Práce, výkon, energie.

Jiřina Škorpíková 2020

MECHANICKÁ PRÁCE

- Pojmy práce a energie umožňuji značné zjednodušení formulace fyzikálních zákonů a popisu fyzikálních procesů.

Ve všech případech pohybu (výslednice F nulová nebo nenulová)můžeme hodnotit účinek kterékoliv síly pomocí veličiny práce dW = **F** . **dr** ,

pomocí polohových vektorů W= integr **F** . **dr**

dW **= F.dr = F.**ds $\dot{\mathbf{t}}$ **=** F.ds cos α

Kde α úhel který svírá síla **F** a tečna k dráze

Definice plynou závěry: je-li α = 0, < 90°, = 90° , > 90°

Dokažte , že práce tíhové sily (konzervativní) po uzavřené dráze se rovná nule.

Vypočítáme práci kterou vykoná tíha, působící na hmotný bod při přemístění z A do B. V prostoru je silové pole tíhy, které na h.bod působí silou **G** = -mg**k**, konstantní co do směru i velikosti. dW= **G.dr.**

W=integr. G.dr= $mgz_A - mgz_B = mg(z_A - z_B)$ Práce $_{je}$ dána součinem velikosti síly a průmětu dráhy do směru síly. Nezávisí na tvaru dráhy mezi body AB, ale jen na poloze počátečního a koncového bodu – konzervativní síly (příklady?)

Důkaz: na uzavřené dráze (elipsa) zvolíme bod 1,2, vymezují dráhu a,b.

Dokažte , že práce tíhové sily (konzervativní) po uzavřené dráze se rovná nule.

Pro konzervativní síly platí $W_{1\text{-}a\text{-}2} = W_{1\text{-}b\text{-}2}$

Při změně směru pohybu změní práce znaménko

$W_{1\text{-}b\text{-}2} = - W_{2\text{-}b\text{-}1}$

Práce konzervativní síly po uzavřené dráze je

$W_{1\text{-}a\text{-}2} + W_{2\text{-}b\text{-}1} = W_{1\text{-}a\text{-}2} - W_{1\text{-}b\text{-}2} = 0$

integrál **F . dr** = 0

Silové pole , v němž práce nezávisí na tvaru dráhy se nazývá konzervativní (např. ?)

VÝKON

- Fyzikální veličina výkon, vyjadřuje rychlost konání práce.

P =   dW/dt   / P / = J .s-1 = W (watt)

udává okamžitou hodnotu výkonu.

Pohybuje-li se bod působením **F**, pak elementární práce dW **= F.dr**,

Výkon vyjádřit P = dW/dt = **F.dr**/dr = **F . v**

Je-li výkon stálý W = P.t

Jednotky práce vyjádřené v jednotkách výkonu a času 1 Ws = 1 J,

1 Wh = 3600 J = 3,6 kJ ,   1 kWh = 3,6 MJ

Mechanická energie

- je skalární fyzikální veličina, která charakterizuje stav soustav těles.

Její přírůstek je roven práci, vykonané vnějšími silami, které působí na soustavu. $dE = E_2 - E_1 = W_{ext}$, $dE = dW_{ext} = \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{dr}$, určuje pouze rozdíl dvou energií, který je dán prací vnějších sil.

Chceme-li určit energii samotnou, musíme zvolit určitý stav základní a přiřadit mu určitou energii E_0. Energie libovolného stavu soustavy

$E = E_0 + W_{ext}$

V případě , že práce vnějších sil působících na těleso je nulová je celková energie konstantní - zákon zachování mechanické energie.

Příklad – na hmotný bod působí vnitřní a vnější síly .

- Výsledná síla je $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{int} + \mathbf{F}_{ext}$ **,** F_{ext} **=** $\mathbf{F}$ **–** F_{int}

jestliže rovnici násobíme skalárně vektorem **dr** a integrujeme:

Integrál $\mathbf{F}_{ext}$. **dr** = intgr. **F**. **dr** + integr. – $\mathbf{F}_{int}$. **dr**

= přírůstek E_k + přírůstek potenciální E_p

E_k hmotného bodu se tedy rovná práci kterou vykoná výslednice sil působící na hmotný bodm, aby byl hm.bod uveden se stavu klidu do pohybu. W = E_k = 1/2mv2

Práce vnitřních sil se projeví úbytkem potenciální energie -E_p =$\mathbf{F}_{int}$**.dr**

($\mathbf{F}_{int}$ se vyskytují pouze v soustavě těles – mluvíme o $\mathbf{E}_p$ **soustavy**

Příklady potenciální energie v poli Zákon zachování mechanické energie

- v homogenním poli $\mathbf{F}_{int} = \mathbf{G}$, $\mathbf{G}.\mathbf{dr} = -mgds$ $E_p = mgz$
- V poli pružné síly (např.kulička na pružině) $\mathbf{F}_{int} = -kx\mathbf{i}$, $-E_p = -kx\mathbf{i}\ .\ d\mathbf{r}$

integrací dostaneme ….. $E_p = ½\ kx2$

Zákon zachování mechanické energie $dE= dE_k + dE_p = d(E_k+E_p)$.

