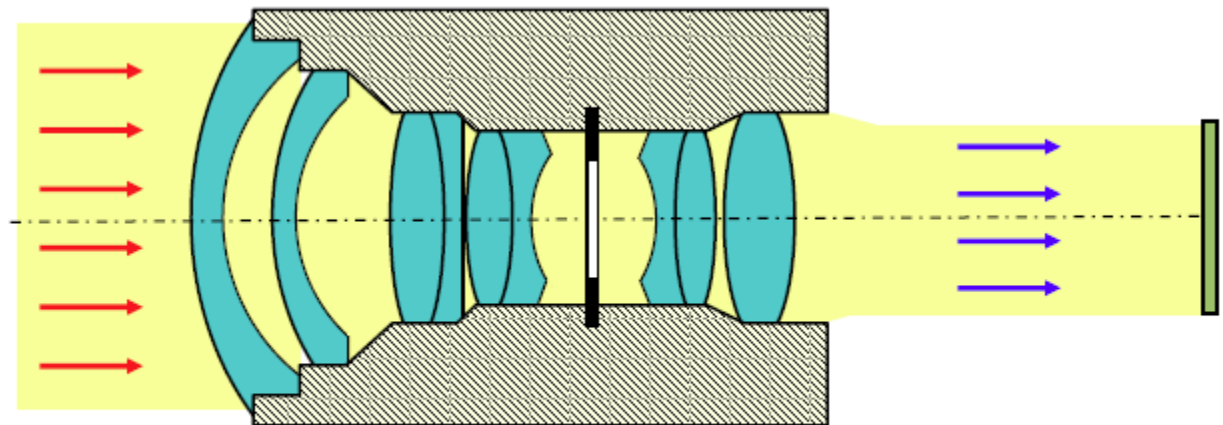
- hranol pro lom,
- minimální deviace,
- optický klín,
- planparalelní destička.

# 4. Optické zobrazování - úvod

- **Optické zobrazování** – úkolem je umožnit viditelnost předmětů na jiném místě, a to buď ve stejné velikosti, nebo zvětšeně (resp. zmenšeně).



Z každého (**předmětového**) bodu A, B, C... svítícího (osvětleného) objektu vychází svazek světelných paprsků. Procházejí-li tyto svazky optickou soustavou S, transformují se na nové svazky s vrcholy A', B', C' ... A', B', C' ... nazýváme **obrazy bodů** A, B, C... a obrazem předmětu je souhrn obrazů jednotlivých bodů předmětu.

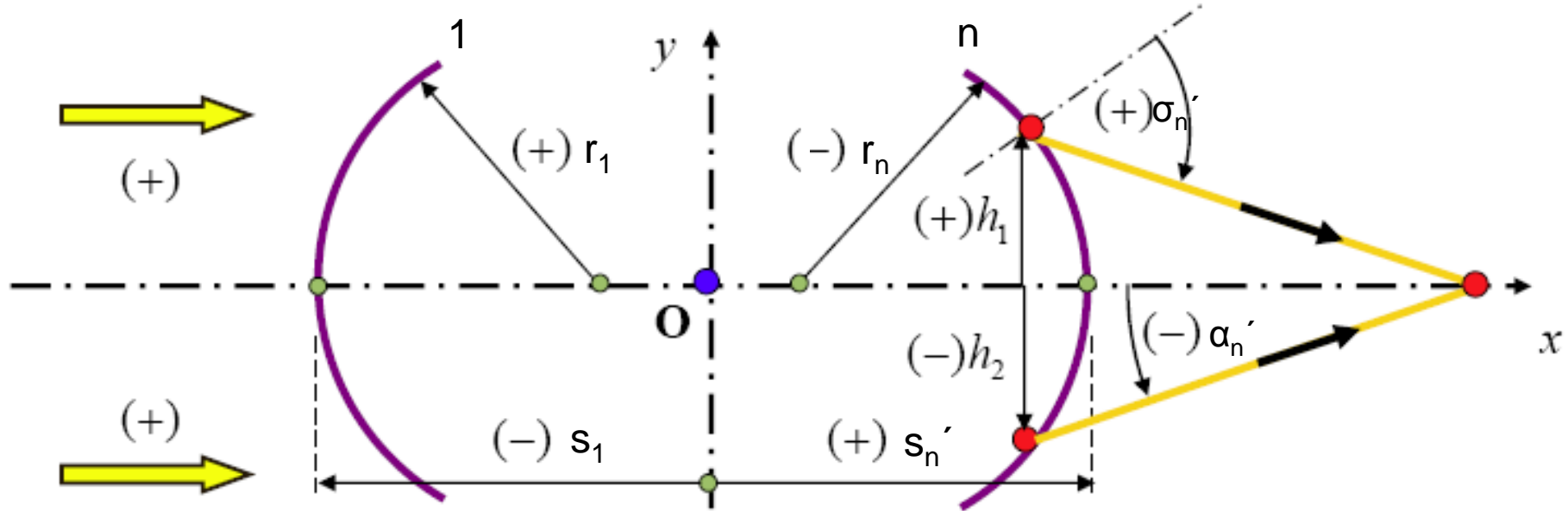


vstupní svazek

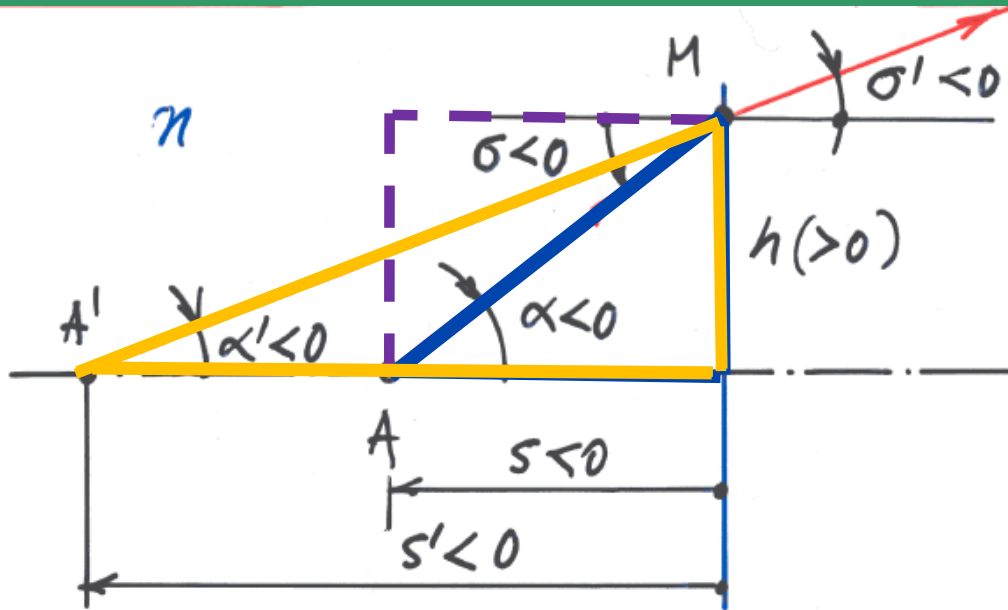
Zdroj: <http://webfyzika.fsv.cvut.cz/>

výstupní svazek

# Optické zobrazení – ZNAMÉNKOVÁ KONVENCE



# Optické zobrazení – Lom paprsků rovinným rozhraním



- (Snellův) zákon lomu:

$$\sin \sigma' = \frac{n}{n'} \sin \sigma.$$

Poněvadž:  $\sigma = \alpha$ ,  $\sigma' = \alpha'$ ,

$$\sin \alpha' = \frac{n}{n'} \sin \alpha.$$

Pro danou polohu s bodu A je dopadová výška:

$$h = s \operatorname{tg} \alpha, \text{ takže } s' = s \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'}.$$

