

# Užití kuželoseček a kvadrik.

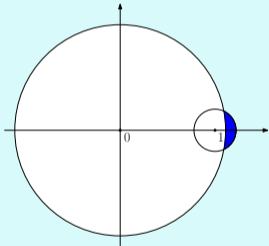
Lenka Příbylová

25. listopadu 2010

# Obsah

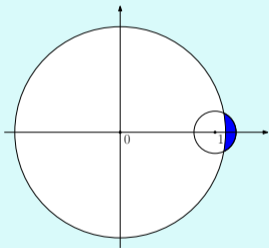
Určete čóčku. . . . .	3
Určete čóčku. . . . .	14
Nakreslete $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$ . . . . .	29
Určete typ kuželosečky. . . . .	41
Nalezňte průsečíky kuželosečky s osami. . . . .	59
Spočtete vrcholovou křivost. . . . .	64

Kružnice  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $(x - 0.9)^2 + y^2 = 0.04$  tvoří řez kulovými povrchy čočky. Určete její mohutnost. Můžeme ji považovat za tenkou čočku?



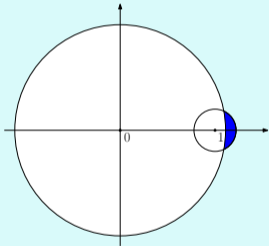
Kružnice  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $(x - 0.9)^2 + y^2 = 0.04$  tvoří řez kulovými povrchy čočky. Určete její mohutnost. Můžeme ji považovat za tenkou čočku?

Polohy středů:  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  a  $(x_2, y_2) = (0.9, 0)$  m,



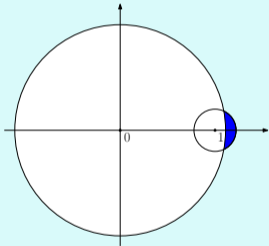
Kružnice  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $(x - 0.9)^2 + y^2 = 0.04$  tvoří řez kulovými povrchy čočky. Určete její mohutnost. Můžeme ji považovat za tenkou čočku?

Polohy středů:  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  a  $(x_2, y_2) = (0.9, 0)$  m,  
poloměry:  $R_1 = 1$  m,  $R_2 = 0.2$  m.



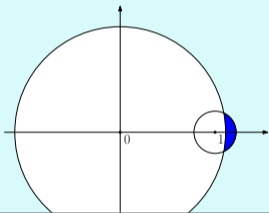
Kružnice  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $(x - 0.9)^2 + y^2 = 0.04$  tvoří řez kulovými povrchy čočky. Určete její mohutnost. Můžeme ji považovat za tenkou čočku?

Polohy středů:  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  a  $(x_2, y_2) = (0.9, 0)$  m,  
poloměry:  $R_1 = 1$  m,  $R_2 = 0.2$  m.



Kružnice  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $(x - 0.9)^2 + y^2 = 0.04$  tvoří řez kulovými povrchy čočky. Určete její mohutnost. Můžeme ji považovat za tenkou čočku?

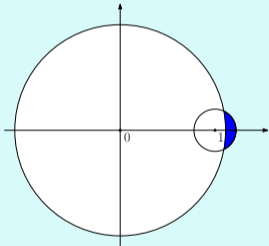
Polohy středů:  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  a  $(x_2, y_2) = (0.9, 0)$  m,  
poloměry:  $R_1 = 1$  m,  $R_2 = 0.2$  m.



$$y^2 = 1 - x^2 \text{ dosadíme do } (x - 0.9)^2 + y^2 = 0.04, \text{ odtud}$$
$$(x - 0.9)^2 + 1 - x^2 = -1.8x + 0.81 + 1 = 0.04, \text{ tj. } x = \frac{1.77}{1.8} = 0.98\bar{3} \text{ a}$$
$$y^2 = 1 - \left(\frac{1.77}{1.8}\right)^2 \doteq 0.033, \text{ tj. } y = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1.77}{1.8}\right)^2} \doteq 0.18.$$

Kružnice  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $(x - 0.9)^2 + y^2 = 0.04$  tvoří řez kulovými povrchy čočky. Určete její mohutnost. Můžeme ji považovat za tenkou čočku?

Polohy středů:  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  a  $(x_2, y_2) = (0.9, 0)$  m,  
poloměry:  $R_1 = 1$  m,  $R_2 = 0.2$  m.



Jedná se o meniskus s průsečíky:  $x = 0.98\bar{3}$  m,  $y \doteq \pm 0.18$  m.  
Průměr čočky je  $p \doteq 0.36$  m, tloušťka čočky je  $d = 0.1$  m.



