

Práce, výkon, energie.

Jiřina Škorpíková 2020

MECHANICKÁ PRÁCE

- Pojmy práce a energie umožňují značné zjednodušení formulace fyzikálních zákonů a popisu fyzikálních procesů.

Ve všech případech pohybu (výslednice F nulová nebo nenulová) můžeme hodnotit účinek kterékoliv síly pomocí veličiny práce $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$,

pomocí polohových vektorů $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cdot ds \cdot \hat{\mathbf{t}} = F \cdot ds \cos \alpha$$

Kde α úhel který svírá síla F a tečna k dráze

Definice plynou závěry: je-li $\alpha = 0, < 90^\circ, = 90^\circ, > 90^\circ$

Dokažte , že práce tíhové síly (konzervativní) po uzavřené dráze se rovná nule.

Vypočítáme práci kterou vykoná tíha, působící na hmotný bod při přemístění z A do B. V prostoru je silové pole tíhy, které na h.bod působí silou $\mathbf{G} = -mg\mathbf{k}$, konstantní co do směru i velikosti. $dW = \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$.

$W = \int \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = mgz_A - mgz_B = mg(z_A - z_B)$ Práce je dána součinem velikosti síly a průmětu dráhy do směru síly. Nezávisí na tvaru dráhy mezi body AB, ale jen na poloze počátečního a koncového bodu – konzervativní síly (příklady?)

Důkaz: na uzavřené dráze (elipsa) zvolíme bod 1,2, vymezují dráhu a,b.

Dokažte , že práce tíhové síly
(konzervativní) po uzavřené dráze se
rovná nule.

Pro konzervativní síly platí $W_{1-a-2} = W_{1-b-2}$

Při změně směru pohybu změní práce znaménko

$$W_{1-b-2} = - W_{2-b-1}$$

Práce konzervativní síly po uzavřené dráze je

$$W_{1-a-2} + W_{2-b-1} = W_{1-a-2} - W_{1-b-2} = 0$$

$$\text{integrál } \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = 0$$

Silové pole , v němž práce nezávisí na tvaru dráhy se nazývá
konzervativní (např. ?)

VÝKON

- Fyzikální veličina výkon, vyjadřuje rychlost konání práce.

$$P = dW/dt \quad / P / = J \cdot s^{-1} = W \text{ (watt)}$$

udává okamžitou hodnotu výkonu.

Pohybuje-li se bod působením \mathbf{F} , pak elementární práce $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$,

$$\text{Výkon vyjádřit } P = dW/dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Je-li výkon stálý $W = P \cdot t$

Jednotky práce vyjádřené v jednotkách výkonu a času $1 \text{ Ws} = 1 \text{ J}$,

$$1 \text{ Wh} = 3600 \text{ J} = 3,6 \text{ kJ}, \quad 1 \text{ kWh} = 3,6 \text{ MJ}$$

Mechanická energie

- je skalární fyzikální veličina, která charakterizuje stav soustav těles.

Její přírůstek je roven práci, vykonané vnějšími silami, které působí na soustavu. $dE = E_2 - E_1 = W_{\text{ext}}$, $dE = dW_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}$, určuje pouze rozdíl dvou energií, který je dán prací vnějších sil.

Chceme-li určit energii samotnou, musíme zvolit určitý stav základní a přiřadit mu určitou energii E_0 . Energie libovolného stavu soustavy

$$E = E_0 + W_{\text{ext}}$$

V případě , že práce vnějších sil působících na těleso je nulová je celková energie konstantní - zákon zachování mechanické energie.

Příklad – na hmotný bod působí vnitřní a vnější síly .

- Výsledná síla je $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{int}} + \mathbf{F}_{\text{ext}}$, $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_{\text{int}}$

jestliže rovnici násobíme skalárně vektorem $d\mathbf{r}$ a integrujeme:

$$\text{Integrál } \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r} = \text{intgr. } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \text{integr. } - \mathbf{F}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \text{přírůstek } E_k + \text{přírůstek potenciální } E_p$$

E_k hmotného bodu se tedy rovná práci kterou vykoná výslednice sil působící na hmotný bod, aby byl hm.bod uveden se stavu klidu do pohybu. $W = E_k = 1/2mv^2$

Práce vnitřních sil se projeví úbytkem potenciální energie $-E_p = \mathbf{F}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{r}$

(\mathbf{F}_{int} se vyskytují pouze v soustavě těles – mluvíme o E_p soustavy

Příklady potenciální energie v poli

Zákon zachování mechanické energie

- v homogenním poli $\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{G}$, $\mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = -mgds$ $E_p = mgz$
- V poli pružné síly (např.kulička na pružině) $\mathbf{F}_{\text{int}} = -kxi$, $-E_p = -kxi \cdot dr$
integrací dostaneme $E_p = \frac{1}{2} kx^2$

Zákon zachování mechanické energie $dE = dE_k + dE_p = d(E_k + E_p)$.

