

Užití integrálu.

Lenka Příbylová

17. listopadu 2010

Určete intenzitu rovinné monochromatické vlny $E_y = \psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ ve vakuu.

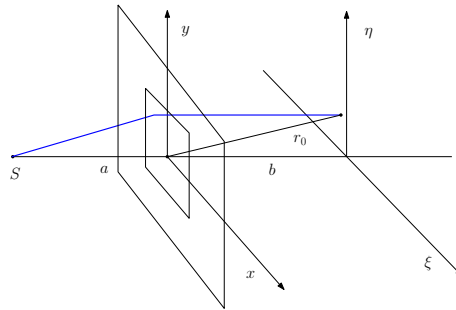
$$I = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau} \int_0^\tau E_y^2 dt = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau} \int_0^\tau A^2 \cos^2(\omega t - kx) dt$$

Sečtením rovností $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ a $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi$ dostaneme $2 \cos^2 \varphi = 1 + \cos 2\varphi$, tedy

$$\begin{aligned} I &= c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{1 + \cos(2(\omega t - kx))}{2} dt = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau} \left[t + \frac{\sin(2(\omega t - kx))}{2\omega} \right]_0^\tau = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau} \left(\tau + \frac{\sin(2(\omega\tau - kx)) - \sin(2(-kx))}{2\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} c\varepsilon_0 A^2 \left(1 + \frac{\sin(2(\omega\tau - kx)) - \sin(2(-kx))}{2\omega\tau} \right) \doteq \frac{1}{2} c\varepsilon_0 A^2 \end{aligned}$$

Druhý člen v závorce můžeme zanedbat, protože je vždy menší než $\frac{2}{2\omega\tau} = \frac{T}{2\pi\tau} < 10^{-6}$ pro reálné detektory světla, tedy nepatrný oproti 1.

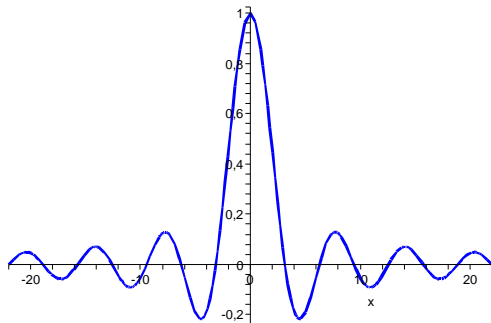
Popište obraz monochromatické vlny při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru.



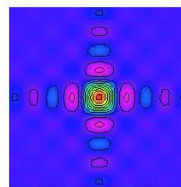
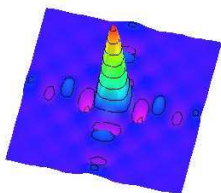
$$\psi(\xi, \eta) = A \int_{-p/2}^{p/2} \int_{-q/2}^{q/2} e^{-ik \frac{(\xi x + \eta y)}{r_0}} dy dx$$

$$\begin{aligned} \psi(\xi, \eta) &= A \int_{-p/2}^{p/2} e^{-\frac{ik}{r_0} \xi x} dx \int_{-q/2}^{q/2} e^{-\frac{ik}{r_0} \eta y} dy \\ &= A \left[\frac{e^{-\frac{ik}{r_0} \xi x}}{-\frac{ik}{r_0} \xi} \right]_{-p/2}^{p/2} \left[\frac{e^{-\frac{ik}{r_0} \eta y}}{-\frac{ik}{r_0} \eta} \right]_{-q/2}^{q/2} \\ &= A \frac{2r_0 \sin(k\xi p/2r_0)}{k\xi} \frac{2r_0 \sin(k\eta q/2r_0)}{k\eta} \\ &= A pq \frac{\sin(k\xi p/2r_0)}{k\xi p/2r_0} \frac{\sin(k\eta q/2r_0)}{k\eta q/2r_0} \end{aligned}$$

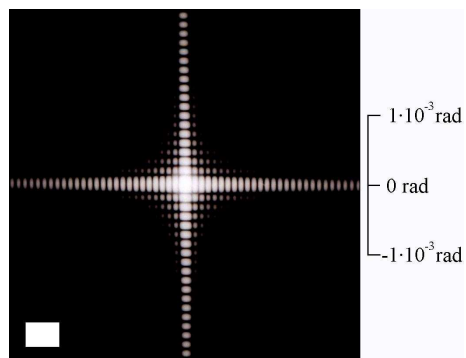
Grafem funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je



Grafem funkce $\psi(\xi, \eta) = \frac{\sin \xi}{\xi} \frac{\sin \eta}{\eta}$ je



Srovnajte se skutečným obrazem:



Protože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, je intenzita ve středu obrazu přímo úměrná $I_0 = A^2 p^2 q^2$.