Kružnice  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $(x - 0.9)^2 + y^2 = 0.04$  tvoří řez kulovými povrchy čočky. Určete její mohutnost. Můžeme ji považovat za tenkou čočku?

Přilétá-li světlo zleva, jsou obě lámavé plochy duté a přísluší jim tedy podle znaménkové konvence záporná znaménka a tedy pro index lomu  $n = 1.5$  dostáváme  $D_1 = -0.5$  dpt a  $D_2 = 2.5$  dpt.

Pro mohutnost prvního povrchu platí

$$D_1 = -\frac{n-1}{R_1} = -\frac{1.5-1}{1} = -0.5 \text{ dpt, pro druhý}$$

$$D_2 = -\frac{1-n}{R_2} = -\frac{1-1.5}{0.2} = 2.5 \text{ dpt. Opačné znaménko je dáno konvencí pro dutou plochu.}$$

Kružnice  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $(x - 0.9)^2 + y^2 = 0.04$  tvoří řez kulovými povrchy čočky. Určete její mohutnost. Můžeme ji považovat za tenkou čočku?

Přilétá-li světlo zleva, jsou obě lámavé plochy duté a přísluší jim tedy podle znaménkové konvence záporná znaménka a tedy pro index lomu  $n = 1.5$  dostáváme  $D_1 = -0.5$  dpt a  $D_2 = 2.5$  dpt.

Celková mohutnost je  $D = 2.08\bar{3}$  dpt

$$D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n} D_1 D_2 = -0.5 + 2.5 - \frac{0.1}{1.5} (-0.5) \cdot 2.5 = 2.08\bar{3}.$$

Kružnice  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $(x - 0.9)^2 + y^2 = 0.04$  tvoří řez kulovými povrchy čočky. Určete její mohutnost. Můžeme ji považovat za tenkou čočku?

Přilétá-li světlo zleva, jsou obě lámavé plochy duté a přísluší jim tedy podle znaménkové konvence záporná znaménka a tedy pro index lomu  $n = 1.5$  dostáváme  $D_1 = -0.5$  dpt a  $D_2 = 2.5$  dpt.

Celková mohutnost je  $D = 2.08\bar{3}$  dpt a odpovídající ohnisková vzdálenost potom  $f = 48$  cm.

$$f = \frac{1}{D} = \frac{1}{2.08\bar{3}} = 0.48 \text{ m.}$$

Kružnice  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $(x - 0.9)^2 + y^2 = 0.04$  tvoří řez kulovými povrchy čočky. Určete její mohutnost. Můžeme ji považovat za tenkou čočku?

Přilétá-li světlo zleva, jsou obě lámavé plochy duté a přísluší jim tedy podle znaménkové konvence záporná znaménka a tedy pro index lomu  $n = 1.5$  dostáváme  $D_1 = -0.5$  dpt a  $D_2 = 2.5$  dpt.

Celková mohutnost je  $D = 2.08\bar{3}$  dpt a odpovídající ohnisková vzdálenost potom  $f = 48$  cm.

Celková mohutnost čočky je kladná, takže se bude jednat o kladný meniskus.

Kružnice  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $(x - 0.9)^2 + y^2 = 0.04$  tvoří řez kulovými povrchy čočky. Určete její mohutnost. Můžeme ji považovat za tenkou čočku?

Přilétá-li světlo zleva, jsou obě lámavé plochy duté a přísluší jim tedy podle znaménkové konvence záporná znaménka a tedy pro index lomu  $n = 1.5$  dostáváme  $D_1 = -0.5$  dpt a  $D_2 = 2.5$  dpt.

Celková mohutnost je  $D = 2.08\bar{3}$  dpt a odpovídající ohnisková vzdálenost potom  $f = 48$  cm.

Celková mohutnost čočky je kladná, takže se bude jednat o kladný meniskus.

V přiblížení tenké čočky by bylo  $D = D_1 + D_2 = 2$  dpt. Jelikož bychom se tím dospustili chyby v určení celkové mohutnosti kolem pěti procent, lze říct, že z fyzikálního hlediska leží taková čočka na hranici tenkosti.

Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

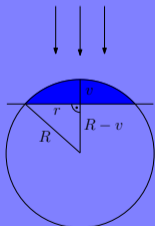
Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

Nejprve změříme výšku  $v$  a poloměr  $r$  vodní kapky (v metrech).

Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

Nejprve změříme výšku  $v$  a poloměr  $r$  vodní kapky (v metrech).

Poloměr povrchu kapky je  $R = \frac{r^2 + v^2}{2v}$  m.



Z pravoúhlého trojúhelníku podle Pythagorovy věty dostáváme rovnost

$$R^2 = r^2 + (R - v)^2 = r^2 + R^2 - 2vR + v^2, \text{ tj.}$$

$$2vR = r^2 + v^2.$$



Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

Nejprve změříme výšku  $v$  a poloměr  $r$  vodní kapky (v metrech).

