

Užití derivace.

Lenka Přibylová

28. prosince 2010

Obsah

$\psi(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$ jako řešení vlnové rovnice.	3
$\psi(x, t) = f(x \pm vt)$ jako řešení vlnové rovnice	9
$\psi(x, t) = \frac{1}{(x - 2t)^2 + 1}$ jako řešení vlnové rovnice.	17
Šíření harmonické vlny prostorem.	23
Taylorův rozvoj funkce $\sin(x^2)$ v okolí počátku.	29
Taylorův rozvoj kružnice.	34
Taylorův rozvoj kružnice.	40
Spočtete divergenci indukovaného magnetického pole.	45

Ukažte, že $\psi(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$ je řešením vlnové rovnice.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Ukažte, že $\psi(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$ je řešením vlnové rovnice.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \cdot \omega\left(-\frac{1}{v}\right)$$

Nejprve najdeme první derivaci podle proměnné x . Jde o složenou funkci.

Ukažte, že $\psi(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$ je řešením vlnové rovnice.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \cdot \omega\left(-\frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \cdot \omega^2 \frac{1}{v^2}$$

Výsledek znovu derivujeme podle proměnné x .

Ukažte, že $\psi(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$ je řešením vlnové rovnice.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \cdot \omega\left(-\frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \cdot \omega^2 \frac{1}{v^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \cdot \omega$$

Najdeme první derivaci podle proměnné t . Jde o složenou funkci.

Ukažte, že $\psi(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$ je řešením vlnové rovnice.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \cdot \omega\left(-\frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \cdot \omega^2 \frac{1}{v^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \cdot \omega$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \cdot \omega^2$$

Výsledek znovu derivujeme podle proměnné t .

Ukažte, že $\psi(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$ je řešením vlnové rovnice.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \cdot \omega\left(-\frac{1}{v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \cdot \omega^2 \frac{1}{v^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \cdot \omega$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) \cdot \omega^2$$

Odtud vidíme, že funkce $\psi(x, t)$ opravdu řeší vlnovou rovnici.

Ukažte, že funkce $\psi(x, t) = f(x \pm vt)$ je řešením vlnové rovnice:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Ukažte, že funkce $\psi(x, t) = f(x \pm vt)$ je řešením vlnové rovnice:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x \pm vt) \cdot \frac{\partial(x \pm vt)}{\partial x}$$

Nejprve najdeme první derivaci podle proměnné x . Jde o složenou funkci.

Ukažte, že funkce $\psi(x, t) = f(x \pm vt)$ je řešením vlnové rovnice:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x \pm vt) \cdot \frac{\partial(x \pm vt)}{\partial x} = f'(x \pm vt) \cdot 1 = f'(x \pm vt)$$

Vypočtením druhého členu zjednodušíme.

Ukažte, že funkce $\psi(x, t) = f(x \pm vt)$ je řešením vlnové rovnice:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x \pm vt) \cdot \frac{\partial(x \pm vt)}{\partial x} = f'(x \pm vt) \cdot 1 = f'(x \pm vt)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x \pm vt)$$

Výsledek znovu derivujeme podle proměnné x .

Ukažte, že funkce $\psi(x, t) = f(x \pm vt)$ je řešením vlnové rovnice:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x \pm vt) \cdot \frac{\partial(x \pm vt)}{\partial x} = f'(x \pm vt) \cdot 1 = f'(x \pm vt)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x \pm vt)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = f'(x \pm vt) \cdot \frac{\partial(x \pm vt)}{\partial t}$$

Najdeme první derivaci podle proměnné t . Jde o složenou funkci.

Ukažte, že funkce $\psi(x, t) = f(x \pm vt)$ je řešením vlnové rovnice:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x \pm vt) \cdot \frac{\partial(x \pm vt)}{\partial x} = f'(x \pm vt) \cdot 1 = f'(x \pm vt)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x \pm vt)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = f'(x \pm vt) \cdot \frac{\partial(x \pm vt)}{\partial t} = f'(x \pm vt) \cdot (\pm v)$$

Vypočtením druhého členu zjednodušíme.