$E = E_k + E_p$. Je-li práce vnějších sil nulová je $dE = 0$ a celková mechanická energie je konstantní $E_{k1}+W_{p1}= E_{k2}+E_{p1}$=konst.

Celková energie soustavy, ať v ní probíhají jakékoliv děje, je konstantní. Různé její formy však mohou uvnitř soustavy přecházet jedna

v druhou. Zákon zachování mechanické energie platí pouze v konzervativním poli.

Dynamika soustavy hmotných bodů

Charakteristika soustavy a pojmy umožňující formulovat zákony pro pohyb soustavy jako celku.

Celková hmotnost soustavy

Vektor celkové hybnosti soustavy

Otáčivý účinek síly vzhledem k libovolnému bodu 0 – moment síly

M = r x **F,** M = F r sin α = F p (p je kolmá vzdálenost přímky **F** od bodu 0 – rameno síly). M=0 když a = 0.

Směr **M** je totožný se směrem osy jdoucí bodem 0 kolmo k rovině určené **F** a **r** .

Moment výsledné síly je roven součtu momentů jednotlivých složek

Síly vnitřní a vnější

O tom je-li určitá síla silou vnější nebo vnitřní rozhoduje její vztah k soustavě bodů.

Soustava se skládá se 3 bodů – 3.N.z. $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$,

$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$, $\mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{32} = 0$, $\mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{32} = 0$

Součet všech vnitřních sil soustavy hmotných bodů je roven nula.

$\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{r}_1 x \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{r}_2 x (-\boldsymbol{F}_{12}) = r_1 \; x \; F_{12} - r_2 \; x \; F_{12} = (r_1 - r_2) x \; F_{12} = 0$

Výsledný moment všech vnitřních sil soustavy vzhledem k libovolnému bodu v prostoru je nulový

První impulsová věta. Hmotný střed soustavy

- Pohybová rovnice pro i-tý člen soustavy $\mathbf{dp}i/dt = \mathbf{F}_i$, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i,ext} + \mathbf{F}_{i,int}$
- $\{ \mathbf{F}_{i,int} = 0 \qquad \{ d\mathbf{p}_i/dt = d/dt \; \{ \; p_i = d\mathbf{p}/dt \qquad d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_{ex}$

Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výsledné vnější síle.

Těžiště je bod, ve kterém působí celková tíha soustavy. Jeho poloha se určí –M vzhledem k libovolnému bodu se rovná součtu momentů všech sožek k témuž bodu.

polohový vektor $\mathbf{r}_0 = \{ m_i r_i / m$

Druhá impulsová věta

Zavádíme míru otáčivého pohybu tělesa – moment hybnosti /točivost/.

$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$,   kde r polohový vektor hm. bodu vzhledem k bodu 0.

$d\mathbf{b}/dt = d\mathbf{r}/dt \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\,d\mathbf{v}/dt$ vektory $d\mathbf{r}/dt$ a $\mathbf{v}$ jsou rovnoběžné = 0

$\mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$

$d\mathbf{b}/dt = \mathbf{M}$ $\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{i,ext} + \mathbf{M}_{i,int}$. $\{ \mathbf{M}_{i,int} = 0$, $\{ \mathbf{M}_{i,ext} = \mathbf{M}_{i,ext}$

$$d\mathbf{b}/dt = \mathbf{M}_{ext}$$

Časová změna momentu hybnosti soustavy hmotnných boidů vzhledem k libovolnému bodu je rovna výslednému momentu vnějších sil vzhledem k témuž bodu

Výsledky plynoucí z 1. a 2. impulsové věty

Na soustavu nepůsobí vnější síla nebo výslednice Fext=0 a Mext=0 pak takovou soustavu nazýváme je izolovanou.

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování momentu hybnosti

Oba uvedené zákony platí nezávisle během pohybu

(př. mrštíme-li nějakou tyčí).

Pohyb tuhého tělesa

- Posuvný (translační) pohyb – všechny body tělesa opisují stejné dráhy, mají stejnou rychlost a stejné zrychlení.
- Otáčivý (rotační) pohyb kolem osy - body na ose rotace jsou v klidu, ostatní body tělesa opisují kružnice se středy na ose rotace.Roviny těchto kružnic jsou kolmé na osu rotace – všechny body mají sstejnou úhlovou rychlost a stejné úhlové zrychlení.
- Kinetická energie hmotného bodu $E_k = ½\ m_i v_i 2$
- Těleso koná pouze posuvný pohyb $E_k = \{\ ½\ m i v_i 2 = v2/2\{\ m_i = ½\ mv2$
- Těleso se otáčí kolem pevné osy

Pohyb tuhého tělesa

Těleso se otáčí kolem pevné osy - úhlová rychlost je stejná, v_i = r_iʊ

E_k = { ½ $m_i v_i$2 = { ½ $m_i r_i$2 ʊ2 =ʊ 2/2 { $m_i r_i$2

{ $m_i r_i$2 = J E_k = ½ J ʊ2

Těleso koná posuvný i otáčivý pohyb

Ek = ½ mv2 + ½ J_0 ʊ2 J_0- moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm

Steinerova věta J = J_0 + ma2

Moment setrvačnosti tělesa k libovolné ose se rovná momentu setrvačnosti vzhledem k rovnoběžné ose, procházejíc těžištěm, zvětšeném o součin hmotnosti tělesa a čtverce vzdálenosti obou os.