Hodnoty  $\alpha'$  a  $s'$  určují polohu obrazu bodu A, tedy  $A'$ . Z  $\sigma = \alpha$ ,  $\sigma' = \alpha'$ , a z obrázku:

$$\sin \alpha = \sin \sigma = \frac{h}{\sqrt{h^2 + s^2}}, \quad \sin \alpha' = \sin \sigma' = \frac{h}{\sqrt{h^2 + s'^2}}.$$

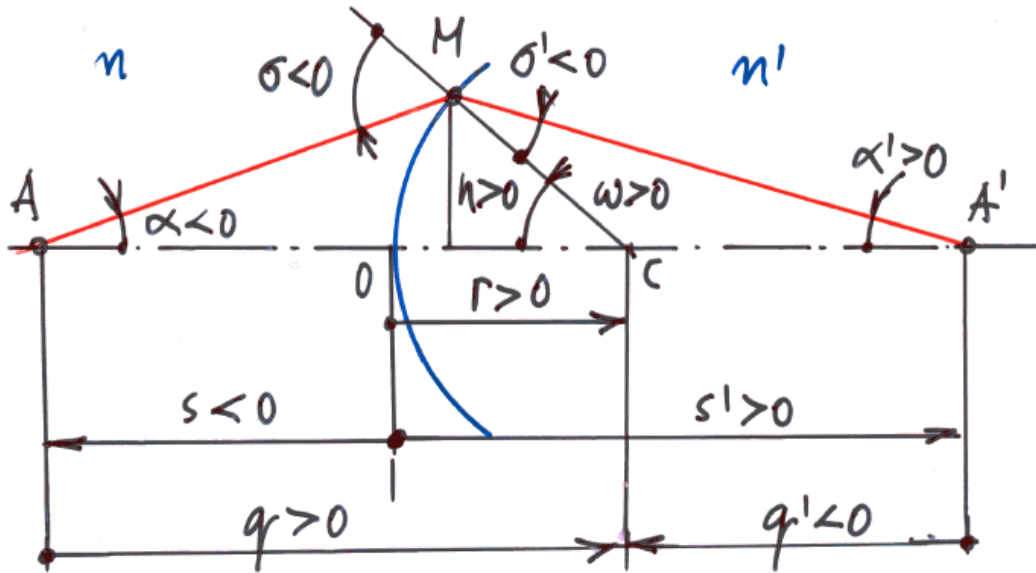
Dosazením do Snellova zákona dostaneme:

$$s' = \frac{n'}{n} \sqrt{s^2 + \left(1 - \frac{n^2}{n'^2}\right) h^2}.$$

\*  $\operatorname{tg} \alpha' = h / s' \Rightarrow s' = h / \operatorname{tg} \alpha' = s \operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \alpha'$

# 5. Optické zobrazení

## Lom paprsků sférickým rozhraním



$$\sin \sigma = \frac{q}{r} \sin \alpha, \quad \sin \sigma' = \frac{n}{n'} \sin \sigma,$$

$$q = r - s, \quad q' = r \frac{\sin \sigma'}{\sin \alpha'},$$

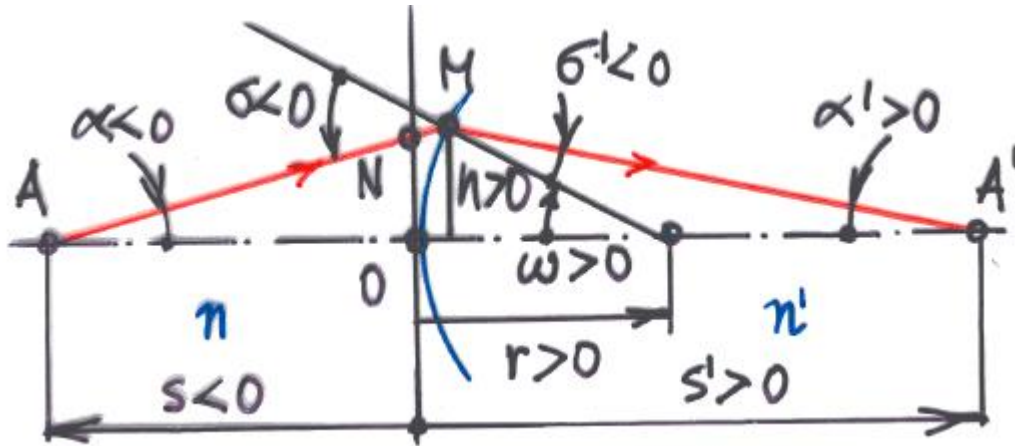
$$\alpha' = \alpha + \sigma' - \sigma, \quad s' = r - q'.$$

Dopadová výška:

$$h = r \sin \omega = r \sin(\alpha' - \sigma') = r \sin(\alpha - \sigma).$$

# Optické zobrazení

## Chod paraxiálních paprsků optickou soustavou



**Paraxiálním paprskem** je označován paprsek, který se šíří z osového bodu předmětu pod malým úhlem  $\alpha$  a optickou soustavu protíná v malé dopadové výšce  $h$ .

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1;$$

$$\sin \sigma \approx \sigma, \quad \sin \sigma' \approx \sigma';$$

$NM \approx 0$ , (bod na ploše je nahrazen bodem N na rovině kolmé k ose).

$$\text{Snellův zákon: } n\sigma = n'\sigma'.$$

$$\text{Z obrázku: } \sigma = \alpha - \omega; \quad \sigma' = \alpha' - \omega.$$