Ukažte, že funkce $\psi(x, t) = f(x \pm vt)$ je řešením vlnové rovnice:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x \pm vt) \cdot \frac{\partial(x \pm vt)}{\partial x} = f'(x \pm vt) \cdot 1 = f'(x \pm vt)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x \pm vt)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = f'(x \pm vt) \cdot \frac{\partial(x \pm vt)}{\partial t} = f'(x \pm vt) \cdot (\pm v)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f''(x \pm vt) \cdot (\pm v) \cdot (\pm v) = f''(x \pm vt) \cdot v^2$$

Výsledek znovu derivujeme podle proměnné t .

Ukažte, že funkce $\psi(x, t) = f(x \pm vt)$ je řešením vlnové rovnice:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x \pm vt) \cdot \frac{\partial(x \pm vt)}{\partial x} = f'(x \pm vt) \cdot 1 = f'(x \pm vt)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x \pm vt)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = f'(x \pm vt) \cdot \frac{\partial(x \pm vt)}{\partial t} = f'(x \pm vt) \cdot (\pm v)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f''(x \pm vt) \cdot (\pm v) \cdot (\pm v) = f''(x \pm vt) \cdot v^2$$

$$f''(x \pm vt) = \frac{1}{v^2} v^2 f''(x \pm vt)$$

Odtud vidíme, že funkce $\psi(x, t)$ opravdu řeší vlnovou rovnici.

Pro které v je funkce $\psi(x, t) = \frac{1}{(x - 2t)^2 + 1}$ řešením vlnové rovnice?

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Pro které v je funkce $\psi(x, t) = \frac{1}{(x - 2t)^2 + 1}$ řešením vlnové rovnice?

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -((x - 2t)^2 + 1)^{-2} \cdot 2(x - 2t)$$

Nejprve najdeme první derivaci podle proměnné x . Jde o složenou funkci.

Pro které v je funkce $\psi(x, t) = \frac{1}{(x - 2t)^2 + 1}$ řešením vlnové rovnice?

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -((x - 2t)^2 + 1)^{-2} \cdot 2(x - 2t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 2((x - 2t)^2 + 1)^{-3} \cdot 2(x - 2t) \cdot 2(x - 2t) - ((x - 2t)^2 + 1)^{-2} \cdot 2$$

Výsledek znovu derivujeme podle proměnné x jako součin.

Pro které v je funkce $\psi(x, t) = \frac{1}{(x - 2t)^2 + 1}$ řešením vlnové rovnice?

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -((x - 2t)^2 + 1)^{-2} \cdot 2(x - 2t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 2((x - 2t)^2 + 1)^{-3} \cdot 2(x - 2t) \cdot 2(x - 2t) - ((x - 2t)^2 + 1)^{-2} \cdot 2$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -((x - 2t)^2 + 1)^{-2} \cdot 2(x - 2t) \cdot (-2)$$

Najdeme první derivaci podle proměnné t . Jde o složenou funkci.

Pro které v je funkce $\psi(x, t) = \frac{1}{(x - 2t)^2 + 1}$ řešením vlnové rovnice?

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -((x - 2t)^2 + 1)^{-2} \cdot 2(x - 2t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 2((x - 2t)^2 + 1)^{-3} \cdot 2(x - 2t) \cdot 2(x - 2t) - ((x - 2t)^2 + 1)^{-2} \cdot 2$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -((x - 2t)^2 + 1)^{-2} \cdot 2(x - 2t) \cdot (-2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} =$$

$$2((x - 2t)^2 + 1)^{-3} \cdot (-4)(x - 2t) \cdot (-4)(x - 2t) - ((x - 2t)^2 + 1)^{-2} \cdot 8$$

Výsledek znovu derivujeme podle proměnné t jako součin.

Pro které v je funkce $\psi(x, t) = \frac{1}{(x - 2t)^2 + 1}$ řešením vlnové rovnice?

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -((x - 2t)^2 + 1)^{-2} \cdot 2(x - 2t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 2((x - 2t)^2 + 1)^{-3} \cdot 2(x - 2t) \cdot 2(x - 2t) - ((x - 2t)^2 + 1)^{-2} \cdot 2$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -((x - 2t)^2 + 1)^{-2} \cdot 2(x - 2t) \cdot (-2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} =$$

$$2((x - 2t)^2 + 1)^{-3} \cdot (-4)(x - 2t) \cdot (-4)(x - 2t) - ((x - 2t)^2 + 1)^{-2} \cdot 8$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Odtud vidíme, že funkce $\psi(x, t)$ opravdu řeší vlnovou rovnici pro $v = 2$.