Poloměr povrchu kapky je  $R = \frac{r^2+v^2}{2v}$  m.

Světlo přilétá shora, povrch je vypuklý a přísluší mu dle znaménkové konvence kladné znaménko. Pro index lomu  $n$  dostáváme

$D_1 = \frac{2(n-1)v}{r^2+v^2}$  dpt. Povrch na podložce je plochý, proto  $D_2 = 0$  dpt.

Pro mohutnost vrchního povrchu platí

$$D_1 = \frac{n-1}{R_1} = \frac{n-1}{R} = \frac{(n-1)}{\frac{r^2+v^2}{2v}} = \frac{2(n-1)v}{r^2+v^2} \text{ dpt, pro plochý}$$

povrch je  $R = \infty$  a  $D_2 = \frac{1-n}{R_2} = \frac{1-n}{\infty} = 0$  dpt.

Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

Nejprve změříme výšku  $v$  a poloměr  $r$  vodní kapky ( $v$  metrech).

Poloměr povrchu kapky je  $R = \frac{r^2 + v^2}{2v}$  m.

Světlo přilétá shora, povrch je vypuklý a přísluší mu dle znaménkové konvence kladné znaménko. Pro index lomu  $n$  dostáváme

$D_1 = \frac{2(n-1)v}{r^2 + v^2}$  dpt. Povrch na podložce je plochý, proto  $D_2 = 0$  dpt.

Celková mohutnost je  $D = D_1$  dpt.

$$D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n} D_1 D_2 = D_1 + 0 - \frac{v}{n} D_1 \cdot 0 = D_1.$$

Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

Nejprve změříme výšku  $v$  a poloměr  $r$  vodní kapky (v metrech).

Poloměr povrchu kapky je  $R = \frac{r^2 + v^2}{2v}$  m.

Světlo přilétá shora, povrch je vypuklý a přísluší mu dle znaménkové konvence kladné znaménko. Pro index lomu  $n$  dostáváme

$D_1 = \frac{2(n-1)v}{r^2 + v^2}$  dpt. Povrch na podložce je plochý, proto  $D_2 = 0$  dpt.

Celková mohutnost je  $D = D_1$  dpt. **Kvůli ploché spodní stěně vzniklého kulového vrchlíku se bude vždy jednat o tenkou čočku.**

$$D = D_1 + D_2 = D_1 + 0$$

Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

Nejprve změříme výšku  $v$  a poloměr  $r$  vodní kapky (v metrech).

Poloměr povrchu kapky je  $R = \frac{r^2 + v^2}{2v}$  m.

Světlo přilétá shora, povrch je vypuklý a přísluší mu dle znaménkové konvence kladné znaménko. Pro index lomu  $n$  dostáváme

$D_1 = \frac{2(n-1)v}{r^2 + v^2}$  dpt. Povrch na podložce je plochý, proto  $D_2 = 0$  dpt.

Celková mohutnost je  $D = D_1$  dpt. Kvůli ploché spodní stěně vzniklého kulového vrchlíku se bude vždy jednat o tenkou čočku.

Odpovídající ohnisková vzdálenost potom  $f = \frac{r^2 + v^2}{2(n-1)v}$  m.

$$f = \frac{1}{D} = \frac{1}{\frac{2(n-1)v}{r^2 + v^2}} = \frac{r^2 + v^2}{2(n-1)v} \text{ m.}$$

Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

Nejprve změříme výšku  $v$  a poloměr  $r$  vodní kapky (v metrech).

Poloměr povrchu kapky je  $R = \frac{r^2 + v^2}{2v}$  m.

Světlo přilétá shora, povrch je vypuklý a přísluší mu dle znaménkové konvence kladné znaménko. Pro index lomu  $n$  dostáváme

$D_1 = \frac{2(n-1)v}{r^2 + v^2}$  dpt. Povrch na podložce je plochý, proto  $D_2 = 0$  dpt.

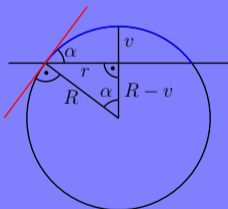
Celková mohutnost je  $D = D_1$  dpt. Kvůli ploché spodní stěně vzniklého kulového vrchlíku se bude vždy jednat o tenkou čočku.

Odpovídající ohnisková vzdálenost potom  $f = \frac{r^2 + v^2}{2(n-1)v}$  m.

Celková mohutnost čočky kladná, takže se bude jednat o tenkou spojku.

Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

Pro kapku vody na skle je charakteristický tzv. smáčivý úhel  $\alpha = 38.5^\circ$ .

