Užití vektorů.

Lenka Přibylová

15. listopadu 2010

Obsah

Najděte velikost vektoru $(2, -3, 1)$.

Najděte velikost vektoru $(2, -3, 1)$.

$$|(2,-3,1)| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Najděte vektor kolmý k vektoru $(3, 7)$.

Najděte vektor kolmý k vektoru $(3, 7)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2)$ kolmý k vektoru $(3, 7)$,

Najděte vektor kolmý k vektoru $(3, 7)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2)$ kolmý k vektoru $(3, 7)$, tj.

$$(u_1, u_2) \cdot (3, 7) = 0$$

Pro kolmé vektory platí $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0.$

Najděte vektor kolmý k vektoru $(3, 7)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2)$ kolmý k vektoru $(3, 7)$, tj.

$$(u_1, u_2) \cdot (3, 7) = 0$$

odtud

$$3u_1 + 7u_2 = 0$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Najděte vektor kolmý k vektoru $(3, 7)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2)$ kolmý k vektoru $(3, 7)$, tj.

$$(u_1, u_2) \cdot (3, 7) = 0$$

odtud

$$3u_1 + 7u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = (7, -3).$$

Řešení samozřejmě není jednoznačné. Všechny vektory kolmé k vektoru $(3, 7)$ jsou násobky vektoru u.

Najděte vektor kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$.

Najděte vektor kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$,

Najděte vektor kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (2, 3, -4) = 0$$

Pro kolmé vektory platí $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Najděte vektor kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (2, 3, -4) = 0$$

odtud

$$2u_1 + 3u_2 - 4u_3 = 0.$$

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Najděte vektor kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (2, 3, -4) = 0$$

odtud

$$2u_1 + 3u_2 - 4u_3 = 0.$$

Toto je obecný tvar roviny procházející počátkem s normálovým vektorem $(2, 3, -4)$. Všechny vektory, které v této rovině leží jsou kolmé na vektor $(2, 3, -4)$.

Najděte vektor kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k vektoru $(2, 3, -4)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (2, 3, -4) = 0$$

odtud

$$2u_1 + 3u_2 - 4u_3 = 0.$$

Toto je obecný tvar roviny procházející počátkem s normálovým vektorem $(2, 3, -4)$. Všechny vektory, které v této rovině leží jsou kolmé na vektor $(2, 3, -4)$. Můžeme volit například vektor $u = (2, 0, 1)$.

Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$.

Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k oběma vektorům $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$,

Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k oběma vektorům $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 3, 0) = 0 \quad \text{a} \quad (u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 1, -2) = 0$$

Pro kolmé vektory platí $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1,3,0)$ a $(1,1,-2)$.

Hledáme vektor $u=(u_1,u_2,u_3)$ kolmý k oběma vektorům $(1,3,0)$ a $(1,1,-2)$, tj.

$$(u_1,u_2,u_3)\cdot(1,3,0)=0 \quad \text{a} \quad (u_1,u_2,u_3)\cdot(1,1,-2)=0$$

odtud

$$u_1+3u_2=0 \quad \text{a} \quad u_1+u_2-2u_3=0.$$

$$(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k oběma vektorům $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 3, 0) = 0 \quad \text{a} \quad (u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 1, -2) = 0$$

odtud

$$u_1 + 3u_2 = 0 \quad \text{a} \quad u_1 + u_2 - 2u_3 = 0.$$

$$u_1 = -3u_2 \quad \Rightarrow -3u_2 + u_2 - 2u_3 = 0,$$

Vyjádříme u_1 z první rovnice a dosadíme do druhé.

Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$.

Hledáme vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ kolmý k oběma vektorům $(1, 3, 0)$ a $(1, 1, -2)$, tj.

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 3, 0) = 0 \quad \text{a} \quad (u_1, u_2, u_3) \cdot (1, 1, -2) = 0$$

odtud

$$u_1 + 3u_2 = 0 \quad \text{a} \quad u_1 + u_2 - 2u_3 = 0.$$

$$u_1 = -3u_2 \quad \Rightarrow -3u_2 + u_2 - 2u_3 = 0,$$

tj.

$$u_3 = -u_2,$$

Najděte vektor kolmý k rovině dané vektory $(1,3,0)$ a $(1,1,-2)$.

Hledáme vektor $u=(u_1,u_2,u_3)$ kolmý k oběma vektorům $(1,3,0)$ a $(1,1,-2)$, tj.

$$(u_1,u_2,u_3)\cdot(1,3,0)=0 \quad \text{a} \quad (u_1,u_2,u_3)\cdot(1,1,-2)=0$$

odtud

$$u_1+3u_2=0 \quad \text{a} \quad u_1+u_2-2u_3=0.$$

$$u_1=-3u_2 \quad \Rightarrow -3u_2+u_2-2u_3=0,$$

tj.

$$u_3=-u_2, \quad \Rightarrow \quad u=(-3,1,-1).$$

Řešení samozřejmě není jednoznačné. Všechny vektory kolmé k rovině ϱ jsou násobky vektoru u.

Jaký úhel svírají vektory $(-3, 1, 7)$ a $(5, 1, -2)$?

