Matematické minimum

Základním posláním této kapitoly je poskytnout náhled na nejjednodušší aplikace vyšší matematiky, s nimiž se můžeme setkat při studiu biofyzikálních či fyzikálních problémů. V předchozích kapitolách jsme se s elementy vyšší matematiky setkávali jen ojediněle, což však neznamená, že by význam této kapitoly byl malý. Neschopnost pracovat s aparátem vyšší matematiky představuje pro biology a lékaře limitující faktor, který jim obvykle znemožňuje plné pochopení odborných textů, které se zabývají např. modely biofyzikálních procesů. Vyšší matematika není v přírodních vědách samoúčelná, naopak, umožňuje efektivní a dosti přesný popis dějů a stavů.

Matematické výrazy mohou vypovídat o procesech v přírodě jen tehdy, dokážeme-li je správně interpretovat, tj. vysvětlit jejich význam. To však již není úkolem matematiky, ale jednotlivých speciálních přírodních věd. Mnoho zákonů platných v přírodních vědách může být formálně vyjádřeno jako funkční závislost dvou nebo více proměnných veličin čili, zjednodušeně řečeno, jako matematické funkce. Problematikou funkcí se zabývá matematická disciplína zvaná **matematická analýza**. Při výkladu jejích poznatků budeme uvažovat obvykle jen reálné funkce jedné reálné proměnné. Nejnutnější pozornost budeme věnovat i úvodu do **vektorového počtu**, protože řada fyzikálních veličin, s nimiž se v biofyzice pracuje, je povahy vektorové, tj. má nejen určitou velikost, ale též definovaný směr.

1 Funkce, její vyjádření a vlastnosti

Předpis, který každé hodnotě **nezávisle proměnné veličiny** x, která je prvkem nějaké číselné množiny M, jednoznačně přiřazuje číselnou hodnotu **závisle proměnné veličiny** y, se nazývá **funkce**. Této definici odpovídá zápis:

$$y = f(x).$$

Funkce může být znázorněna pomocí **grafu**, což je množina bodů (x, y) v kartézské soustavě souřadnic, kde $x \in M$ (x patří do množiny M) a $y = f(x)$.

Nezávisle proměnnou veličinu nazýváme **argumentem** funkce. Množinu jejích hodnot M nazýváme **definičním oborem** funkce. Množinu hodnot závisle proměnné nazýváme **oborem hodnot** dané funkce. Obě tyto množiny mohou být tvořeny nekonečným nebo konečným počtem hodnot. Ve druhém případě hovoříme o diskrétních hodnotách. Množiny závisle a nezávisle proměnných veličin nelze obecně vzájemně zaměňovat (tlak krve je funkcí času, avšak čas není funkcí tlaku krve).

Funkce může být nejčastěji zadána analyticky, tj. matematickým vzorcem. Častý je též zápis grafický (např. spojitý časový záznam změn nějaké fyzikální veličiny) nebo tabulkový.

Pro usnadnění popisu (vyšetřování) průběhů funkcí si všímáme jejich určitých charakteristických vlastností. Uvedeme je formou výčtu. Odkazujeme též na středoškolskou matematiku a předpokládáme, že čtenář je obeznámen s následujícími pojmy: funkce sudá a lichá, rostoucí a klesající, nerostoucí a neklesající, periodická, prostá, inverzní a složená. Připomeneme si však konkrétní typy funkcí, s nimiž se můžeme setkat v přírodních vědách nejčastěji: polynomů, racionální lomené funkce, funkcí goniometrických a cyklometrických a konečně funkcí logaritmických a exponenciálních.

Funkce tvaru polynomu n-tého stupně s reálnými koeficienty $a_0, a_1, \ldots , a_n$ je vyjádřena v obecném tvaru:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kde koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou libovolná reálná čísla, n je nezáporné celé číslo a $a_n \neq 0$. Definičním oborem této funkce je celý interval $(-\infty, +\infty)$.

Polynomem stupně 0 je definována **konstantní funkce** tvaru

$$y = a_0,$$

jejímž grafem je přímka rovnoběžná s osou x.

Polynomem 1. stupně je definována **funkce lineární** ve tvaru

$$y = a_1x + a_0,$$

kde $a_1 \neq 0$. Grafem lineární funkce je přímka se směrnicí a_1. Pro $x = 0$ má tato funkce hodnotu a_0.

Polynomem 2. stupně je definována **funkce kvadratická** ve tvaru

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

kde $a_2 \neq 0$. Grafem této funkce je parabola s vrcholem o souřadnicích $(-a_1/2a_2, (-a_1^2 + 4a_2a_0)/4a_2)$. Je-li $a_1 = 0$, je graf paraboly souměrný podle osy y. Je-li $a_0 = 0$, má parabola vrchol v počátku souřadnicové soustavy.

Racionální lomená funkce je dána podílem dvou polynomů:

$$y = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0},$$

s reálnými koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$. Definiční obor této funkce tvoří všechna reálná x, pro která je jmenovatel různý od nuly.