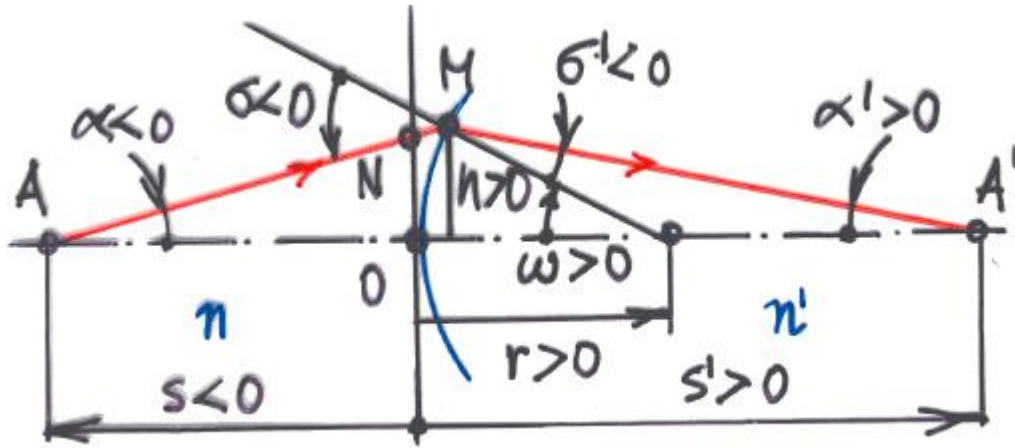
Po dosazení do Snellova zákona:

$$n(\alpha - \omega) = n'(\alpha' - \omega),$$

$$n \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{r} \right) = n' \left( \frac{1}{s'} - \frac{1}{r} \right) \quad \text{Invariant lomu.}$$

# Optické zobrazení

## Chod paraxiálních paprsků optickou soustavou



$$n \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{r} \right) = n' \left( \frac{1}{s'} - \frac{1}{r} \right) \text{ Invariant lomu.}$$

Rovnice pro zobrazení lomem na kulové ploše:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}.$$

Pro odraz  $n=n'$ : 
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{2}{r}.$$

Pro  $s \rightarrow -\infty$  je  $s' = f' = \frac{n'r}{n' - n}$ ;

$s' \rightarrow \infty$   $s = f = \frac{nr}{n - n'}$ .

Platí  $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$ ; odkud

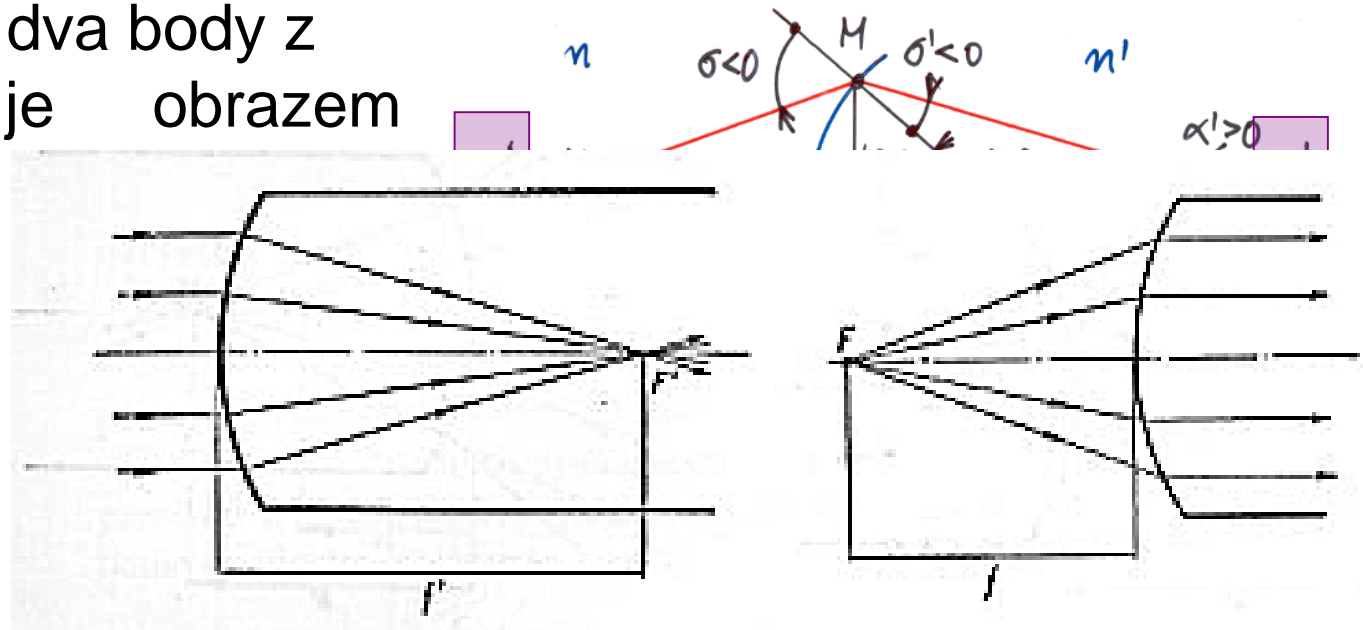
$$\frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} = \Phi - \text{optická mohutnost.}$$

Pro odraznou plochu

$$f' = \frac{r}{2}.$$

## 6. Optické zobrazení – Sdružené body

Sdružené body – dva body z nichž jeden je obrazem druhého.



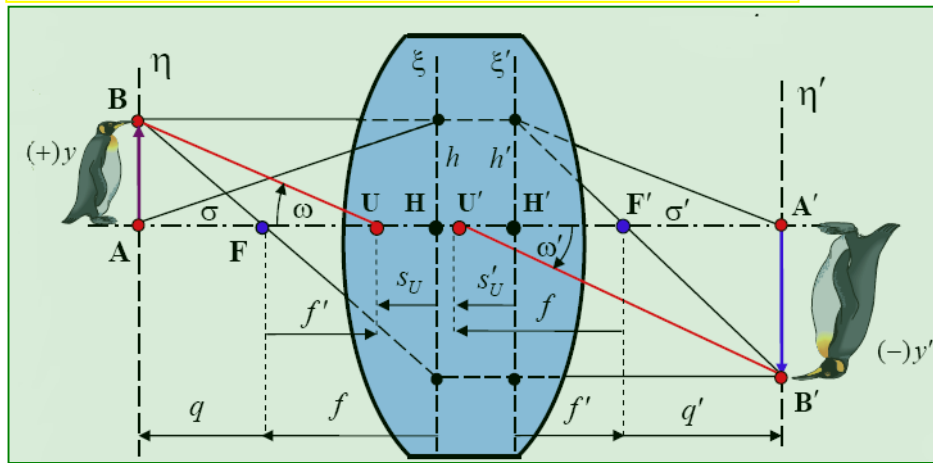
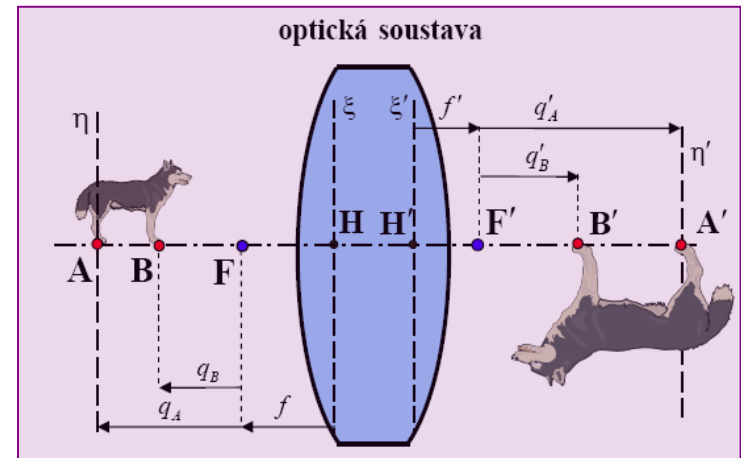
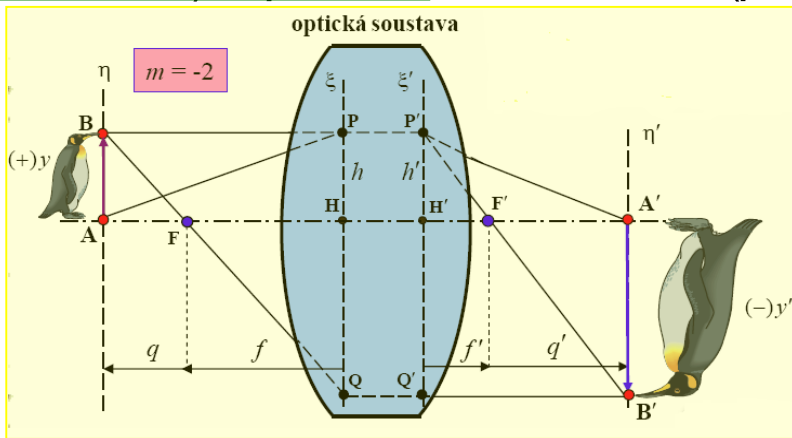
Je-li bod  $A$  v nekonečnu, nazývá se sdružený bod  $A'$  obrazovým ohniskem a značí se  $F'$ . V případě, že  $A'$  je v nekonečnu, nazývá se sdružený bod  $A$  předmětovým ohniskem a značí se  $F$ .