Pohybová rovnice pro rotaci tělesa kolem pevné osy

- Součin momentu setrvačnosti tělesa vzhledem k ose rotace a úhlového zrychlení se rovná momentu všech vnějších sil vzhledem k pevné ose rotace $J\,\varepsilon = M$

- je-li M=0 je $\varepsilon = 0$ $\mho$ = konst. , těleso se otáčí konstantní úhlovou rychlostí nebo je v klidu
- je-li M = konst. Je ε = konst. $\mho = \mho_0 + \varepsilon t = \mho + M/J$ otáčivý pohyb je rovnoměrně proměnný $J\,\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}$

Je-li M=0 $\mathbf{J}\,\mho$ = konst. $(J_1\mho_1 = J\mho_2)$.

Zákon zachování momentu hybnosti rotujícího tělesa. Při změně momentu setrvačnosti tělesa se mění úhlová rychlost tak, že moment hybnosti tělesa zůstává konstantní.

Příklady -práce, výkon, mechanická energie

- Sáně jedou z kopce po dráze s_1 rovnoměrně zrychleně a pod svahem po vodorovné dráze s_2 rovnoměrně zpožděně, než zastaví. Určete součinitel tření, známe-li s_1, s_2 a úhel sklonu α.

Řešení

- Pohyb rovnoměrně zrychlený platí (v_0 =0)
- v= at   s = ½ at2   ,
- t= v/a,   s= 1/2a v2/a2 = v2/2a
- Rychlost saní na konci svahu po uražení s_1 v= odm. $2as_1$
- Pro průměty sil do zvolených os x/ G sin α - F_t =ma

Y/ N – G cos α = 0   upravit   a = g sin α – kg cos α

v = odm $2s_1$ g (sin α– k cos α) F_t = kN

- Energie na konci svahu E_k = ½ mv2 po zastavení v rovině je E_k =0. Úbytek E_k = práci vykonanou F_t na dráze s_2.
- Platí ½ mv2 = $F_t s_2$ F_t = kN = kG= k mg
- 1/2mv2 = k mg s_2 dosazením za rychlost v dostaneme
- ½ $2s_1 g(\sin\alpha - k\cos\alpha) = k\, g\, s_2$
- $s_1 \sin\alpha - k\, s_1 \cos\alpha = k\, s_2$
- $k = s_1 \sin\alpha / s_2 + s_1 \cos\alpha$

Příklad

- Letadlo se rozjíždí po zemi a pohybuje se rovnoměrně zrychleně. Od země se odpoutá při rychlosti v = 108 km/h. Této rychlosti dosáhne za dobu t=20s.

Určete:

- A) výkon motoru letadla v okamžiku vzletu
- B) průměrný výkon motoru během pohybu po zemi.

Hmotnost letadla m =1960 kg, součinitel tření k= 0,05

Řešení

- Okamžitý výkon P= **F.v** . Je-li mezi vektory F,v úhel α=0, platí P= F.v
- Tažnou silou motoru F určíme s 2. pohybového zákonu $F – F_t = ma$,

  kde síla tření $F_t = k\,mg$. Platí tedy $F = m(k\,g +a)$
- Zrychlení letadla v tomto případě (a= konst) je a= v/t.
- Okamžitý výkon je $P= mv\,(k\,g +v/t) = 17{,}6.\ 10^{4}$ W

Průměrný výkon je určen podílem vykonané práce a k tomu potřebného času. P= W/t = F.s/t = F.a.t2/2t = F.a.t/2 =1/2F.v = F.v =

$= 8{,}8.\ 10^{4}$ W

Příklad

- Po hladké vodorovné rovině se pohybují dvě tělesa, spojená nití. Na těleso hmotnosti m_1 působí síla $\mathbf{F}_1$, na těleso hmotnosti m_2 působí síla $\mathbf{F}_2$. Určete zrychlení těles a sílu, kterou je napínaná nit.

(2 bedničky spojené nití na podlaze, nákres osa x – podlaha, kolmo na ose x osa y).

Kontrola z minulé hodiny

Lyžař sjíždí se svahu, který má sklon 30 stupňů. Odpor vzduchu závisí na rychlosti podle vztahu F_o = Av2, kde A = konst.

Při rychlosti v´ = 1 m s-1 je F_o´ = 0,63 N.

Určete maximální rychlost lyžaře. Hmotnost lyžaře je 90 kg, součinitel tření lyží na sněhu je 0,1.

Příklad

- Střela o hmotnosti m=0,02 kg byla vystřelena ve vodorovném směru do balistického kyvadla hmotnosti M = 5 kg. Po nárazu se těžiště kyvadla zvedlo o h = 0,1 m. Určete rychlost střely.