Užití matic.

Lenka Přibylová

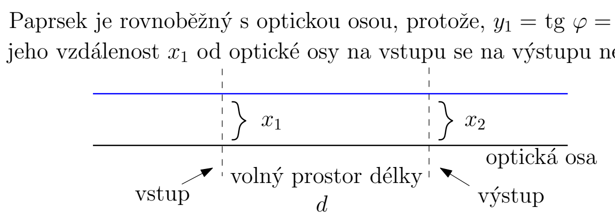
17. listopadu 2010

Napište zobrazovací rovnice a přenosovou matici pro úsek volného prostoru o délce d.

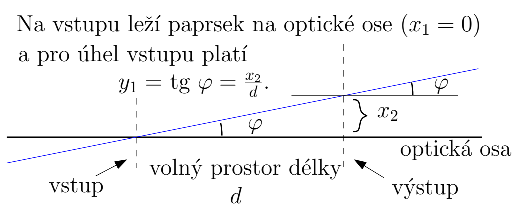
$$\begin{aligned} x_2 &= Ax_1 + By_1 \\ y_2 &= Cx_1 + Dy_1, \quad \text{kde} \end{aligned}$$

$$A = \frac{x_2}{x_1}\Big|_{y_1=0} = \frac{x_1}{x_1}\Big| = 1,$$

Označením *výraz*$|_{y_1=0}$ rozumíme, že výraz počítáme pro $y_1 = 0$.



$$B = \frac{x_2}{y_1}\Big|_{x_1=0} = d,$$



$$C = \frac{y_2}{x_1}\Big|_{y_1=0} = 0,$$

Paprsek je rovnoběžný s optickou osou, protože $y_1 = 0$, jeho úhel se na výstupu nemění, tj. $y_2 = 0$.

$$D = \frac{y_2}{y_1}\Big|_{x_1=0} = \frac{y_1}{y_1} = 1.$$

Tangens úhlu vstupu y_1 se na výstupu nemění, tj. $y_2 = y_1$.
Zobrazovací rovnice jsou tedy

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + dy_1 \\ y_2 &= y_1 \end{aligned}$$

a přenosová matice je

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

©Lenka Přibylová, 2010

Napište zobrazovací rovnice a přenosovou matici pro tenkou čočku o ohniskové vzdálenosti f.

$$\begin{aligned} x_2 &= Ax_1 + By_1 \\ y_2 &= Cx_1 + Dy_1, \quad \text{kde} \end{aligned}$$

$$A = \tfrac{x_2}{x_1}|_{y_1=0} = \tfrac{x_1}{x_1}| = 1,$$

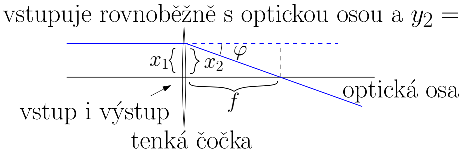
Označením *výraz*$|_{y_1=0}$ rozumíme, že výraz počítáme pro $y_1 = 0$. Předpokládáme, že jde o tenkou čočku, tj. vstup x_1 a výstup x_2 je stejný.

$$B = \tfrac{x_2}{y_1}|_{x_1=0} = 0,$$

Pro vstup $x_1 = 0$ je výstup $x_2 = 0$.

$$C = \tfrac{y_2}{x_1}|_{y_1=0} = \frac{-\frac{x_1}{f}}{x_1} = -\tfrac{1}{f}$$

Paprsek vstupuje rovnoběžně s optickou osou a $y_2 = \operatorname{tg} \varphi = \frac{-x_1}{f}$,



$$D = \tfrac{y_2}{y_1}|_{x_1=0} = \tfrac{y_1}{y_1} = 1.$$

Úhel na výstupu y_2 je v případě vstupu v místě optické osy $x_1 = 0$ totožný s úhlem vstupu (symetrie). Zobrazovací rovnice jsou tedy

$$\begin{aligned} x_2 &= \quad x_1 \\ y_2 &= -\tfrac{1}{f}x_1 \quad + y_1 \end{aligned}$$

a přenosová matice je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}.$$

Napište přenosovou matici pro optický systém složený z tenké čočky o ohniskové vzdálenosti $f_1 = 1$ cm, úseku volného prostoru o délce $d = 26$ cm a další tenké čočky s ohniskovou vzdáleností $f_2 = 5$ cm.

Jedná se o mikroskop s tubusovou vzdáleností $\Delta = 200$ mm.