Pozn.: Je nutno jsi uvědomit, že ohniska  $F$  a  $F'$  nejsou sdružené body ale pro jednoduchost je ponecháno označení jako v případě sdružených bodů.



# Optické zobrazení – Zvětšení

Zvětšení – Podíl dvou sdružených veličin nazýváme zvětšením optické soustavy. Největší (praktický) význam mají *podíl úseček kolmých k ose (příčné zvětšení)*, *podíl úhlů, které svírají sdružené paprsky s optickou osou (úhlové zvětšení)* a *podíl úseček v ose (podélné nebo osové zvětšení)*.



# Optické zobrazení

## Základní body optické soustavy

- Pro charakteristiku optické soustavy jsou důležité dvojice sdružených hodnot, v nichž zvětšení nabývají význačných hodnot, tj. 0,  $\infty$ ,  $\pm 1$ . Praktický význam mají tyto dvojice:

$\beta=0$  – předmětový bod v nekonečnu – obrazové ohnisko  $F'$ ,

$\beta \rightarrow \infty$  – předmětové ohnisko  $F$  – obrazový bod v nekonečnu,

$\beta=+1$  – hlavní body ( $H, H'$ )\*

$\gamma=+1$  – uzlové body ( $N, N'$ )\*

- Ohniska, hlavní a uzlové body se nazývají **základní body optické soustavy**, roviny jdoucí těmito body kolmo k optické ose soustavy se nazývají **roviny ohniskové, hlavní a uzlové**.

- Optická soustava je úplně charakterizována, známe-li polohy ohnisek a polohy hlavních nebo uzlových bodů.

\* V některé literatuře se zavádějí taky záporné hlavní a uzlové body s  $\beta=-1$  a  $\gamma=-1$ .

# Optické zobrazení

## Ohniskové vzdálenosti

Vzdálenost předmětového ohniska  $F$  od předmětového hlavního bodu  $H$  se nazývá předmětovou ohniskovou vzdáleností a značí se  $f$ .

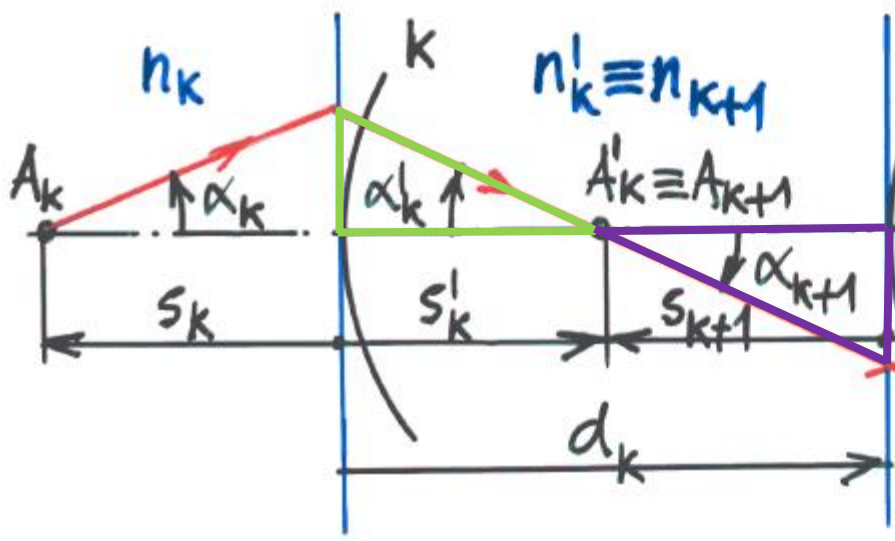
Vzdálenost obrazového ohniska  $F'$  od obrazového hlavního bodu  $H'$  se nazývá obrazovou ohniskovou vzdáleností a značí se  $f'$ .

$$f = \overline{HF}; \quad f' = \overline{H'F'}$$

Pozn.: Je nutno zdůraznit že úsečky  $f$  a  $f'$  nejsou sdružené.

Poněvadž v případě jedné lámavé plochy splývají hlavní body jejím vrcholem,  $S$ , je  $f = s_F = \overline{SF}$ ;  $f' = s'_f = \overline{SF'}$ .

# 7. Optické zobrazení - výpočet chodu paprsků soustavou kulových ploch



$$n(\alpha - \omega) = n'(\alpha' - \omega),$$

$$n_k \left( \alpha_k - \frac{h_k}{r_k} \right) = n_{k+1} \left( \alpha_{k+1} - \frac{h_k}{r_k} \right),$$

$$n_k \alpha_k - \frac{n_k h_k}{r_k} = n_{k+1} \alpha_{k+1} - \frac{n_{k+1} h_k}{r_k},$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{n_k}{n_{k+1}} \alpha_k + h_k \frac{n_{k+1} - n_k}{n_{k+1} r_k}.$$