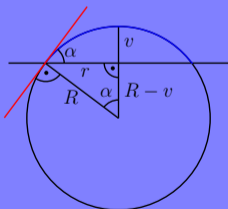


Pokud známe smáčivý úhel  $\alpha$ , můžeme mohutnost odvodit jen na základě poloměru kapky.

Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

Pro kapku vody na skle je charakteristický tzv. smáčivý úhel  $\alpha = 38.5^\circ$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{R-v}$$



Z úhlů v trojúhelníku je vidět, že smáčivý úhel je také středovým úhlem.

Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

Pro kapku vody na skle je charakteristický tzv. smáčivý úhel  $\alpha = 38.5^\circ$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{R-v} = \frac{2vr}{r^2-v^2}.$$

$$\frac{r}{R-v} = \frac{r}{\frac{r^2+v^2}{2v} - v} = \frac{r}{\frac{r^2+v^2-2v^2}{2v}}$$



Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

Pro kapku vody na skle je charakteristický tzv. smáčivý úhel  $\alpha = 38.5^\circ$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{R-v} = \frac{2vr}{r^2-v^2}.$$

Je tedy zřejmé, že výška kapky bude nutně záviset na jejím poloměru, můžeme ji vypočítat z kvadratické rovnice

$$0 = v^2 \operatorname{tg} \alpha + 2vr - r^2 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$(r^2 - v^2) \operatorname{tg} \alpha = 2vr$$

Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

Pro kapku vody na skle je charakteristický tzv. smáčivý úhel  $\alpha = 38.5^\circ$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{R-v} = \frac{2vr}{r^2-v^2}.$$

Je tedy zřejmé, že výška kapky bude nutně záviset na jejím poloměru, můžeme ji vypočítat z kvadratické rovnice

$$0 = v^2 \operatorname{tg} \alpha + 2vr - r^2 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\text{tj. } v_{1,2} = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 + 4r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

$$v_{1,2} = \frac{-2r \pm 2r \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \text{ kde}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ tj. } v_{1,2} = \frac{-2r \pm 2r \frac{1}{\cos \alpha}}{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

Pro kapku vody na skle je charakteristický tzv. smáčivý úhel  $\alpha = 38.5^\circ$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{R-v} = \frac{2vr}{r^2-v^2}.$$

Je tedy zřejmé, že výška kapky bude nutně záviset na jejím poloměru, můžeme ji vypočítat z kvadratické rovnice

$$0 = v^2 \operatorname{tg} \alpha + 2vr - r^2 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\text{tj. } v_{1,2} = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 + 4r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{odtud } v = r \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$v_{1,2} = \frac{-2r \pm 2r \frac{1}{\cos \alpha}}{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = r \cos \alpha \frac{-1 \pm \frac{1}{\cos \alpha}}{\sin \alpha}. \text{ Samozřejmě hledáme}$$

kladné řešení  $v > 0$ .

Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtete, jakou čočku vytváří.

Pro kapku vody na skle je charakteristický tzv. smáčivý úhel  $\alpha = 38,5^\circ$ .

Dosadíme do vztahu pro mohutnost

$$D = \frac{2(n-1)v}{r^2 + v^2} = \frac{2(n-1)r \frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha}}{r^2 + r^2 \frac{(1-\cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} = \frac{2(n-1)r \frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha}}{r^2 \frac{\sin^2 \alpha + 1 - 2\cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{2(n-1)(1-\cos \alpha)}{r \frac{2-2\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2(n-1)(1-\cos \alpha) \sin \alpha}{2r(1-\cos \alpha)} \text{ dpt.}$$

$$\text{tj. } v_{1,2} = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 + 4r^2 \text{tg}^2 \alpha}}{2 \text{tg} \alpha} \quad \text{odtud } v = r \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$D = \frac{(n-1) \sin \alpha}{r} = 0,33 \sin 38,5^\circ \frac{1}{r}$$

a

$$f = \frac{r}{(n-1) \sin \alpha} = \frac{1}{0,33 \sin 38,5^\circ} r \doteq 4,87 \cdot r.$$

Nakreslete  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$  pro  $k = 0$ ,  $k = -1$  a  $k = -2$ .