Jaký úhel svírají vektory $(-3,1,7)$ a $(5,1,-2)$?

$$\varphi = \arccos \frac{(-3,1,7)\cdot(5,1,-2)}{|(-3,1,7)|\cdot|(5,1,-2)|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Jaký úhel svírají vektory $(-3, 1, 7)$ a $(5, 1, -2)$?

$$\varphi = \arccos \frac{(-3, 1, 7) \cdot (5, 1, -2)}{|(-3, 1, 7)| \cdot |(5, 1, -2)|}$$

$$= \arccos \frac{-15 + 1 - 14}{\sqrt{9 + 1 + 49}\sqrt{25 + 1 + 4}}$$

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Jaký úhel svírají vektory $(-3, 1, 7)$ a $(5, 1, -2)$?

$$\varphi = \arccos \frac{(-3, 1, 7) \cdot (5, 1, -2)}{|(-3, 1, 7)| \cdot |(5, 1, -2)|}$$

$$= \arccos \frac{-15 + 1 - 14}{\sqrt{9 + 1 + 49}\sqrt{25 + 1 + 4}}$$

$$= \arccos \frac{-28}{\sqrt{59}\sqrt{30}} \doteq \arccos(-0.66) \doteq 131,7^\circ$$

Dokažte, že platí $A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha - \operatorname{arctg}\frac{B}{A})$.

Dokažte, že platí $A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha - \operatorname{arctg}\frac{B}{A})$.

$A\cos\alpha + B\sin\alpha$

Dokažte, že platí $A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha - \operatorname{arctg}\frac{B}{A})$.

$A\cos\alpha + B\sin\alpha = (A, B)\cdot(\cos\alpha, \sin\alpha)$

Výraz můžeme zapsat jako skalární součin.

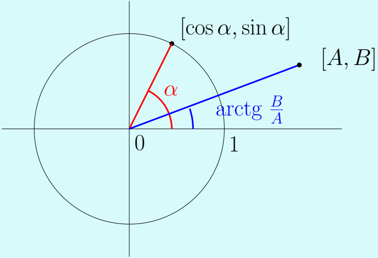
Dokažte, že platí $A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha - \operatorname{arctg}\frac{B}{A})$.

$$A\cos\alpha + B\sin\alpha = (A,B)\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha) = \sqrt{A^2+B^2}\cos\varphi$$

Podle vzorce $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ dosadíme:
$|(A,B)| = \sqrt{A^2+B^2}$, $|(\cos\alpha,\sin\alpha)| = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,
φ je úhel, který svírají vektory (A,B) a $(\cos\alpha,\sin\alpha)$.

Dokažte, že platí $A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha - \operatorname{arctg}\frac{B}{A})$.

$$A\cos\alpha + B\sin\alpha = (A,B)\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha) = \sqrt{A^2+B^2}\cos\varphi$$



$$\varphi = \alpha - \operatorname{arctg}\frac{B}{A}$$

Najděte kolmý průmět vektoru $(2, -2, 1)$ na vektor $(1, 0, 0)$.

Najděte kolmý průmět vektoru $(2, -2, 1)$ na vektor $(1, 0, 0)$.

$$\vec{c} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (1, 0, 0)}{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)} (1, 0, 0)$$

Pro průmět $\vec{c}$ vektoru $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ platí

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$$

Najděte kolmý průmět vektoru $(2, -2, 1)$ na vektor $(1, 0, 0)$.

$$\vec{c} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (1, 0, 0)}{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)} (1, 0, 0)$$

$$= \frac{2}{1} (1, 0, 0)$$

Skalární součin je definovát takto:

$$(2, -2, 1) \cdot (1, 0, 0) = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 2,$$

$$(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1.$$

Najděte kolmý průmět vektoru $(2, -2, 1)$ na vektor $(1, 0, 0)$.

$$\vec{c} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (1, 0, 0)}{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)}(1, 0, 0)$$

$$= \frac{2}{1}(1, 0, 0) = (2, 0, 0).$$

Průmět je dvojnásobkem jednotkového vektoru $(1, 0, 0)$.

Najděte kolmý průmět vektoru $(1, 2)$ na vektor $(3, -4)$.

Najděte kolmý průmět vektoru $(1,2)$ na vektor $(3,-4)$.

$$\vec{c} = \frac{(1,2)\cdot(3,-4)}{(3,-4)\cdot(3,-4)}(3,-4)$$

Pro průmět $\vec{c}$ vektoru $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ platí

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$$

Najděte kolmý průmět vektoru $(1,2)$ na vektor $(3,-4)$.

$$\vec{c} = \frac{(1,2)\cdot(3,-4)}{(3,-4)\cdot(3,-4)}(3,-4)$$

$$= \frac{-5}{25}(3,-4)$$

Skalární součin je definovát takto:

$$(1,2)\cdot(3,-4) = 1\cdot 3 + 2\cdot(-4) = -5,$$

$$(3,-4)\cdot(3,-4) = 3\cdot 3 + (-4)\cdot(-4) = 25.$$

Najděte kolmý průmět vektoru $(1,2)$ na vektor $(3,-4)$.

$$\vec{c} = \frac{(1,2)\cdot(3,-4)}{(3,-4)\cdot(3,-4)}(3,-4)$$

$$= \frac{-5}{25}(3,-4) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Průmět je pětinou vektoru $(-3,4)$.

Najděte kolmý průmět vektoru $(3, 1, 1)$ na vektor $(2, 2, 5)$.

Najděte kolmý průmět vektoru $(3,1,1)$ na vektor $(2,2,5)$.

$$\vec{c} = \frac{(3,1,1)\cdot(2,2,5)}{(2,2,5)\cdot(2,2,5)}(2,2,5)$$

Pro průmět $\vec{c}$ vektoru $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ platí

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$$

Najděte kolmý průmět vektoru $(3,1,1)$ na vektor $(2,2,5)$.

$$\vec{c} = \frac{(3,1,1)\cdot(2,2,5)}{(2,2,5)\cdot(2,2,5)}(2,2,5)$$

$$= \frac{13}{33}(2,2,5).$$

Skalární součin je definovát takto:

$$(3,1,1)\cdot(2,2,5) = 3\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 5 = 13,$$

$$(2,2,5)\cdot(2,2,5) = 2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 5\cdot 5 = 33.$$

KONEC