Zvláštním případem racionální lomené funkce je **lineární lomená funkce** tvaru

$$y = \frac{a_1x + a_0}{b_1x + b_0},$$

kde musí být splněny podmínky $a_1b_0 - a_0b_1 \neq 0$ a $b_1 \neq 0$. Tato funkce je definovaná pro $x \neq -b_0/b_1$. Jejím grafem je hyperbola se středem o souřadnicích $-b_0/b_1, a_1/b_1$. Při hodnotách $a_1 = 0, b_0 = 0, b_1 = 1$ je lineární lomená funkce vyjádření tzv. **nepřímé úměrnosti**

$$y = \frac{a_0}{x}, \qquad \text{kde} \qquad a_0 \neq 0.$$

Tato funkce je definována pro $x \neq 0$.

Goniometrické funkce jsou funkce periodické.

Funkce

$$y = \sin x$$

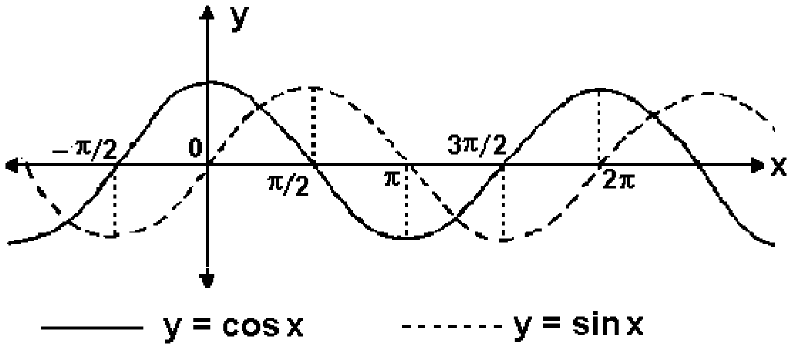
je lichá s periodou 2π, definovaná v oboru všech reálných čísel x. Je rostoucí na každém intervalu $((4k - 1)\pi/2, (4k + 1)\pi/2)$, kde k je celé číslo. Na ostatních intervalech je klesající. Oborem hodnot této funkce je interval (-1,1). Grafem je sinusoida.

Funkce

$$y = \cos x$$

je sudá s periodou 2π, definovaná v oboru všech reálných čísel x. Je klesající na každém intervalu $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$, kde k je celé číslo. Na ostatních intervalech je rostoucí. Oborem hodnot této funkce je interval (-1,1). Grafem je kosinusoida.

Průběh funkcí sinus a kosinus je uveden na obr. 1a.



Obr. 1a. Průběhy funkce sinus a kosinus.

Z obrázku je patrno, že křivky obou funkcí jsou vzájemně posunuty o $\pi/2$, přičemž platí tyto vzájemné vztahy:

$$\sin (x + \pi/2) = \cos x \qquad \text{a} \qquad \cos (x - \pi/2) = \sin x$$

Funkce

$$y = \mathrm{tg}\, x$$

je lichá s periodou π, definovaná v oboru všech reálných čísel x s výjimkou lichých násobků $\pi/2$. Je rostoucí na každém intervalu $((2k - 1)\pi/2, (2k + 1)\pi/2)$, kde k je celé číslo. Oborem hodnot je interval $(-\infty, +\infty)$.

Funkce

$$y = \mathrm{cotg}\, x$$

je lichá s periodou π, definovaná v oboru všech reálných čísel x s výjimkou celočíselných násobků π. Je klesající na každém intervalu $(k\pi, (k + 1)\pi)$, kde k je celé číslo. Oborem hodnot je interval $(-\infty, +\infty)$.

Pro funkce tangens a kotangens platí:

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{a} \qquad \mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce cyklometrické

$$y = \arcsin x \qquad y = \arccos x \qquad y = \mathrm{arctg}\, x \qquad y = \mathrm{arccotg}\, x$$

(čteme "arkus sinus x" atd.)

jsou inverzními funkcemi ke goniometrickým funkcím

$$x = \sin y \qquad x = \cos y \qquad x = \mathrm{tg}\, y \qquad x = \mathrm{cotg}\, y$$

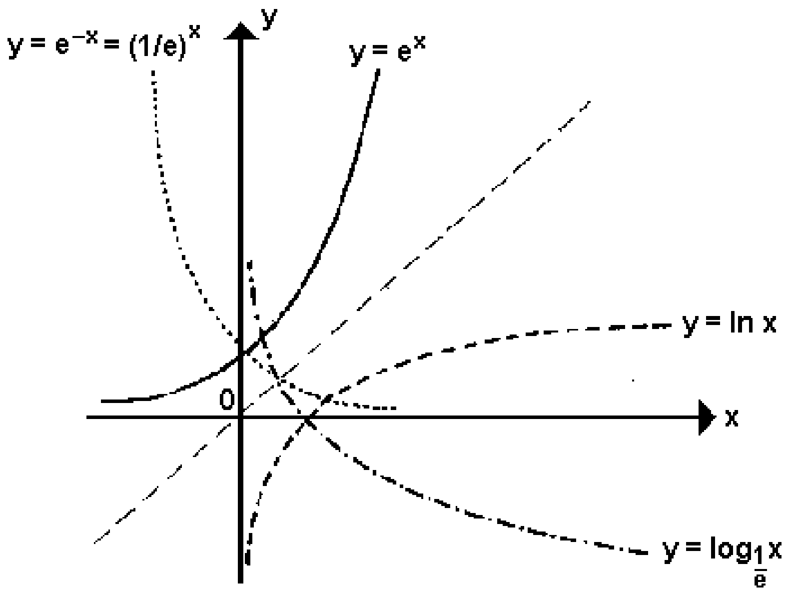
uvažovaným pouze v základních intervalech jejich monotónnosti (pro funkci sinus v intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, pro kosinus $\langle 0, \pi\rangle$, pro tangens $(-\pi/2, \pi/2)$ a kotangens $(0, \pi)$).