Nakreslete  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$  pro  $k = 0$ ,  $k = -1$  a  $k = -2$ .

$$k = 0: \quad y^2 - 2Rx + x^2 = 0$$

Nakreslete  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$  pro  $k = 0$ ,  $k = -1$  a  $k = -2$ .

$$k = 0: \quad y^2 - 2Rx + x^2 = 0$$

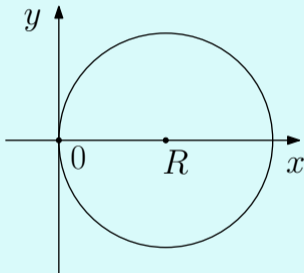
tj.  $y^2 + (x - R)^2 = R^2$  je kružnice se středem  $[R, 0]$  a poloměrem  $R$ .

$$y^2 - 2Rx + x^2 = 0 \text{ doplníme na čtverec } y^2 + (x - R)^2 - R^2 = 0.$$

Nakreslete  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  pro  $k = 0, k = -1$  a  $k = -2$ .

$$k = 0: y^2 - 2Rx + x^2 = 0$$

tj.  $y^2 + (x - R)^2 = R^2$  je kružnice se středem  $[R, 0]$  a poloměrem  $R$ .





Nakreslete  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$  pro  $k = 0$ ,  $k = -1$  a  $k = -2$ .

Nakreslete  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$  pro  $k = 0$ ,  $k = -1$  a  $k = -2$ .

$$k = -1 : y^2 - 2Rx = 0$$

Nakreslete  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$  pro  $k = 0$ ,  $k = -1$  a  $k = -2$ .

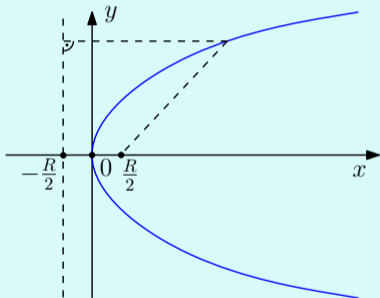
$$k = -1 : y^2 - 2Rx = 0$$

tj.  $y^2 = 2Rx$  je parabola s řídicí přímkou  $x = -\frac{R}{2}$  a ohniskem  $[\frac{R}{2}, 0]$ .

Nakreslete  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  pro  $k = 0$ ,  $k = -1$  a  $k = -2$ .

$$k = -1 : y^2 - 2Rx = 0$$

tj.  $y^2 = 2Rx$  je parabola s řídicí přímkou  $x = -\frac{R}{2}$  a ohniskem  $[\frac{R}{2}, 0]$ .



Nakreslete  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$  pro  $k = 0$ ,  $k = -1$  a  $k = -2$ .

Nakreslete  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$  pro  $k = 0$ ,  $k = -1$  a  $k = -2$ .

$$k = -2: \quad y^2 - 2Rx - x^2 = 0$$

Nakreslete  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$  pro  $k = 0$ ,  $k = -1$  a  $k = -2$ .

$$k = -2: \quad y^2 - 2Rx - x^2 = 0$$

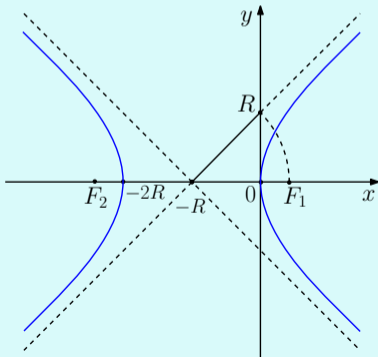
tj.  $(x + R)^2 - y^2 = R^2$  nebo  $\frac{(x+R)^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} = 1$  je hyperbola s polosami délky  $R$  a středem  $[-R, 0]$ .

$$y^2 - 2Rx - x^2 = 0 \text{ doplníme na čtverec } y^2 - (x + R)^2 + R^2 = 0.$$

Nakreslete  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  pro  $k = 0$ ,  $k = -1$  a  $k = -2$ .

$$k = -2: y^2 - 2Rx - x^2 = 0$$

tj.  $(x+R)^2 - y^2 = R^2$  nebo  $\frac{(x+R)^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} = 1$  je hyperbola s polosami délky  $R$  a středem  $[-R, 0]$ .





Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$k < -1$ :

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$k < -1$ :

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

tj.  $y^2 + (1+k) \left( x^2 - \frac{2R}{1+k}x \right) = 0$

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$k < -1$ :

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

tj.  $y^2 + (1+k) \left( x^2 - \frac{2R}{1+k}x \right) = 0$  a doplněním na čtverec tedy

$$y^2 + (1+k) \left( x - \frac{R}{1+k} \right)^2 = \frac{R^2}{1+k},$$

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$k < -1$ :

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

tj.  $y^2 + (1+k) \left( x^2 - \frac{2R}{1+k}x \right) = 0$  a doplněním na čtverec tedy

$$y^2 + (1+k) \left( x - \frac{R}{1+k} \right)^2 = \frac{R^2}{1+k},$$

$$\frac{y^2}{\frac{R^2}{1+k}} + \frac{\left( x - \frac{R}{1+k} \right)^2}{\left( \frac{R}{1+k} \right)^2} = 1.$$