$E = E_k + E_p$. Je-li práce vnějších sil nulová je $dE = 0$ a celková mechanická energie je konstantní $E_{k1} + W_{p1} = E_{k2} + E_{p2} = \text{konst.}$

Celková energie soustavy, ať v ní probíhají jakékoliv děje, je konstantní. Různé její formy však mohou uvnitř soustavy přecházet jedna v druhou. Zákon zachování mechanické energie platí pouze v konzervativním poli.

Dynamika soustavy hmotných bodů

Charakteristika soustavy a pojmy umožňující formulovat zákony pro pohyb soustavy jako celku.

Celková hmotnost soustavy

Vektor celkové hybnosti soustavy

Otáčivý účinek síly vzhledem k libovolnému bodu 0 – moment síly

$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, $M = F r \sin \alpha = F p$ (p je kolmá vzdálenost přímky \mathbf{F} od bodu 0 – rameno síly). $M=0$ když $\alpha = 0$.

Směr \mathbf{M} je totožný se směrem osy jdoucí bodem 0 kolmo k rovině určené \mathbf{F} a \mathbf{r} .

Moment výsledné síly je roven součtu momentů jednotlivých složek

Síly vnitřní a vnější

O tom je-li určitá síla silou vnější nebo vnitřní rozhoduje její vztah k soustavě bodů.

Soustava se skládá se 3 bodů – 3.N.z. $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$,

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0, \quad \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{32} = 0, \quad \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{31} = 0$$

Součet všech vnitřních sil soustavy hmotných bodů je roven nula.

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}_{12}) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} = 0$$

Výsledný moment všech vnitřních sil soustavy vzhledem k libovolnému bodu v prostoru je nulový

První impulsová věta. Hmotný střed soustavy

- Pohybová rovnice pro i-tý člen soustavy $\mathbf{dp}_i/dt = \mathbf{F}_i$, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i,\text{ext}} + \mathbf{F}_{i,\text{int}}$
- $\{ \mathbf{F}_{i,\text{int}} = 0 \quad \{ \mathbf{dp}_i/dt = d/dt \{ \mathbf{p}_i = \mathbf{dp}/dt \quad \mathbf{dp}/dt = \mathbf{F}_{\text{ex}}$

Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výsledné vnější síle.

Těžiště je bod, ve kterém působí celková tíha soustavy. Jeho poloha se určí $-M$ vzhledem k libovolnému bodu se rovná součtu momentů všech sožek k témuž bodu.

polohový vektor $\mathbf{r}_0 = \{ m_i \mathbf{r}_i / m$

Druhá impulsová věta

Zavádíme míru otáčivého pohybu tělesa – moment hybnosti /točivost/.

$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, kde \mathbf{r} polohový vektor hm. bodu vzhledem k bodu 0.

$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ vektory $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ a \mathbf{v} jsou rovnoběžné = 0

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{M} \quad \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{i,\text{ext}} + \mathbf{M}_{i,\text{int}}. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_{i,\text{int}} = 0, \\ \mathbf{M}_{i,\text{ext}} = \mathbf{M}_{i,\text{ext}} \end{array} \right.$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{ext}}$$

Časová změna momentu hybnosti soustavy hmotných bodů vzhledem k libovolnému bodu je rovna výslednému momentu vnějších sil vzhledem k témuž bodu

Výsledky plynoucí z 1. a 2. impulsové věty

Na soustavu nepůsobí vnější síla nebo výslednice $F_{ext}=0$ a $M_{ext}=0$ pak takovou soustavu nazýváme je izolovanou.

Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování momentu hybnosti

Oba uvedené zákony platí nezávisle během pohybu

(př. mrštíme-li nějakou tyčí).

Pohyb tuhého tělesa

- Posuvný (translační) pohyb – všechny body tělesa opisují stejné dráhy, mají stejnou rychlost a stejné zrychlení.
- Otáčivý (rotační) pohyb kolem osy - body na ose rotace jsou v klidu, ostatní body tělesa opisují kružnice se středy na ose rotace. Roviny těchto kružnic jsou kolmé na osu rotace – všechny body mají stejnou úhlovou rychlost a stejné úhlové zrychlení.
- Kinetická energie hmotného bodu $E_k = \frac{1}{2} m_i v_i^2$
- Těleso koná pouze posuvný pohyb $E_k = \left\{ \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{v^2}{2} \right\} m_i = \frac{1}{2} m v^2$
- Těleso se otáčí kolem pevné osy

Pohyb tuhého tělesa

Těleso se otáčí kolem pevné osy - úhlová rychlost je stejná, $v_i = r_i \omega$

$$E_k = \left\{ \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right\} = \left\{ \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \right\} = \frac{\omega^2}{2} \left\{ m_i r_i^2 \right\}$$

$$\left\{ m_i r_i^2 \right\} = J \quad E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Těleso koná posuvný i otáčivý pohyb

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2 \quad J_0 - \text{moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm}$$

Steinerova věta $J = J_0 + m a^2$

Moment setrvačnosti tělesa k libovolné ose se rovná momentu setrvačnosti vzhledem k rovnoběžné ose, procházející těžištěm, zvětšeném o součin hmotnosti tělesa a čtverce vzdálenosti obou os.