Exponenciální funkcí rozumíme funkci s proměnnou v exponentu, tj. funkci ve tvaru

$$y = a^x$$

kde $a \neq 1$ je kladné číslo, přičemž x nabývá hodnot z intervalu $(-\infty, +\infty)$. Exponenciální funkce nabývá pouze kladných hodnot. Pro $a > 1$ je funkcí rostoucí, pro $a < 1$ je funkcí klesající na celém definičním intervalu. Často se můžeme setkat se zvláštním případem exponenciální funkce, kdy číslo a má hodnotu Eulerovy konstanty $e = 2{,}71$ ....:

$$y = e^x, \qquad \text{resp.} \qquad y = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x.$$



Obr. 1b. Průběh logaritmické a exponenciální funkce

Logaritmická funkce tvaru

$$y = \log_a x$$

je inverzní k exponenciální funkci $x = a^y$. Je definována na intervalu $(0, +\infty)$, pro $a > 1$ je funkcí rostoucí, pro $0 < a < 1$ je na celém definičním intervalu klesající. Oborem funkčních hodnot je interval $(-\infty, +\infty)$. Číslo a označujeme jako základ logaritmu.

Zvláštním případem logaritmické funkce je funkce

$$y = \log_{10} x \qquad \text{čili} \qquad y = \log x$$

zvaná též dekadický logaritmus, inverzní k funkci $x = 10^y$.

Jiným zvláštním případem je funkce

$$y = \log_e x \qquad \text{čili} \qquad y = \ln x$$

zvaná též přirozený logaritmus (logaritmus naturalis), inverzní k funkci $x = e^y$.

Průběh logaritmické a exponenciální funkce o základu e a $1/e$ je znázorněn na obr. 1b.

Zejména s dekadickými logaritmy se setkáváme mj. všude tam, kde potřebujeme převést velký numerický rozsah veličiny x na příhodnější numerický rozsah. Exponenciální závislosti se po zlogaritmování stávají lineárními. Biofyzikálně relevantním příkladem logaritmické závislosti je vztah mezi hladinou intenzity L a intenzitou zvuku I. Platí:

$$L = \log \frac{I}{I_0} \text{ [B]} \qquad \text{resp.} \qquad L = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ [dB]}$$

kde I_0 je (konvenční a srovnávací) hodnota prahu slyšitelnosti, obvykle 10^{-12} Wm^{-2}.

2 Derivace funkce a její význam

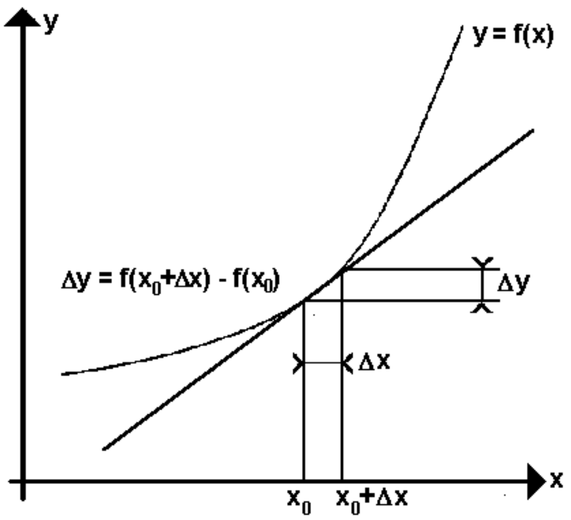
Při vyšetřování okamžitých nebo lokálních změn navzájem se ovlivňujících veličin je užitečné zavedení dalšího základního pojmu matematické analýzy - **derivace funkce**. Přitom přecházíme od veličin o konečné velikosti k veličinám nekonečně malým čili infinitezimálním.

Derivace funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je limitou podílu příslušné změny (přírůstku nebo úbytku) funkce Δy ku přírůstku argumentu Δx pro Δx jdoucí k 0, tj. limitou

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

a značí se nejčastěji $f'(x_0)$.