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$k < -1$ :

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

tj.  $y^2 + (1+k)\left(x^2 - \frac{2R}{1+k}x\right) = 0$  a doplněním na čtverec tedy

$$y^2 + (1+k)\left(x - \frac{R}{1+k}\right)^2 = \frac{R^2}{1+k},$$

$$\frac{y^2}{\frac{R^2}{1+k}} + \frac{\left(x - \frac{R}{1+k}\right)^2}{\left(\frac{R}{1+k}\right)^2} = 1.$$

$\frac{R^2}{1+k} < 0$ , jde tedy o hyperbolu s polosami  $a = \frac{R}{1+k}$  a  $b = \frac{R}{\sqrt{|1+k|}}$  a středem  $S = \left[\frac{R}{1+k}, 0\right]$  vlevo od počátku.

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$k = -1$ :

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$$k = -1:$$

$$y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$$

$$\text{tj. } y^2 = 2Rx$$



Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$k = -1$ :

$$y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$$

tj.  $y^2 = 2Rx$  je parabola s řídicí přímkou  $x = -\frac{R}{2}$  a ohniskem  $[\frac{R}{2}, 0]$ .

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$-1 < k$ :

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$-1 < k$ :

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

tj.  $y^2 + (1+k) \left( x^2 - \frac{2R}{1+k}x \right) = 0$

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$-1 < k$ :

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

tj.  $y^2 + (1+k) \left( x^2 - \frac{2R}{1+k}x \right) = 0$  a doplněním na čtverec tedy

$$y^2 + (1+k) \left( x - \frac{R}{1+k} \right)^2 = \frac{R^2}{1+k},$$

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$-1 < k$ :

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

tj.  $y^2 + (1+k) \left( x^2 - \frac{2R}{1+k}x \right) = 0$  a doplněním na čtverec tedy

$$y^2 + (1+k) \left( x - \frac{R}{1+k} \right)^2 = \frac{R^2}{1+k},$$

$$\frac{y^2}{\frac{R^2}{1+k}} + \frac{\left( x - \frac{R}{1+k} \right)^2}{\left( \frac{R}{1+k} \right)^2} = 1.$$

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$-1 < k$ :

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

tj.  $y^2 + (1+k) \left( x^2 - \frac{2R}{1+k}x \right) = 0$  a doplněním na čtverec tedy

$$y^2 + (1+k) \left( x - \frac{R}{1+k} \right)^2 = \frac{R^2}{1+k},$$

$$\frac{y^2}{\frac{R^2}{1+k}} + \frac{\left( x - \frac{R}{1+k} \right)^2}{\left( \frac{R}{1+k} \right)^2} = 1.$$

$\frac{R^2}{1+k} > 0$ , jde tedy o elipsu s polosami  $a = \frac{R}{1+k}$  a  $b = \frac{R}{\sqrt{1+k}}$  a středem  $S = \left[ \frac{R}{1+k}, 0 \right]$  vpravo od počátku.

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$k = 0$ :

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$k = 0$ :

$$y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$$

tj.  $y^2 - 2Rx + x^2 = y^2 + (x - R)^2 - R^2 = 0,$



Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$k = 0$ :

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

tj.  $y^2 - 2Rx + x^2 = y^2 + (x - R)^2 - R^2 = 0$ , tj.

$$y^2 + (x - R)^2 = R^2$$

Ukažte, že  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru  $k$ .

$k = 0$ :

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

tj.  $y^2 - 2Rx + x^2 = y^2 + (x - R)^2 - R^2 = 0$ , tj.

$$y^2 + (x - R)^2 = R^2$$

je kružnice se středem  $[R, 0]$  a poloměrem  $R$ .

Nalezněte průsečíky s osami kuželosečky  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$ .

Nalezněte průsečíky s osami kuželosečky  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$ .

$k \neq -1$ :

osa  $x$  :  $y = 0$

$$2Rx + (1 + k)x^2 = 0,$$

Nalezněte průsečíky s osami kuželosečky  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$ .

$k \neq -1$ :

osa  $x$  :  $y = 0$

$$2Rx + (1 + k)x^2 = 0,$$

$$x(2R + (1 + k)x) = 0.$$

Průsečíky jsou  $x = 0$  a  $x = \frac{2R}{1+k}$ .

Nalezněte průsečíky s osami kuželosečky  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$ .

$k \neq -1$ :

osa  $x$  :  $y = 0$

$$2Rx + (1 + k)x^2 = 0,$$

$$x(2R + (1 + k)x) = 0.$$

Průsečíky jsou  $x = 0$  a  $x = \frac{2R}{1+k}$ .

osa  $y$  :  $x = 0$   $y^2 = 0$ , průsečíky je  $y = 0$ . Dostáváme tedy dva průsečíky  $[0, 0]$  a  $[\frac{2R}{1+k}, 0]$ .