Ukažte, že se harmonická vlna $\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ šíří
prostorem rychlostí $v = \frac{\omega}{k}$.

Ukažte, že se harmonická vlna $\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ šíří
prostorem rychlostí $v = \frac{\omega}{k}$.

Harmonická vlna $\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ má fázi
 $\varphi(x, t) = \omega t - kx$

Ukažte, že se harmonická vlna $\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ šíří
prostorem rychlostí $v = \frac{\omega}{k}$.

Harmonická vlna $\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ má fázi
 $\varphi(x, t) = \omega t - kx = \text{const.}$

Rychlost šíření vlny odpovídá rychlosti šíření konstantní fáze
prostorem.

Ukažte, že se harmonická vlna $\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ šíří
prostorem rychlostí $v = \frac{\omega}{k}$.

Harmonická vlna $\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ má fázi

$$\varphi(x, t) = \omega t - kx = \text{const.}$$

$$\varphi'_t(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Tuto rychlost spočteme pomocí derivace konstantní fáze podle času.

Ukažte, že se harmonická vlna $\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ šíří
prostorem rychlostí $v = \frac{\omega}{k}$.

Harmonická vlna $\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ má fázi

$$\varphi(x, t) = \omega t - kx = \text{const.}$$

$$\varphi'_t(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}$$

Z této rovnice vyjádříme rychlost šíření konstantní fáze prostorem

$$\frac{dx}{dt}.$$

Ukažte, že se harmonická vlna $\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ šíří
prostorem rychlostí $v = \frac{\omega}{k}$.

Harmonická vlna $\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ má fázi

$$\varphi(x, t) = \omega t - kx = \text{const.}$$

$$\varphi'_t(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\omega}{k} = v$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \omega t - kx}{\partial t} = \omega$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \omega t - kx}{\partial x} = -k = -\frac{\omega}{v}$$

Spočtěte Taylorův polynom stupně 2 příslušný funkci $y = \sin(x^2)$ v okolí $x_0 = 0$.

Spočtěte Taylorův polynom stupně 2 příslušný funkci $y = \sin(x^2)$ v okolí $x_0 = 0$.

$$f(x) = \sin(x^2)$$

$$f(0) = 0$$

Vypočteme funkční hodnotu funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 0$:

$$f(0) = \sin(0^2) = \sin(0) = 0.$$

Spočtěte Taylorův polynom stupně 2 příslušný funkci $y = \sin(x^2)$ v okolí $x_0 = 0$.

$$f(x) = \sin(x^2)$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot (2x)$$

$$f'(0) = 0$$

Spočítáme první derivaci. Funkční hodnota je nulová.

Spočtěte Taylorův polynom stupně 2 příslušný funkci $y = \sin(x^2)$ v okolí $x_0 = 0$.

$$f(x) = \sin(x^2)$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot (2x)$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\sin(x^2) \cdot (2x) \cdot (2x) + \cos(x^2) \cdot 2$$

$$f''(0) = 2$$

Spočítáme druhou derivaci a funkční hodnotu.

Spočtěte Taylorův polynom stupně 2 příslušný funkci $y = \sin(x^2)$ v okolí $x_0 = 0$.

$$f(x) = \sin(x^2)$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot (2x)$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\sin(x^2) \cdot (2x) \cdot (2x) + \cos(x^2) \cdot 2$$

$$f''(0) = 2$$

Taylorův polynom stupně 2 je tedy tvaru:

$$T_2(x) = 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 = x^2.$$

Spočtete Taylorův polynom stupně 2 příslušný horní půlkružnici $x^2 + y^2 = R^2$ v okolí $x_0 = 0$.

Spočtěte Taylorův polynom stupně 2 příslušný horní půlkružnici $x^2 + y^2 = R^2$ v okolí $x_0 = 0$.

Hledáme Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Dvě půlkružnice $x^2 + y^2 = R^2$ jsou v explicitním tvaru $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, horní je kladná.

Spočtěte Taylorův polynom stupně 2 příslušný horní půlkružnici $x^2 + y^2 = R^2$ v okolí $x_0 = 0$.

Hledáme Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$f(0) = R$$

Vypočteme funkční hodnotu funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 0$.