Předpokladem je, že tato limita existuje. Derivace funkce v jednom bodě je nějaké **číslo**. Jestliže má funkce $f(x)$ derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. nějaké jeho části), dostáváme takto novou **funkci** $f'(x)$. V matematice, fyzice, chemii i jinde se můžeme setkat s několika různými formami zápisu derivace funkce $y = f(x)$: dy/dx, y' či $f'(x)$. V aplikovaných vědách je patrně nejčastější forma dy/dx, kterou čteme jako "derivace funkce y podle x".



Obr. 2a. Derivace funkce jako směrnice tečny ke grafu této funkce

Z geometrického hlediska je derivace y' funkce $y = f(x)$ v daném bodě x_0 **směrnicí tečny** ke grafu této funkce v bodě určeném dvojicí souřadnic (x, y), jak plyne i z obr. 2a.

Z fyzikálního hlediska derivace **charakterizuje rychlost změny** jedné veličiny v závislosti na druhé veličině – je-li touto druhou, tj. nezávisle proměnnou veličinou čas. Může charakterizovat i **polohové změny** nějaké veličiny, je-li nezávisle proměnnou souřadnice polohy. V tomto případě má derivace úzkou souvislost s pojmem gradientu, k němuž se vrátíme v oddílu o vektorovém počtu. Derivace může mít i jiný fyzikální význam, např. v termodynamice je derivací vnitřní energie podle látkového množství chemický potenciál.

Derivace funkce v daném bodě nemusí vždy existovat. Má-li funkce v bodě x konečnou derivaci, říkáme, že je v něm **diferencovatelná**. Diferencovatelnost na celém určitém intervalu znamená existenci konečné derivace v každém jeho bodě.

Výpočty derivací funkcí s použitím limit jsou často nesnadné, a proto je vhodné odvozené **derivace základních matematických funkcí** vyhledávat v příručkách nebo si je zapamatovat:

$(c)' = 0$ $\qquad\qquad$ $(x^n)' = nx^{n-1}$

$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$

$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\mathrm{cotg}\, x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

Je třeba připomenout i pravidla pro výpočet derivací aritmetických operací funkcí a derivace funkce složené:

$$[c.f(x)]' = c.f'(x),$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) \,.\, g(x)]' = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \,.\, g'(x)$$

Z výše uvedených pravidel je zřejmé, že výsledkem derivace konstantní funkce je nula, derivace lineární funkce vede k funkci konstantní a že derivace kvadratické funkce je funkcí lineární. Derivace polynomu n-tého řádu je obecně polynom řádu n - 1 pro každé přirozené n.

Protože derivace funkce $f(x)$ je opět funkcí téže nezávisle proměnné, tedy $y' = f'(x)$, lze hovořit i o její derivaci

$$(y')' = [f'(x)]'.$$

Nazýváme ji **derivací druhého řádu** (zjednodušeně druhou derivací) a značíme $y'' = f''(x)$ nebo d^2y/dx^2. Lze uvažovat i derivace vyšších řádů, za předpokladu, že existují.

Zejména derivace prvního a druhého řádu využíváme při vyšetřování průběhů funkcí zadaných analyticky (tj. "vzorcem"). Přitom je třeba znát zejména následující skutečnosti:

Diferencovatelná funkce **rostoucí** na určitém intervalu má ve všech vnitřních bodech tohoto intervalu **nezápornou první derivaci**. Diferencovatelná funkce **klesající** na určitém intervalu má ve všech vnitřních bodech **nekladnou první derivaci**. Ve všech bodech **lokálních extrémů** je **první derivace** diferencovatelné funkce **rovna nule**, ale neplatí opak: kde je první derivace funkce rovna nule, nemusí nastat extrém (viz bod x_1 na obr. 2b). Tento bod, ve kterém křivka přechází z jedné strany tečny na druhou, se nazývá **inflexní bod**.

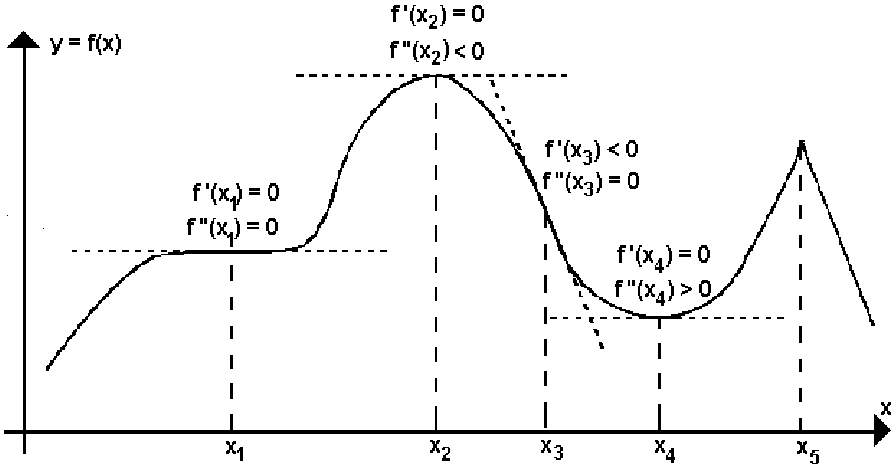
Předpokládejme, že jsme nalezli bod, v němž je hodnota první derivace rovna nule. Jak poznat, kdy jde o inflexní bod či o extrém funkce? Je-li hodnota druhé derivace funkce v daném bodě **záporná**, pak má funkce v daném bodě **maximum**, **kladná** hodnota druhé derivace znamená lokální **minimum**. Viz též body x_2 a x_4 na obr. 2b. Je-li v daném bodě druhá derivace nulová, může a nemusí se jednat o extrém.