Nalezněte průsečíky s osami kuželosečky  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$ .

$k \neq -1$ :

osa  $x$  :  $y = 0$

$$2Rx + (1 + k)x^2 = 0,$$

$$x(2R + (1 + k)x) = 0.$$

Průsečíky jsou  $x = 0$  a  $x = \frac{2R}{1+k}$ .

osa  $y$  :  $x = 0$   $y^2 = 0$ , průsečíky je  $y = 0$ . Dostáváme tedy dva průsečíky  $[0, 0]$  a  $[\frac{2R}{1+k}, 0]$ .

$k = -1$ :

$y^2 - 2Rx = 0$  parabola má jediný průsečík  $[0, 0]$ .

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $y^2 - 2Rx + (1 + k)x^2 = 0$ .



Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$ .

Kuželosečka  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je v počátku tečná k ose  $y$ ,  
protože  $y = \pm\sqrt{2Rx - (1+k)x^2}$  a

$y' = \pm\frac{1}{2}(2Rx - (1+k)x^2)^{-\frac{1}{2}}(2R - 2(1+k)x) \rightarrow \pm\infty$  pro  $x \rightarrow 0^+$ .

Stejně tak je to vidět i z předchozích grafů. Křivka není v okolí počátku funkcí.

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$ .

Kuželosečka  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je v počátku tečná k ose  $y$ ,  
protože  $y = \pm\sqrt{2Rx - (1+k)x^2}$  a

$y' = \pm\frac{1}{2}(2Rx - (1+k)x^2)^{-\frac{1}{2}}(2R - 2(1+k)x) \rightarrow \pm\infty$  pro  $x \rightarrow 0^+$ .

Stejně tak je to vidět i z předchozích grafů. Křivka není v okolí počátku funkcí.

Pro výpočet křivosti bude proto vhodné otočit grafy, tj. zaměnit  $x$  a  $y$ :

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$ .

Kuželosečka  $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$  je v počátku tečná k ose  $y$ , protože  $y = \pm\sqrt{2Rx - (1+k)x^2}$  a

$y' = \pm\frac{1}{2}(2Rx - (1+k)x^2)^{-\frac{1}{2}}(2R - 2(1+k)x) \rightarrow \pm\infty$  pro  $x \rightarrow 0^+$ .

Stejně tak je to vidět i z předchozích grafů. Křivka není v okolí počátku funkcí.

Pro výpočet křivosti bude proto vhodné otočit grafy, tj. zaměnit  $x$  a  $y$ :

$$x^2 - 2Ry + (1+k)y^2 = 0.$$

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $x^2 - 2Ry + (1 + k)y^2 = 0$ .

$k = -1$ :

$$y = \frac{x^2}{2R}, \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x}{R}, \quad y'' = \frac{1}{R}.$$

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $x^2 - 2Ry + (1+k)y^2 = 0$ .

$k = -1$ :

$$y = \frac{x^2}{2R}, \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x}{R}, \quad y'' = \frac{1}{R}.$$

$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = \frac{1}{R}.$$

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $x^2 - 2Ry + (1+k)y^2 = 0$ .

$k = -1$ :

$$y = \frac{x^2}{2R}, \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x}{R}, \quad y'' = \frac{1}{R}.$$

$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = \frac{1}{R}.$$

Křivost je dána vztahem

$$k = \frac{y''(0)}{(1 + (y'(0))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{R}}{1} = \frac{1}{R}.$$

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $x^2 - 2Ry + (1+k)y^2 = 0$ .

$k = -1$ :

$$y = \frac{x^2}{2R}, \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x}{R}, \quad y'' = \frac{1}{R}.$$

$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = \frac{1}{R}.$$

Křivost je dána vztahem

$$k = \frac{y''(0)}{(1 + (y'(0))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{R}}{1} = \frac{1}{R}.$$

Poloměr křivosti je  $R$ .

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $x^2 - 2Ry + (1 + k)y^2 = 0$ .

$k \neq -1$ :

Doplněním na čtverec dostáváme podobně jako dříve

$$x^2 + (1 + k) \left( y - \frac{R}{1+k} \right)^2 = \frac{R^2}{1+k}.$$



Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $x^2 - 2Ry + (1+k)y^2 = 0$ .

$k \neq -1$ :

Doplněním na čtverec dostáváme podobně jako dříve

$$x^2 + (1+k) \left( y - \frac{R}{1+k} \right)^2 = \frac{R^2}{1+k}.$$

$$\text{Odtud } \left( y - \frac{R}{1+k} \right)^2 = \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}$$

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $x^2 - 2Ry + (1+k)y^2 = 0$ .