Spočtěte Taylorův polynom stupně 2 příslušný horní půlkružnici $x^2 + y^2 = R^2$ v okolí $x_0 = 0$.

Hledáme Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$f(0) = R$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -x(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(0) = 0$$

Spočítáme první derivaci. Funkční hodnota je nulová.

Spočtěte Taylorův polynom stupně 2 příslušný horní půlkružnici $x^2 + y^2 = R^2$ v okolí $x_0 = 0$.

Hledáme Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$f(0) = R$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -x(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - x\left(-\frac{1}{2}\right)(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x)$$

$$f''(0) = -\frac{1}{R}$$

Spočítáme druhou derivaci a funkční hodnotu.

Spočtěte Taylorův polynom stupně 2 příslušný horní půlkružnici $x^2 + y^2 = R^2$ v okolí $x_0 = 0$.

Hledáme Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$f(0) = R$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -x(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - x(-\frac{1}{2})(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x)$$

$$f''(0) = -\frac{1}{R}$$

Taylorův polynom stupně 2 je tedy tvaru:

$$T_2(x) = R + \frac{0}{1!}x + \frac{-\frac{1}{R}}{2!}x^2 = R - \frac{1}{2R}x^2.$$

Spočtete Taylorův polynom stupně 4 příslušný horní půlkružnici $x^2 + y^2 = R^2$ v okolí $x_0 = 0$.

Spočtěte Taylorův polynom stupně 4 příslušný horní půlkružnici $x^2 + y^2 = R^2$ v okolí $x_0 = 0$.

Pokračujeme v rozvoji funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Dvě půlkružnice $x^2 + y^2 = R^2$ jsou v explicitním tvaru $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, horní je kladná.

Spočtěte Taylorův polynom stupně 4 příslušný horní půlkružnici $x^2 + y^2 = R^2$ v okolí $x_0 = 0$.

Pokračujeme v rozvoji funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$\begin{aligned}f'''(x) &= \left(-(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \right)' = \\&= \frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) - 2x(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} - x^2 \left(-\frac{3}{2} \right) (R^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2x) \\&= -3x(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^3(R^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}} \\f'''(0) &= 0\end{aligned}$$

Z druhé derivace vypočteme třetí derivaci funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 0$ a její funkční hodnotu, je nulová.

Spočtěte Taylorův polynom stupně 4 příslušný horní půlkružnici $x^2 + y^2 = R^2$ v okolí $x_0 = 0$.

Pokračujeme v rozvoji funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$\begin{aligned}f'''(x) &= \left(- (R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2 (R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)' = \\&= \frac{1}{2} (R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) - 2x (R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} - x^2 \left(-\frac{3}{2}\right) (R^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2x) \\&= -3x (R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^3 (R^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

$$f'''(0) = 0$$

$$\begin{aligned}f^{(4)}(x) &= -3 (R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x \left(-\frac{3}{2}\right) (R^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}} (-2x) \\&\quad - 9x^2 (R^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}} - 3x^3 \left(-\frac{5}{2}\right) (R^2 - x^2)^{-\frac{7}{2}} (-2x)\end{aligned}$$

$$f^{(4)}(0) = -\frac{3}{R^3}$$

Spočítáme čtvrtou derivaci a její funkční hodnotu.

Spočtěte Taylorův polynom stupně 4 příslušný horní půlkružnici
 $x^2 + y^2 = R^2$ v okolí $x_0 = 0$.

Pokračujeme v rozvoji funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \left(-(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \right)' = \\ &= \frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) - 2x(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} - x^2 \left(-\frac{3}{2} \right) (R^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2x) \\ &= -3x(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^3(R^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

$$f'''(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= -3(R^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x \left(-\frac{3}{2} \right) (R^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}} (-2x) \\ &\quad - 9x^2(R^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}} - 3x^3 \left(-\frac{5}{2} \right) (R^2 - x^2)^{-\frac{7}{2}} (-2x) \end{aligned}$$

$$f^{(4)}(0) = -\frac{3}{R^3}$$

Taylorův polynom stupně 4 je tedy tvaru:

$$T_4(x) = R + \frac{0}{1!}x + \frac{-\frac{1}{R}}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{-\frac{3}{R^3}}{4!}x^4 = R - \frac{1}{2R}x^2 - \frac{1}{8R^3}x^4.$$

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I , je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$ (proud protéká ve směru osy z , μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočtěte divergenci indukovaného magnetického.