Přesněji se lze vyjádřit takto: Při opakovaném derivování funkce platí pro první nenulovou derivaci v daném bodě:

- jde-li o derivaci sudého řádu (např. druhého), pak má funkce v daném době lokální extrém čili minimum nebo maximum:

$f^{(2n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ lokální minimum $f^{(2n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ lokální maximum

- jinak (tj. je-li první nenulovou derivací derivace lichého řádu) se jedná o inflexní bod.



Obr. 2b. Vyšetřování průběhu funkcí

Funkce může být spojitá, a přitom nediferencovatelná a přesto má lokální extrémy - viz bod x_5 na obr. 2b.

Abychom si názorněji vysvětlili způsob práce s derivacemi funkcí ve fyzice, použijeme jako příklad rovnici **netlumeného kmitavého pohybu**:

$$y = y_m \sin(\omega t + \phi)$$

Na základě získaných znalostí o derivacích se pokusíme o hlubší rozbor tohoto pohybu. Pro jednoduchost budeme počáteční fázi ϕ považovat za rovnou nule (pohyb začne v čase $t = 0$ z rovnovážné polohy, tj. $y(0) = 0$):

$$y = y_m \sin(\omega t).$$

Je patrno, že okamžitá poloha kmitajícího bodu je složenou funkcí času. Podle dříve zavedené symboliky je výraz y_m (maximální výchylka kmitů – amplituda) konstantní. Výraz $\sin(\omega t)$ je ekvivalentní výrazu $f(g(t))$.

Rychlost je ve fyzice dána podílem dráhy (změny polohy) a časového intervalu, během kterého se změna polohy realizovala. Je-li poloha bodu funkcí času, tj. mění-li se v čase, pak vyjádření okamžité rychlosti pohybujícího se bodu je podílem nekonečně malých čísel (nekonečně malého posunutí dy a nekonečně malého časového intervalu dt, během kterého k posunutí došlo), tedy derivací polohy podle času. Okamžitou rychlost kmitavého pohybu proto vyjádříme takto:

$$v(t) = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = [y_m \sin(\omega t)]' = y_m \omega \cos(\omega t) \qquad \text{[I]}$$

Je patrné, že rychlost kmitavého pohybu je rovněž periodickou funkcí času.

Nyní nalezneme extrémy či inflexní body původní funkce čili zjistíme, kdy je její první derivace rovna nule:

$$v(t) = y_m \omega \cos(\omega t) = 0, \quad \text{tj.} \quad \cos(\omega t) = 0$$

Kosinus je roven nule jen tehdy, když $(\omega t) = (2k-1)\frac{\pi}{2}$, kde k je celé číslo, tj.

$$t = (2k-1)\frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}(2k-1), \qquad \text{[II]}$$

neboť $\omega = 2\pi f$ a $f = 1/T$, kde T je perioda kmitů. Hledaný extrém nacházíme při hodnotách $t = T/4$, $3T/4$, $5T/4$, tedy při každé liché čtvrtperiodě.

Zjistíme nyní, čemu je rovna v těchto bodech druhá derivace původní funkce. Budeme tedy derivovat vztah [I] podle času, čímž současně získáme vztah pro okamžitou hodnotu zrychlení:

$$a(t) = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = [y_m \omega \cos(\omega t)]' = -y_m \omega^2 \sin(\omega t) = -y\omega^2$$

Posledně uvedený výraz je dobře znám ze středoškolské fyziky. Nyní dosadíme za t výsledek [II]:

$$a = -y_m \omega^2 \sin\left(\omega \frac{T}{4}(2k-1)\right) = -y_m \omega^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)$$

S odvoláním na elementární znalosti o funkci sinus je jasné, že pro k liché bude zrychlení, tj. druhá derivace okamžité výchylky, číslem záporným (lokální maxima funkce) a pro k sudé bude tento výraz kladný (lokální minima funkce).

Stejně lze vyšetřit i vztahy pro rychlost a zrychlení

$$v(t) = y_m \omega \cos(\omega t) \qquad a(t) = -y_m \omega^2 \sin(\omega t).$$

Je zřejmé, že maximální záporné zrychlení nastává u maximální kladné výchylky a maximální kladné zrychlení u maximální záporné výchylky. Lze se snadno přesvědčit i o tom, že lokální extrémy rychlosti jsou posunuty o T/4 - kmitající bod se pohybuje nevyšší rychlostí při průchodu rovnovážnou polohou.

Vrátíme se ještě k **derivaci funkce více proměnných**.