Pohybová rovnice pro rotaci tělesa kolem pevné osy

- Součin momentu setrvačnosti tělesa vzhledem k ose rotace a úhlového zrychlení se rovná momentu všech vnějších sil vzhledem k pevné ose rotace $J \varepsilon = M$
- je-li $M=0$ je $\varepsilon = 0$ $\omega = \text{konst.}$, těleso se otáčí konstantní úhlovou rychlostí nebo je v klidu
- je-li $M = \text{konst.}$ je $\varepsilon = \text{konst.}$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \omega + M/J$ otáčivý pohyb je rovnoměrně proměnný $J \varepsilon = M$

$$\text{Je-li } M=0 \quad J \omega = \text{konst.} \quad (J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2).$$

Zákon zachování momentu hybnosti rotujícího tělesa. Při změně momentu setrvačnosti tělesa se mění úhlová rychlost tak, že moment hybnosti tělesa zůstává konstantní.

Příklady -práce, výkon, mechanická energie

- Sáně jedou z kopce po dráze s_1 rovnoměrně zrychleně a pod svahem po vodorovné dráze s_2 rovnoměrně zpžděně, než zastaví. Určete součinitel tření, známe-li s_1 , s_2 a úhel sklonu α .

Řešení

- Pohyb rovnoměrně zrychlený platí ($v_0 = 0$)
- $v = at$ $s = \frac{1}{2} at^2$,
- $t = v/a$, $s = \frac{1}{2} a v^2/a^2 = v^2/2a$
- Rychlost saní na konci svahu po uražení s_1 $v = \text{odm. } 2as_1$
- Pro průměty sil do zvolených os $x/$ $G \sin \alpha - F_t = ma$

$$Y/ \quad N - G \cos \alpha = 0 \quad \text{upravit} \quad a = g \sin \alpha - k g \cos \alpha$$

$$v = \text{odm } 2s_1 g (\sin \alpha - k \cos \alpha) \qquad F_t = kN$$

- Energie na konci svahu $E_k = \frac{1}{2} mv^2$ po zastavení v rovině je $E_k = 0$.
Úbytek $E_k =$ práci vykonanou F_t na dráze s_2 .
- Platí $\frac{1}{2} mv^2 = F_t s_2$ $F_t = kN = kG = k mg$
- $\frac{1}{2} mv^2 = k mg s_2$ dosazením za rychlost v dostaneme
- $\frac{1}{2} 2s_1 g (\sin \alpha - k \cos \alpha) = k g s_2$
- $s_1 \sin \alpha - k s_1 \cos \alpha = k s_2$
- $k = s_1 \sin \alpha / s_2 + s_1 \cos \alpha$

Příklad

- Letadlo se rozjíždí po zemi a pohybuje se rovnoměrně zrychleně. Od země se odpoutá při rychlosti $v = 108 \text{ km/h}$. Této rychlosti dosáhne za dobu $t=20\text{s}$.

Určete:

- A) výkon motoru letadla v okamžiku vzletu
- B) průměrný výkon motoru během pohybu po zemi.

Hmotnost letadla $m = 1960 \text{ kg}$, součinitel tření $k = 0,05$

Řešení

- Okamžitý výkon $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Je-li mezi vektory F, v úhel $\alpha = 0$, platí $P = F \cdot v$
- Tažnou silou motoru F určíme s 2. pohybového zákonu $F - F_t = ma$, kde síla tření $F_t = k mg$. Platí tedy $F = m(kg + a)$
- Zrychlení letadla v tomto případě ($a = \text{konst}$) je $a = v/t$.
- Okamžitý výkon je $P = mv(kg + v/t) = 17,6 \cdot 10^4 \text{ W}$

Průměrný výkon je určen podílem vykonané práce a k tomu potřebného času. $P = W/t = F \cdot s/t = F \cdot a \cdot t^2/2t = F \cdot a \cdot t/2 = 1/2 F \cdot v = F \cdot v = 8,8 \cdot 10^4 \text{ W}$

Příklad

- Po hladké vodorovné rovině se pohybují dvě tělesa, spojená nití. Na těleso hmotnosti m_1 působí síla \mathbf{F}_1 , na těleso hmotnosti m_2 působí síla \mathbf{F}_2 . Určete zrychlení těles a sílu, kterou je napínaná nit.

(2 bedničky spojené nití na podlaze, nákres osa x – podlaha, kolmo na ose x osa y).

Kontrola z minulé hodiny

Lyžař sjíždí se svahu, který má sklon 30 stupňů. Odpor vzduchu závisí na rychlosti podle vztahu $F_o = Av^2$, kde $A = \text{konst.}$

Při rychlosti $v' = 1 \text{ m s}^{-1}$ je $F_o' = 0,63 \text{ N}$.

Určete maximální rychlost lyžaře. Hmotnost lyžaře je 90 kg, součinitel tření lyží na sněhu je 0,1.

Příklad

- Střela o hmotnosti $m=0,02$ kg byla vystřelena ve vodorovném směru do balistického kyvadla hmotnosti $M = 5$ kg. Po nárazu se těžiště kyvadla zvedlo o $h = 0,1$ m. Určete rychlost střely.