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I , je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$ (proud protéká ve směru osy z , μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočítejte divergenci indukovaného magnetického.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial \left(-\frac{y}{r^2} \right)}{\partial x}$$

Divergence \vec{F} : $\text{div} \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$. Označme

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \vec{F}$, kde $\frac{\mu_0 I}{2\pi}$ je konstanta, kterou můžeme z divergence vytknout. Budeme se tedy zabývat jen vektorovým polem $\vec{F} = \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$.

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I , je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$ (proud protéká ve směru osy z , μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočtěte divergenci indukovaného magnetického.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial \left(-\frac{y}{r^2} \right)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I , je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$ (proud protéká ve směru osy z , μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočtěte divergenci indukovaného magnetického.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial \left(-\frac{y}{r^2} \right)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2 + y^2} = -y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1}$$

Konstantu $-y$ lze vytknout, protože na x nezávisí.

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I , je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$ (proud protéká ve směru osy z , μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočítejte divergenci indukovaného magnetického.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial \left(-\frac{y}{r^2} \right)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2 + y^2} = -y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} \\ &= -y \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x \end{aligned}$$

Derivujeme složenou funkci.

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I , je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$ (proud protéká ve směru osy z , μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočítejte divergenci indukovaného magnetického.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial \left(-\frac{y}{r^2} \right)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2 + y^2} = -y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} \\ &= -y \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I , je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$ (proud protéká ve směru osy z , μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočtěte divergenci indukovaného magnetického.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial\left(-\frac{y}{r^2}\right)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2 + y^2} = -y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} \\ &= -y \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{x}{r^2}\right)}{\partial y}$$

$$\text{Divergence } \vec{F}: \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I , je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$ (proud protéká ve směru osy z , μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočítejte divergenci indukovaného magnetického.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial\left(-\frac{y}{r^2}\right)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2 + y^2} = -y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} \\ &= -y \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{x}{r^2}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I , je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$ (proud protéká ve směru osy z , μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočtěte divergenci indukovaného magnetického.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial \left(-\frac{y}{r^2} \right)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2 + y^2} = -y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} \\ &= -y \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial y} &= \frac{\partial \left(\frac{x}{r^2} \right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ &= x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1}\end{aligned}$$

Konstantu x lze vytknout, protože na y nezávisí.

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I , je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$ (proud protéká ve směru osy z , μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočtěte divergenci indukovaného magnetického.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial \left(-\frac{y}{r^2} \right)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2 + y^2} = -y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} \\ &= -y \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial y} &= \frac{\partial \left(\frac{x}{r^2} \right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ &= x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1} = x \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2y \end{aligned}$$

Derivujeme složenou funkci.

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I , je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$ (proud protéká ve směru osy z , μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočítejte divergenci indukovaného magnetického.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial\left(-\frac{y}{r^2}\right)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2 + y^2} = -y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} \\ &= -y \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial y} &= \frac{\partial\left(\frac{x}{r^2}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ &= x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1} = x \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I , je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$ (proud protéká ve směru osy z , μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočítejte divergenci indukovaného magnetického.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial \left(-\frac{y}{r^2} \right)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2 + y^2} = -y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} \\ &= -y \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial y} &= \frac{\partial \left(\frac{x}{r^2} \right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ &= x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1} = x \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = 0$$

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I , je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$ (proud protéká ve směru osy z , μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočtěte divergenci indukovaného magnetického.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial \left(-\frac{y}{r^2} \right)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2 + y^2} = -y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} \\ &= -y \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial y} &= \frac{\partial \left(\frac{x}{r^2} \right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ &= x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1} = x \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Magnetické pole vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud I , je dáno jako $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right)$ (proud protéká ve směru osy z , μ_0 je permeabilita, r je vzdálenost od vodiče stejnosměrného proudu). Spočítejte divergenci indukovaného magnetického.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial \left(-\frac{y}{r^2} \right)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2 + y^2} = -y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} \\ &= -y \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial y} &= \frac{\partial \left(\frac{x}{r^2} \right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ &= x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1} = x \cdot (-1)(x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Divergence magnetického pole je nulová.

KONEC