Rovnice můžeme vyjádřit pomocí úhlů a do

$$\alpha_{k+1} = \frac{n_k}{n_{k+1}} \alpha_k + h_k \frac{n_{k+1} - n_k}{n_{k+1} r_k},$$

rovni  
papr

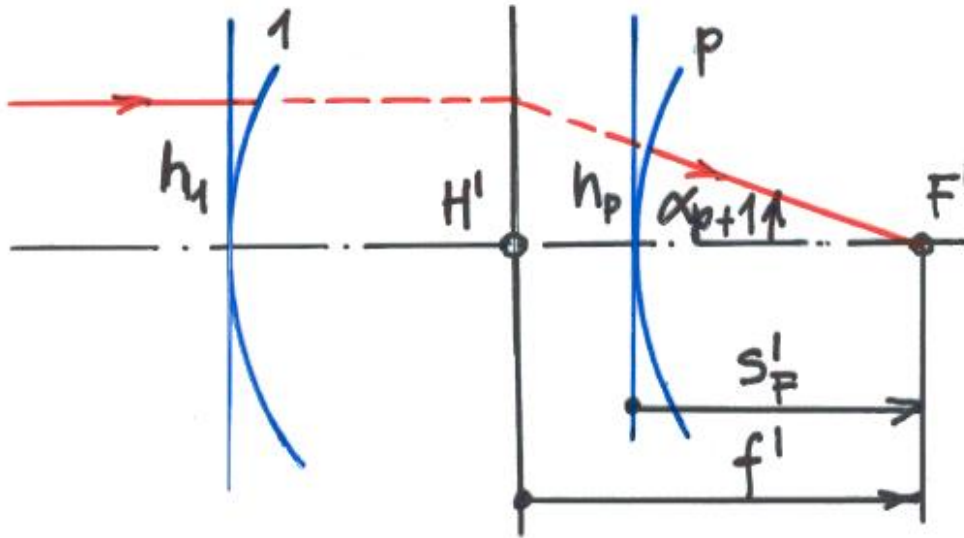
Z obrázku:

$$\frac{h_k}{s'_k} = \frac{h_{k+1}}{s'_k - d_k}, \text{ takže } h_{k+1} = h_k - \frac{h_k}{s'_k} d_k, \text{ nebo}$$

$$h_{k+1} = h_k - \alpha_{k+1} d_k.$$

rovnice dopadových výšek  
paprsku

# Optické zobrazení - výpočet chodu paprsků soustavou kulových ploch



Obrazová ohnisková vzdálenost:

$$f' = \frac{h_1}{\alpha_{p+1}}.$$

Sečná vzdálenost obrazového ohniska:

$$s'_F = \frac{h_p}{\alpha_{p+1}}.$$

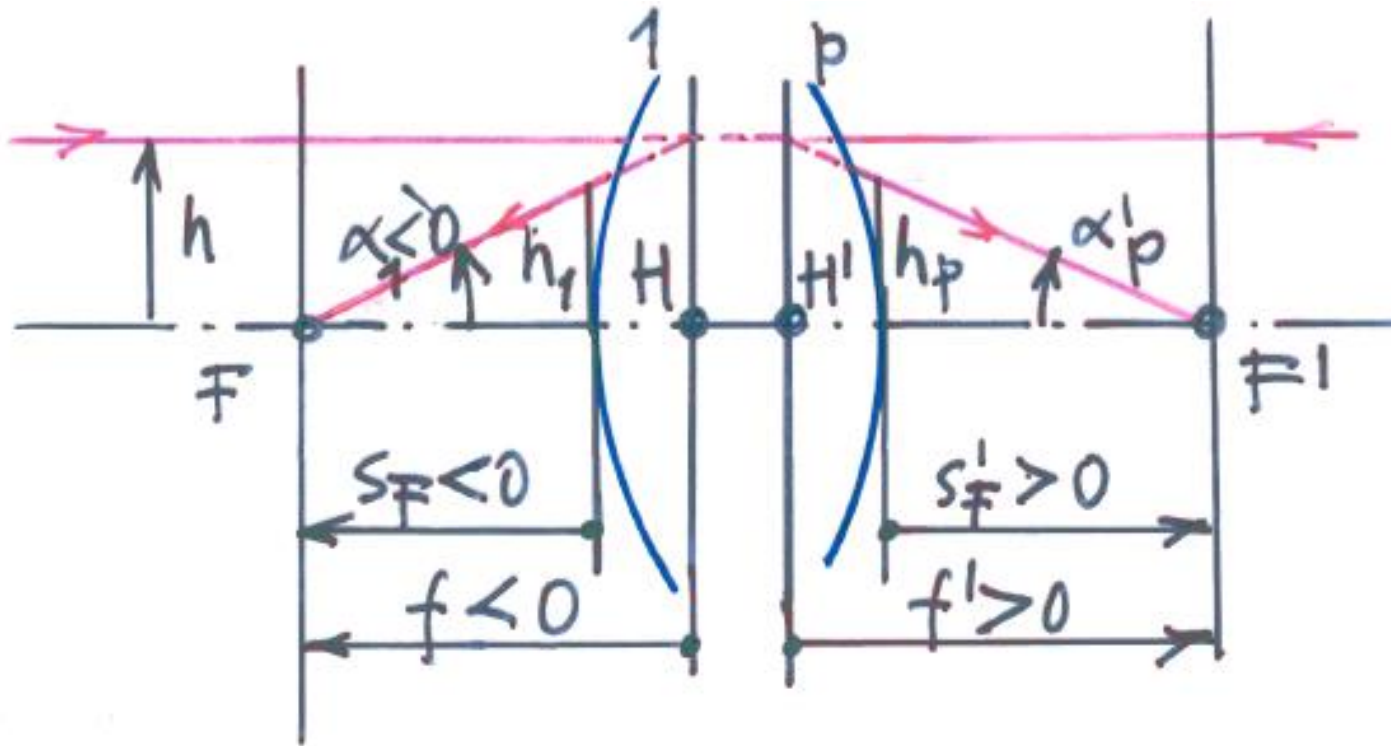
Tyto hodnoty pro předmětové ohnisko a předmětovou ohniskovou vzdálenost zjistíme z rovnic při opačném chodu paprsku optickou soustavou.

Vyskytuje-li se v optické soustavě odrazná plocha (např.  $k$ -tá plocha), pak  $d_k$ , změní znaménko v souvislosti se změnou šíření paprsku na opačnou.