Přenosová matice první tenké čočky je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, přenosová matice úseku volného prostoru je $\begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a přenosová matice druhé tenké čočky je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$. Výstup z prvního optického prvku (tenké čočky) je dán zobrazovací rovnicí

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

výstup z druhého optického prvku (úseku prostoru) je dán zobrazovací rovnicí

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

a výstup z třetího optického prvku (tenké čočky) je dán zobrazovací rovnicí

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

©Lenka Přibylová, 2010

tj.

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Přenosová matice je tedy dána součinem matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{21}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{21}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & 26 \\ 4 & -\frac{21}{5} \end{pmatrix}.$$

Napište přenosovou matici pro optický systém složený z úseku volného prostoru o délce $d = 1$ m, konkávního zakřiveného zrcadla s poloměrem křivosti $R = 2$ m, úseku volného prostoru o délce $d = 0.8$ m, rovinného zrcadla, úseku volného prostoru o délce $d = 0.3$ m a tenké čočky o ohniskové vzdálenosti $f_1 = 0.1$ m.

Jedná se o Newtonův dalekohled.

Abychom nemuseli počítat s desetinnými čísly, převedeme jednotky na dm. Přenosová matice úseku volného prostoru je pak $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přenosová matice zakřiveného zrcadla je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}$, přenosová matice úseku volného prostoru je $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přenosová matice rovinného zrcadla je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přenosová matice dalšího úseku volného prostoru je $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a přenosová matice tenké čočky je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$. Přenosová matice optického systému je proto dána součinem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Násobení jednotkovou maticí výsledek nemění. Volný prostor délky 8 dm a 3 dm oddělelný rovinným zrcadlem je vlastně totožný volným prostorem délky 11 dm: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

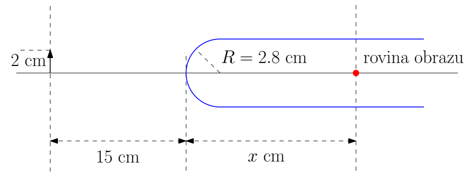
$$= \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -10 & -109 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -\frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & 10 \\ \frac{9}{10} & -100 \end{pmatrix}.$$

Odvoďte přenosovou matici tenké čočky o poloměrech křivosti vstupu R_1 a výstupu R_2, která je z materiálu o indexu lomu n, umístěná ve vzduchu. Určete její ohniskovou vzdálenost a mohutnost.

Tenká čočka je složená ze dvou povrchů, vzdálenost mezi nimi zanedbáváme. Přenosová refrakční matice vstupní zakřivené plochy je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_1 n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ a refrakční matice výstupní zakřivené plochy je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix}$, tj. přenosová matice čočky je dána součinem $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_1 n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} + \frac{1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$. To odpovídá vztahu pro mohutnost tenké čočky jako součtu mohutností jednotlivých povrchů $D = D_1 + D_2 = \frac{n-1}{R_1} + \frac{1-n}{R_2} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) = \frac{1}{f}$.

©Lenka Přibylová, 2010

Plastová tyč s indexem lomu $n = 1.56$ je ukončena sférickým povrchem o poloměru $R = 2.8$ cm. Objekt vysoký 2 cm je umístěn ve vzdálenosti $d = 15$ cm od tyče. Zjistěte umístění a velikost obrazu v tyči.



Systém je složen z volného prostoru s přenosovou maticí $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sférického povrchu s přenosovou refrakční maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{Rn} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-0.56}{2.8\cdot 1.56} & \frac{1}{1.56} \end{pmatrix}$$

a volného prostoru od vrcholu tyče k obrazu v neznámé vzdálenosti x.
Přenosovou matici systému proto můžeme napsat jako součin

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{Rn} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ \frac{1-n}{Rn} & \frac{d(1-n)}{Rn} + \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Protože víme, že vstupní a výstupní roviny optického systému jsou konjugované, musí být pravý horní člen přenosové matice nulový. Pravý horní člen matice je skalárním součinem prvního řádku první matice a druhého sloupce druhé matice, tj. platí $d + x(\frac{d(1-n)}{Rn} + \frac{1}{n}) = 0$. Odtud

$$x = \frac{-d}{\frac{d(1-n)}{Rn} + \frac{1}{n}} = \frac{-d}{\frac{d(1-n)+R}{Rn}} = \frac{-dRn}{d(1-n)+R} = \frac{-15\cdot 2.8\cdot 1.56}{15\cdot(-0.56)+2.8} = 11.7 \text{ cm}.$$

Pro výstup platí $x_2 = Ax_1 = (1 + x\frac{1-n}{Rn})x_1 = (1 + 11.7\frac{-0.56}{2.8\cdot 1.56}) \cdot 2 = -1$ cm, obraz ve vzdálenosti 11.7 cm má tedy velikost 1 cm a je převrácený.

©Lenka Přibylová, 2010