Pojem derivace nyní zobecníme na funkci více proměnných. Uvažujme zatím funkci $z(x,y)$ dvou proměnných x a y:

$$z(x,y) = x^2 + y^2,$$

což je rovnice plochy rotačního paraboloidu. Otázka zní: Můžeme pro tuto funkci definovat derivaci? Nebo si zkusme položit otázku ještě trochu jinak. Existuje tečna k této ploše? Tečna k rotačnímu paraboloidu existuje, a dokonce v každém bodě je jich nekonečně mnoho, mířících (v jedné rovině) různými směry. Derivaci funkce více proměnných tedy definovat můžeme, avšak v každém bodě nekonečně mnoha způsoby, tj. máme k dispozici nekonečně mnoho směrů, v nichž lze derivaci definovat. To je nepřehledné, a proto je nutno vybrat standardní pravidla, jak s derivacemi funkcí více proměnných pracovat. Jsou jimi právě **parciální derivace**. Definují se jako derivace dané funkce podle nezávisle proměnných; v případě funkce $z(x,y)$ máme parciální derivaci podle x, značí se obvykle $\frac{\partial z}{\partial x}$, a podle y, značí se obdobně $\frac{\partial z}{\partial y}$. V případě, že máme funkci např. tří proměnných $F(x,y,z)$, přibude nám parciální derivace podle této další proměnné, a sice $\frac{\partial F}{\partial z}$.

S proměnnou, podle níž se parciální derivace provádí, zacházíme stejně jako s nezávisle proměnnou v případě derivace funkce jedné proměnné, kdežto všechny ostatní nezávisle proměnné vystupují pro tuto chvíli v roli konstant. Tedy parciální derivace dané funkce podle x v bodě o souřadnicích (x_0,y_0,z_0) je derivace dané funkce v tomto bodě definovaná ve směru osy x, obdobně je $\frac{\partial F}{\partial y}$ derivací ve směru osy y a $\frac{\partial F}{\partial z}$ derivací ve směru osy z.

Zobecnění "obyčejné" derivace je tedy jednoduché. Parciální derivace funkce $F = F(x, y, z)$ podle x v bodě (x_0,y_0,z_0) je limita:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - F(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

podle y v témž bodě:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - F(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$$

a podle z v témž bodě:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - F(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z} .$$

Uvedeme si praktický příklad výpočtu parciální derivace funkce $F = F(x,y,z)$:

$$F(x,y,z) = x^2 + xyz + z^2$$

v libovolném bodě (x,y,z). Dostaneme:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(xyz\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial x} + yz\frac{\partial x}{\partial x} + 0 = 2x + yz + 0 = 2x + yz.$$

Analogickým postupem pak dospějeme k výsledkům:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 + xz + 0 = xz \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0 + xy + 2z = xy + 2z.$$

Obdobně lze definovat i parciální derivace funkcí libovolného počtu proměnných.

Chápeme-li pojem parciální derivace, můžeme zavést další pojem – úplný neboli **totální diferenciál**. Tento diferenciál je velmi užitečný zejména v termodynamice, jak dále ukážeme.

Úplným diferenciálem funkce $F = F(x, y, z)$ je výraz:

$$\mathrm{d}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\mathrm{d}z,$$

kde výrazy v závorkách jsou parciální derivace příslušné funkce. Výrazy dx, dy, dz jsou infinitezimální (nekonečně malé) změny nezávisle proměnných. Pro diferenciály funkcí složených platí stejná pravidla jako pro derivace funkcí složených (tj. např. $\mathrm{d}(F.G) = G.\mathrm{d}F + F.\mathrm{d}G$).

Uveďme si konkrétní příklad výpočtu úplného diferenciálu. V termodynamice je definována stavová funkce zvaná entalpie, a to výrazem: $H = U + pV$. Entalpie je obecně funkcí tří proměnných: vnitřní energie U, tlaku p a objemu V. Naším úkolem je vyjádřit infinitezimální změnu entalpie danou infinitezimálními změnami obecně všech nezávisle proměnných, tj. U, p a V.

Úplný diferenciál entalpie je:

$$\mathrm{d}H = \left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)_{p,V}.\mathrm{d}U + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{U,V}.\mathrm{d}p + \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_{U,p}.\mathrm{d}V.$$

Indexy u závorek vyjadřují, že uvedené proměnné považujeme za konstanty. Nyní vyjádříme konkrétní parciální derivace entalpie ($H = U + pV$):

$$\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)_{p,V} = 1, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{U,V} = V, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_{U,p} = \mathrm{p}.$$

Odtud plyne, že

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + V.\mathrm{d}p + p.\mathrm{d}V.$$

Výraz $V.\mathrm{d}p + p.\mathrm{d}V$ lze též formálně zapsat jako $\mathrm{d}(p.V)$, tj.
$\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + \mathrm{d}(p.V)$.
Povšimněte analogie s derivací součinu funkcí. Lze doplnit, že při konstantním objemu ($\mathrm{d}V = 0$) platí
$\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + V.\mathrm{d}p$
nebo při konstantním tlaku ($\mathrm{d}p = 0$)
$\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + p.\mathrm{d}V$.
Takovéto upravování a odvozování "vzorců" je v termodynamice velmi časté.