$$n_{k+1} = -n_k,$$

# Optické zobrazení

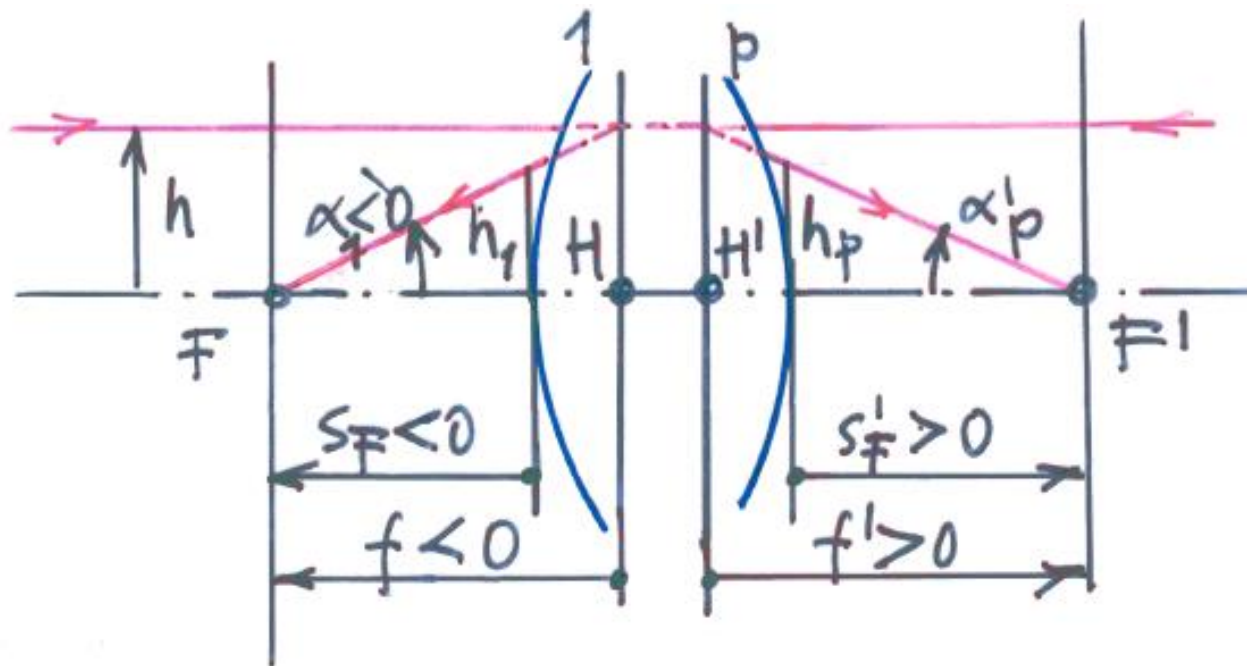
## Ohniska



Obrazem bodu, který leží v předmětovém prostoru na ose v nekonečnu je **obrazové ohnisko  $F'$** .

**Předmětové ohnisko  $F$**  je bod na ose, který se zobrazuje do nekonečna.

# Optické zobrazení - hlavní roviny, ohniskové vzdálenosti, ohniskové roviny



Účinek všech ploch  $p$  optické soustavy lze nahradit **obrazovou hlavní rovinou** při opačném chodu paprsků **předmětovou hlavní rovinou**. Jejich průsečíky s optickou osou jsou **hlavní body  $H$  a  $H'$** .

**Ohniskové roviny** jsou roviny kolmé k optické ose a prochází se ohnisky. **Ohniskové vzdálenosti  $f$  a  $f'$**  jsou vzdálenosti ohnisek od hlavních bodů.

Pozn.: Hlavní roviny je možno definovat jako roviny pro které je příčné zvětšení rovno +1.

# 8. Optické zobrazení – Závislost mezi polohou předmětu a obrazu – Zobrazovací rovnice

Jsou-li stanoveny polohy ohnisek a ohniskové vzdálenosti optické (lámavé) plochy (resp. optické soustavy), určí se k danému bodu sdružený bod buď konstruktivně (trasováním paprsku), nebo pomocí zvláštních vztahů, zvaných **zobrazovací rovnice**.

a) **Základní tvar** zobrazovací rovnice

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

Pro  $s \rightarrow -\infty$  je  $s' = f' = \frac{n'r}{n' - n}$ ;

$s' \rightarrow \infty$       $s = f = \frac{nr}{n - n'}$ .

Použití

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}; \quad / \frac{n' - n}{r}$$

$$\frac{\frac{n'}{s'}}{\frac{n' - n}{r}} - \frac{\frac{n}{s}}{\frac{n' - n}{r}} = 1;$$

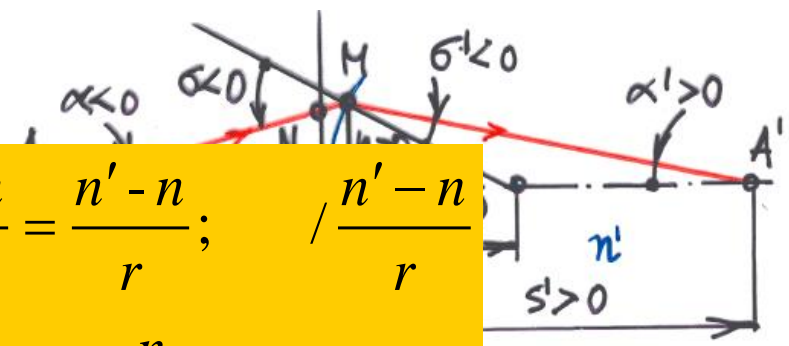
$$\frac{n'r}{n' - n} \frac{1}{s'} + \frac{nr}{n - n'} \frac{1}{s} = 1;$$

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1.$$

obstaneme:

b) **Gaussův tvar** zobrazovací rovnice (zobrazovací rovnice vztažená k hlavním bodům)

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1.$$



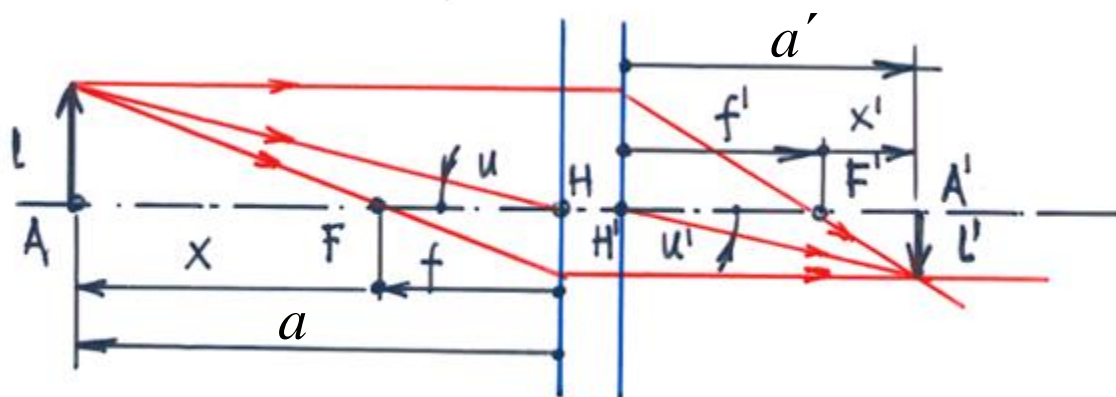
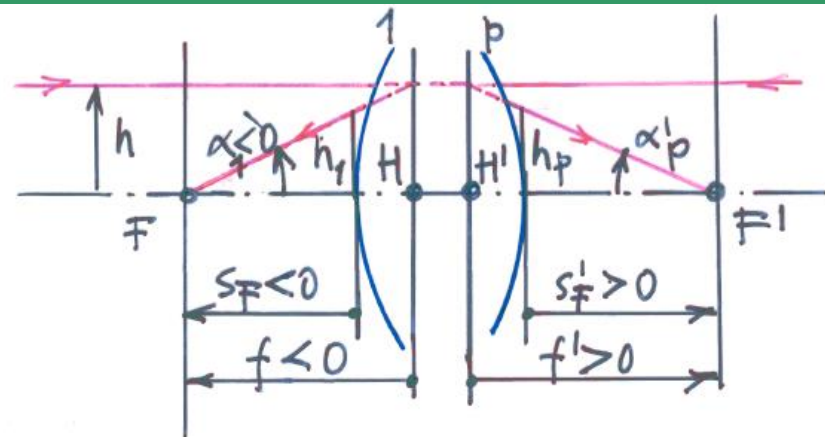
Gauss (1777-  
en z největších  
fyziků všech  
se teorií čísel,  
u analýzou,  
odezí,  
n, astronomií,



