Užití derivace.

Lenka Přibylová

28. prosince 2010

Ukažte, že $\psi(x,t) = A\cos\left(\omega(t-\frac{x}{v})\right)$ je řešením vlnové rovnice.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -A\sin\left(\omega(t-\frac{x}{v})\right)\cdot\omega(-\frac{1}{v})$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -A\cos\left(\omega(t-\frac{x}{v})\right)\cdot\omega^2\frac{1}{v^2}$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -A\sin\left(\omega(t-\frac{x}{v})\right)\cdot\omega$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -A\cos\left(\omega(t-\frac{x}{v})\right)\cdot\omega^2$$

Ukažte, že funkce $\psi(x,t) = f(x\pm vt)$ je řešením vlnové rovnice:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = f'(x\pm vt)\cdot\frac{\partial(x\pm vt)}{\partial x} = f'(x\pm vt)\cdot 1 = f'(x\pm vt)$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = f''(x\pm vt)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = f'(x\pm vt)\cdot\frac{\partial(x\pm vt)}{\partial t} = f'(x\pm vt)\cdot(\pm v)$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = f''(x\pm vt)\cdot(\pm v)\cdot(\pm v) = f''(x\pm vt)\cdot v^2$$

$$f''(x\pm vt) = \frac{1}{v^2}v^2 f''(x\pm vt)$$

Pro které v je funkce $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ řešením vlnové rovnice?

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -((x-2t)^2+1)^{-2}\cdot 2(x-2t)\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 2((x-2t)^2+1)^{-3}\cdot 2(x-2t)\cdot 2(x-2t) - ((x-2t)^2+1)^{-2}\cdot 2$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -((x-2t)^2+1)^{-2}\cdot 2(x-2t)\cdot(-2)$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 2((x-2t)^2+1)^{-3}\cdot(-4)(x-2t)\cdot(-4)(x-2t) - ((x-2t)^2+1)^{-2}\cdot 8$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Ukažte, že se harmonická vlna $\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ šíří prostorem rychlostí $v = \dfrac{\omega}{k}$.

Harmonická vlna $\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ má fázi $\varphi(x,t) = \omega t - kx = const$. Rychlost šíření vlny odpovídá rychlosti šíření konstantní fáze prostorem, tj.

$$\varphi'_t(x,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Z této rovnice vyjádříme rychlost $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, přitom $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \dfrac{\partial\omega t - kx}{\partial t} = \omega$ a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial\omega t - kx}{\partial x} = -k$, tedy

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{\omega}{k} = v$$

Spočtěte Taylorův polynom stupně 2 příslušný funkci $y = \sin(x^2)$ v okolí $x_0 = 0$.

$f(x) = \sin(x^2)$
$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos(x^2)\cdot(2x)$
$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\sin(x^2)\cdot(2x)\cdot(2x) + \cos(x^2)\cdot 2$
$f''(0) = 2$

Taylorův polynom stupně 2 je tedy tvaru:

$$T_2(x) = 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 = x^2.$$

Spočtěte Taylorův polynom stupně 2 příslušný horní půlkružnici $x^2 + y^2 = R^2$ v okolí $x_0 = 0$.

Dvě půlkružnice $x^2 + y^2 = R^2$ jsou v explicitním tvaru $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, horní je kladná. Hledáme tedy Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.
$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$
$f(0) = R$
$f'(x) = \dfrac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) = -x(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$f'(0) = 0$
$f''(x) = -(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - x(-\frac{1}{2})(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)$
$f''(0) = -\dfrac{1}{R}$

Taylorův polynom stupně 2 je tedy tvaru:

$$T_2(x) = R + \frac{0}{1!}x + \frac{-\frac{1}{R}}{2!}x^2 = R - \frac{1}{2R}x^2.$$

Spočtěte Taylorův polynom stupně 4 příslušný horní půlkružnici $x^2 + y^2 = R^2$ v okolí $x_0 = 0$.

Pokračujeme v rozvoji funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.
$f'''(x) = \left(-(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x) - 2x(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} - x^2(-\frac{3}{2})(R^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x) = -3x(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^3(R^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}}$
$f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = -3(R^2-x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x(-\frac{3}{2})(R^2-x^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x) - 9x^2(R^2-x^2)^{-\frac{5}{2}} - 3x^3(-\frac{5}{2})(R^2-x^2)^{-\frac{7}{2}}(-2x)$
$f^{(4)}(0) = -\dfrac{3}{R^3}$

Taylorův polynom stupně 4 je tedy tvaru:

$$T_4(x) = R + \frac{0}{1!}x + \frac{-\frac{1}{R}}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{-\frac{3}{R^3}}{4!}x^4 = R - \frac{1}{2R}x^2 - \frac{1}{8R^3}x^4.$$

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I, je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0\right)$ (proud protéká ve směru osy z, μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočtěte divergenci indukovaného magnetického.

Divergence $\vec{F}$: $\mathrm{div}\vec{F} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}$. Označme $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\vec{F}$, kde $\frac{\mu_0 I}{2\pi}$ je konstanta, kterou můžeme z divergence vytknout. Budeme se tedy zabývat jen vektorovým polem $\vec{F} = \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0\right)$.

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = \dfrac{\partial(-\frac{y}{r^2})}{\partial x} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{y}{x^2+y^2} = -y\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{-1} = -y\cdot(-1)(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$
$\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = \dfrac{\partial(\frac{x}{r^2})}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{x}{x^2+y^2} = x\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)^{-1} = x\cdot(-1)(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$
$\dfrac{\partial f_3}{\partial z} = 0$

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Divergence magnetického pole je nulová.