3 Integrál funkce a jeho význam

Může nastat situace, kdy známe derivaci funkce v jejím analytickém vyjádření, neznáme však tvar původní, tj. derivované funkce. Známe-li např. okamžitou rychlost $v(t)$ přímočarého pohybu v každém okamžiku t, může být užitečné najít funkci $s(t)$, která vyjadřuje dráhu uraženou v čase t.

Metoda, která nám umožňuje požadovanou funkci najít, se nazývá **integrování.** Hledat budeme **integrál funkce**. Nejdříve si však musíme připomenout pojem primitivní funkce.

Primitivní funkcí funkce $f(x)$ v daném intervalu rozumíme funkci $F(x)$, která ve všech bodech intervalu splňuje vztah

$$F'(x) = f(x).$$

Protože však funkce lišící se o libovolnou konstantu C mají tutéž derivaci, je množina všech primitivních funkcí příslušných k $f(x)$ nekonečná a její prvky se navzájem liší hodnotou aditivní konstanty C. Množinu všech těchto primitivních funkcí nazýváme neurčitým integrálem funkce $f(x)$ a značíme $\int f(x)\mathrm{d}x$. Můžeme tedy napsat:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

kde C nabývá hodnot reálných čísel.

Z praktického hlediska tedy můžeme chápat integraci jako opačnou operaci k derivaci. Následují nejdůležitější příklady integrálů základních funkcí:

$$\int 0 \,\mathrm{d}x = C,$$

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{pro} \quad n \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln x + C,$$

$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C,$$

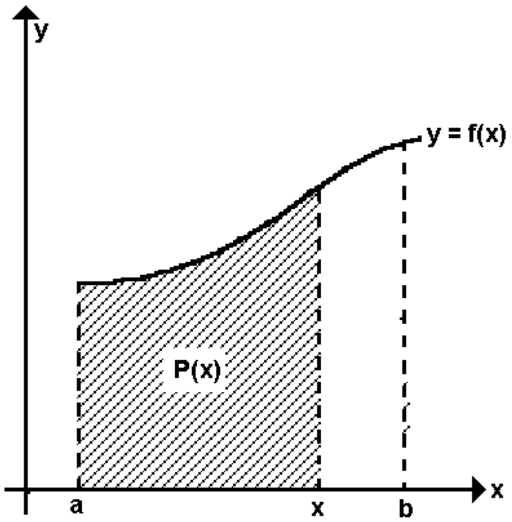
$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\, x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + C,$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C.$$

Pojem integrálu souvisí s obsahem plochy vymezené křivkou nezáporné spojité funkce $y = f(x)$, osou x a rovnoběžkami s osou y v krajních bodech intervalu $\langle a, x \rangle$, jak je zřejmé z obr. 3a.



Obr. 3a. Grafické vyjádření primitivní funkce.

Lze ukázat, že obsah proměnné plochy $P(x)$ je určen vztahem

$$P(x) = F(x) - F(a),$$

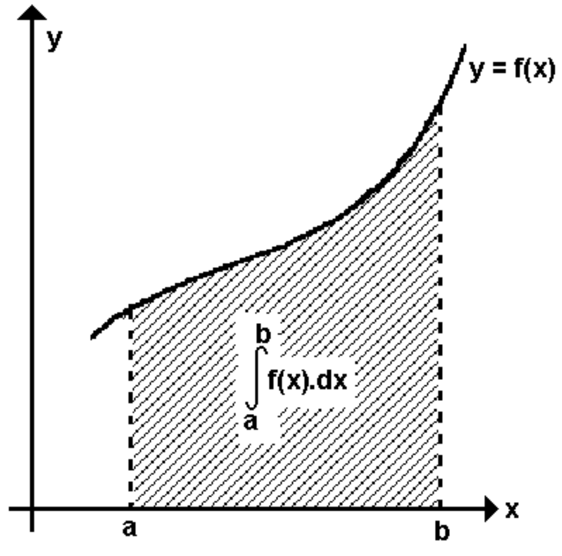
kde F je primitivní funkcí k funkci f. Obsah celé plochy nad intervalem $<a, b>$ je proto dán hodnotou rozdílu $F(b) - F(a)$.

Určitý integrál funkce $f(x)$ na intervalu $<a, b>$ značíme $\int_a^b f(x)dx$ a prakticky jej počítáme jako rozdíl hodnot primitivní funkce v krajních bodech tohoto intervalu:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Tento výraz určuje pro nezápornou spojitou funkci obsah plochy vymezené křivkou funkce, osou x a rovnoběžkami s osou y v krajních bodech intervalu $<a, b>$ - viz obr. 3b.

Názornou ukázku výpočtu určitého integrálu uvedeme v rámci řešení diferenciálních rovnic v následujícím oddílu.



Obr. 3b Grafické znázornění určitého integrálu integrovatelné funkce.