# Optické zobrazení – Gaussova zobrazovací rovnice

Gaussov tvar zobrazovací rovnice (zobrazovací rovnice vztážená k hlavním bodům)

$$\frac{f'}{a'} + \frac{f}{a} = 1.$$



Pro  $f = -f'$  soustava se nalézá v homogenním prostředí, zobrazovací rovnici vztáženou k hlavním bodům můžeme napsat ve tvaru:

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}$$

# Optické zobrazení – Newtonova zobrazovací rovnice

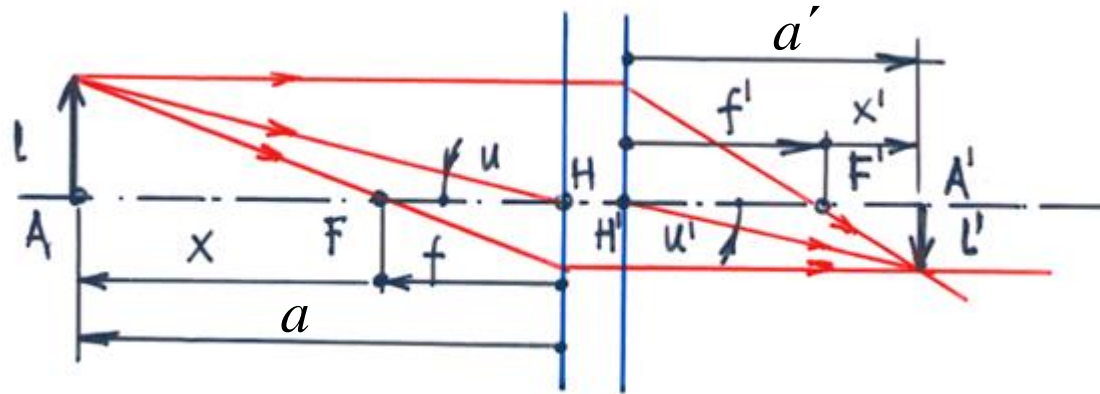
Úpravou Gaussovy zobrazovací rovnice

$$\frac{f'}{a'} + \frac{f}{a} = 1;$$

využitím  $a = x + f$  a  $a' = x' + f'$

dostaneme

$$\frac{f'}{x' + f'} + \frac{f}{x + f} = 1.$$



Odkud získáme zobrazovací rovnici

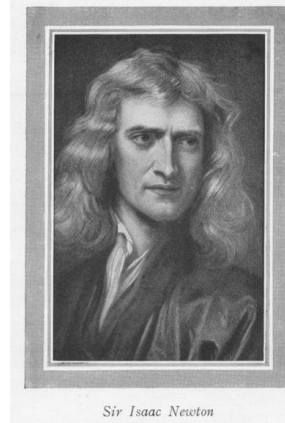
c) **vztaženou na ohniska** – rovnici **Newtonovu**

$$xx' = ff'.$$

Příčné zvětšení v tomto případě je:

$$\beta = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}.$$

Pro  $f = -f'$  soustava se nalézá v homogenním prostředí, zobrazovací rovnici vztaženou na ohniska můžeme napsat ve tvaru:

$$xx' = -f'^2.$$


Sir Isaac Newton

Sir Isaac Newton (1643-1726) byl anglický fyzik, matematik, astronom, filosof, teolog a alchymista. Je považován za jednoho z nejvýznamnějších vědců všech dob. Newton ve svém základním díle

Philisiphiae Naturalis Principa Mathematica (Matematické principy přírodovědy) popsal zákon všeobecné gravitace a svými pohybovými zákony položil základy klasické mechaniky. V rámci svého výzkumu také vytvořil (spolu s Gottfriedem Leibnizem; o prvenství vedli nesmiřitelný spor) základy diferenciálního a integrálního počtu.

Zdroj: [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)

# Optické zobrazení – Gullstrandova zobrazovací rovnice

b) kdy  $Z_1, Z_j$  jsou **středů pupil** – zobrazovací rovnice **Gullstrandova**,  $\beta_z = \frac{D'}{D}$ , kde  $D$  a  $D'$  jsou průměry vstupní a výstupní pupily.

$$\frac{D'^2 f'}{z'} + \frac{D^2 f}{z} = DD'; \quad \beta = -\frac{f}{f'} \frac{D}{D'} \frac{p'}{p}, \quad \text{nebo} \quad \frac{n'_j D'^2}{z'} - \frac{n_1 D^2}{z} = \frac{n'_j}{f'} DD'; \quad \beta = \frac{n_1}{n'_j} \frac{D}{D'} \frac{z'}{z}.$$

v případě  $n_j=n_1$  a  $\beta>0$  dostáváme:

$$\frac{D'^2}{z'} - \frac{D^2}{z} = \frac{DD'}{f'}; \quad \beta = \frac{D}{D'} \frac{z'}{z},$$

a v případě  $n_j=n_1$  a  $\beta<0$ :

$$\frac{D'^2}{z'} - \frac{D^2}{z} = -\frac{DD'}{f'}; \quad \beta = -\frac{D}{D'} \frac{z'}{z}.$$



Allvar Gullstrand (1862-1930) byl švédský oftalmolog, nositel Nobelovy ceny za fyziologii a medicínu za rok 1911.

Byl prvním profesorem oftalmologie na univerzitě ve švédské Uppsale. Od roku 1901 spolupracoval Gullstrand v laboratořích Carl Zeiss v Jeně se Siegfriedem Czapskim na konstrukci oftalmologických optických přístrojů. Inicioval vývoj nových přístrojů, navrhoval jejich koncepci a účastnil se klinických testů. K nejdůležitějším výsledkům tohoto vývoje patří Gullstrandův oftalmoskop se štěrbinovým osvětlením pro pozorování očního pozadí z roku 1911.