$k \neq -1$ :

Doplněním na čtverec dostáváme podobně jako dříve

$$x^2 + (1+k) \left( y - \frac{R}{1+k} \right)^2 = \frac{R^2}{1+k}.$$

Odtud  $\left( y - \frac{R}{1+k} \right)^2 = \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}$  a

$$y = \frac{R}{1+k} \pm \sqrt{\frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}}.$$

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $x^2 - 2Ry + (1+k)y^2 = 0$ .

$k \neq -1$ :

Doplněním na čtverec dostáváme podobně jako dříve

$$x^2 + (1+k) \left( y - \frac{R}{1+k} \right)^2 = \frac{R^2}{1+k}.$$

Odtud  $\left( y - \frac{R}{1+k} \right)^2 = \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}$  a

$$y = \frac{R}{1+k} \pm \sqrt{\frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}}.$$

Pro hyperbolu je  $k < -1$  a v okolí počátku prochází větev

$y = \frac{R}{1+k} + \sqrt{\frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}}$ , pro elipsu je  $k > -1$  a v okolí počátku

prochází větev  $y = \frac{R}{1+k} - \sqrt{\frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}}$ .

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $x^2 - 2Ry + (1+k)y^2 = 0$ .

$k \neq -1$ :

$$y = \frac{R}{1+k} \pm \sqrt{\frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}} \Rightarrow$$

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $x^2 - 2Ry + (1+k)y^2 = 0$ .

$k \neq -1$ :

$$y = \frac{R}{1+k} \pm \sqrt{\frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}} \Rightarrow$$

$$y' = \pm \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( -\frac{2x}{1+k} \right),$$

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $x^2 - 2Ry + (1+k)y^2 = 0$ .

$k \neq -1$ :

$$y = \frac{R}{1+k} \pm \sqrt{\frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}} \Rightarrow$$

$$y' = \pm \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( -\frac{2x}{1+k} \right),$$

$$y'' = \mp \frac{1}{4} \left( \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k} \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left( -\frac{2x}{1+k} \right)^2 \pm \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( -\frac{2}{1+k} \right)$$

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $x^2 - 2Ry + (1+k)y^2 = 0$ .

$k \neq -1$ :

$$y = \frac{R}{1+k} \pm \sqrt{\frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}} \Rightarrow$$

$$y' = \pm \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( -\frac{2x}{1+k} \right),$$

$$y'' = \mp \frac{1}{4} \left( \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k} \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left( -\frac{2x}{1+k} \right)^2 \pm \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( -\frac{2}{1+k} \right)$$

$$y'(0) = 0 \text{ a } y''(0) = \mp \frac{1}{1+k} \cdot \frac{1+k}{R} = \mp \frac{1}{R}.$$

Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $x^2 - 2Ry + (1+k)y^2 = 0$ .

$k \neq -1$ :

$$y = \frac{R}{1+k} \pm \sqrt{\frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}} \Rightarrow$$

$$y' = \pm \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( -\frac{2x}{1+k} \right),$$

$$y'' = \mp \frac{1}{4} \left( \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k} \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left( -\frac{2x}{1+k} \right)^2 \pm \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( -\frac{2}{1+k} \right)$$

$$y'(0) = 0 \text{ a } y''(0) = \mp \frac{1}{1+k} \cdot \frac{1+k}{R} = \mp \frac{1}{R}. \text{ Křivost je dána vztahem}$$

$$k = \frac{y''(0)}{(1 + (y'(0))^2)^{\frac{3}{2}}} = \mp \frac{1}{R} = \mp \frac{1}{R}.$$



Ukažte, že  $R$  je vrcholová křivost profilu  $x^2 - 2Ry + (1+k)y^2 = 0$ .

$k \neq -1$ :

$$y = \frac{R}{1+k} \pm \sqrt{\frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}} \Rightarrow$$

$$y' = \pm \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( -\frac{2x}{1+k} \right),$$

$$y'' = \mp \frac{1}{4} \left( \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k} \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left( -\frac{2x}{1+k} \right)^2 \pm \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( -\frac{2}{1+k} \right)$$

$y'(0) = 0$  a  $y''(0) = \mp \frac{1}{1+k} \cdot \frac{1+k}{R} = \mp \frac{1}{R}$ . Křivost je dána vztahem

$$k = \frac{y''(0)}{(1 + (y'(0))^2)^{\frac{3}{2}}} = \mp \frac{1}{R} = \mp \frac{1}{R}.$$

Poloměr křivosti je  $R$ .

KONEC