Zdroj: [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)

# 9. Optické zobrazení - Zobrazení centrovanou soustavou dvou kulových ploch – Rovnice čočky

Porovnáním vztahů pro ohniskové vzdálenosti

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{n_3} \left( \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} \right) - \frac{(n_2 - n_1)(n_3 - n_2)}{n_2 n_3 r_1 r_2} d.$$

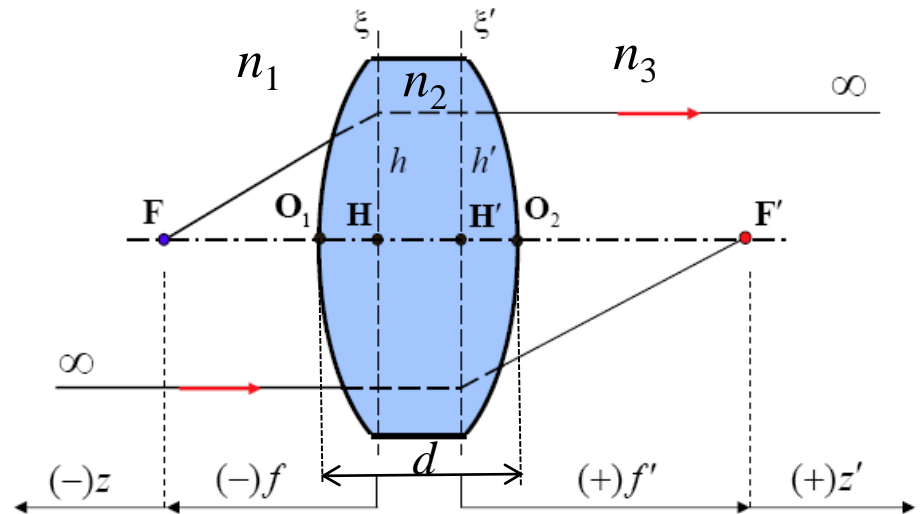
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{n_1} \left( \frac{n_1 - n_2}{r_1} + \frac{n_2 - n_3}{r_2} \right) - \frac{(n_1 - n_2)(n_2 - n_3)}{n_1 n_2 r_1 r_2} d.$$

dostaneme:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n_3}{n_1}.$$

Optická mohutnost:

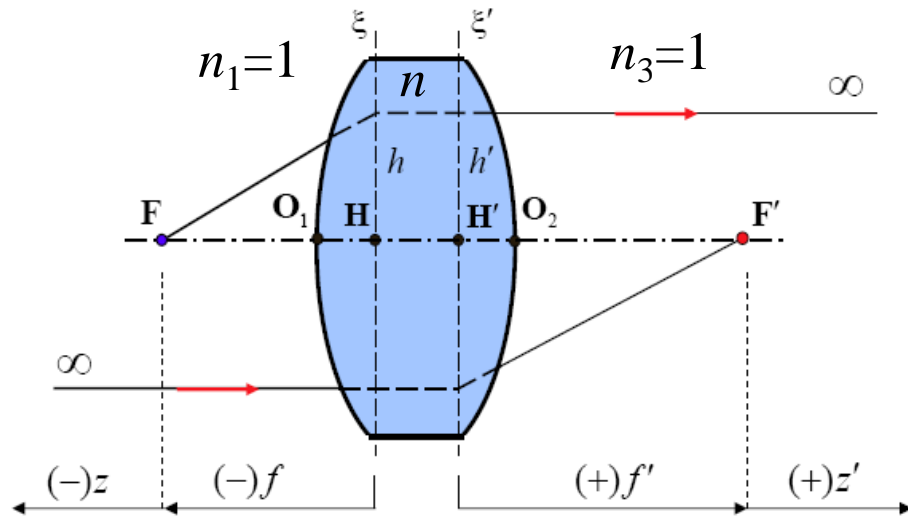
$$\Phi = \frac{n_3}{f'} = -\frac{n_1}{f}.$$



Zdroj: <http://webfyzika.fsv.cvut.cz/>

# Optické zobrazení

## Čočka ve vzduchu ( $n_1=n_3=1$ , $n_2=n$ )



Zdroj: <http://webfyzika.fsv.cvut.cz/>

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2}{nr_1r_2} d;$$

$$\frac{1}{f} = (1-n) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \frac{(n-1)^2}{nr_1r_2} d;$$

$$f = -f';$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1 \Phi_2 \frac{d}{n};$$

$$s'_F = f' \left( 1 - \frac{n-1}{nr_1} d \right); \quad s_F = -f' \left( 1 + \frac{n-1}{nr_2} d \right);$$

$$s'_H = -f' \frac{n-1}{nr_1} d; \quad s_H = -f' \frac{n-1}{nr_2} d;$$

$$\Delta_H = \left[ 1 - \frac{f'}{n} (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right] d.$$

# Optické zobrazení – tenká čočka

Prvotní návrh optických soustav – pomocí tenkých čoček ( $d = 0$ )

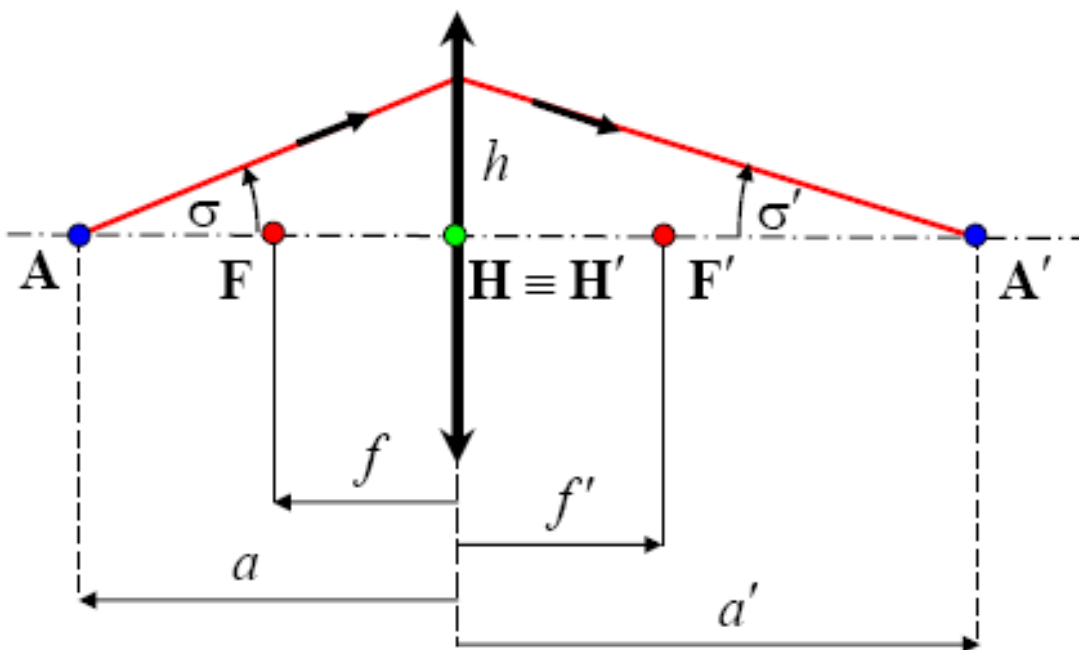
$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'} = \varphi \quad \longrightarrow \quad a' = \frac{a f'}{a + f'}$$

$$\sigma' - \sigma = \frac{h}{f'} = h\varphi \quad m = \frac{a'}{a} = \frac{\sigma}{\sigma'}$$

$$\varphi = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$s'_{H'} = s_H = \Delta_H = 0$$

$$s'_{F'} = -s_F = f'$$



$$f' = -f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)}$$

**ohnisková vzdálenost tenké čočky**