4 Nejjednodušší diferenciální rovnice a jejich řešení

Matematický popis většiny dynamických systémů, včetně systémů biofyzikálních, je založen na diferenciálních vztazích mezi veličinami ve tvaru tzv. **diferenciálních rovnic**. Jejich řešením (pokud existuje) jsou hledané funkční vztahy mezi veličinami, popisující tyto systémy.

Rovnice, v nichž se vyskytuje neznámá funkce jediné proměnné spolu se svými derivacemi, nazýváme **obyčejnými diferenciálními rovnicemi.** Závisí-li hledaná funkce, tedy i její derivace, na více nezávisle proměnných, nazýváme matematické vyjádření jejich vztahu **parciální diferenciální rovnicí**.

Řád rovnice je určen stupněm nejvyšší derivace v ní zastoupené.

Obecný tvar obyčejné diferenciální rovnice n-tého řádu je možno na určitém definičním intervalu vyjádřit vztahem:

$$G(x,y,y',y'',....,y^{(n)}) = 0,$$

kde G je funkce proměnných x, y a jejích derivací.

Řešením takovéto diferenciální rovnice rozumíme každou funkci y proměnné x, která pro všechna x příslušného definičního intervalu spolu se svými derivacemi uvedené rovnici vyhovuje.

Řešením diferenciální rovnice není nikdy jediná funkce. V obecném případě diferenciální rovnice n-tého řádu představuje množina všech řešení ***n*-parametrický systém** jednotlivých **částečných** neboli **partikulárních řešení** této rovnice, z nichž každé je předem určeno vhodnými počátečními podmínkami.

Množinu všech partikulárních řešení lze vyjádřit ve tvaru **obecného řešení** diferenciální rovnice tak, že každé partikulární řešení je v tomto obecném řešení zahrnuto.

Řešení diferenciálních rovnic je ve většině případů velmi obtížné a vyžaduje rozsáhlé znalosti z matematické analýzy. Jednoduše řešitelné jsou pouze některý typy diferenciálních rovnic, z nichž nejjednodušší jsou **rovnice 1. řádu se separovanými proměnnými**:

$$y' = f(x).g(y),$$

kde $f(x)$, $g(y)$ jsou libovolné spojité funkce uvedených proměnných na určitých definičních intervalech, přičemž $g(y) \neq 0$. Rovnici se separovanými proměnnými je možno přepsat do tvaru

$$\frac{dy}{dx} = f(x).g(y)$$

$$\text{neboli} \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

a řešit integrací

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Existuje jednoparametrický systém funkcí y proměnné x, který dostaneme touto integrací ve tvaru obecného řešení, obsahujícího jeden parametr. Konkrétní partikulární řešení y vyhovující počáteční podmínce

$$y(x_0) = y_0,$$

kde x_0 je libovolný bod z definičního intervalu funkce $f(x)$ a y_0 je libovolný bod z definičního intervalu funkce $g(y)$, je přitom určeno vztahem

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Některé typy diferenciálních rovnic 1. řádu je možno vhodnou substitucí proměnných převést na diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.

Řešení diferenciálních rovnic 1. řádu se separovanými proměnnými potvrzuje např. exponenciální průběhy některých fyzikálních i biologických dějů. Jako názorný příklad použijeme odvození Lambertova-Beerova zákona pro absorbci světla. Je zřejmé, že snížení intenzity procházejícího světelného paprsku $-\mathrm{d}I$ bude přímo úměrné tloušťce absorbující vrstvy $\mathrm{d}x$, intenzitě světla vstupujícího paprsku I, koncentraci c absorbující látky v dané vrstvě a nějaké zatím neurčené konstantě k. I koncentrace c je v tomto případě konstantou, takže intenzita procházejícího světla je funkcí pouze proměnné x, tj. tloušťky absorbující vrstvy. Toto tvrzení vyjádříme následujícím zápisem:

$$-\,\mathrm{d}I = I.c.k.\mathrm{d}x.$$

a provedeme separaci proměnných:

$$\frac{dI}{I} = -\,c.k.\mathrm{d}x.$$

Nyní se zamyslíme nad počátečními podmínkami a integračními mezemi. Tloušťka absorbující vrstvy se při průchodu světla mění od 0 do x. Tomu odpovídá změna intenzity procházejícího světla od počáteční hodnoty I_0 na výslednou hodnotu I. Můžeme tedy přikročit k integraci a výpočtu určitého integrálu:

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\int_{0}^{x} c.k.dx\,.$$

Vzhledem k tomu, že c a k jsou konstantami, můžeme integrovat a napsat

$$\ln I - \ln I_0 = -\,c.k(x - 0) = -\,c.k.x$$

čili

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\,c.k.x.$$

Přirozený logaritmus přepočteme na dekadický a zavedeme novou konstantu ε, která se nazývá absorpční koeficient.

$$\log \frac{I}{I_0} = -\,\varepsilon.c.x$$

a přejdeme k obvyklému exponenciálnímu vyjádření

$$I/I_0 = 10^{-\varepsilon.c.x}$$

čili

$$I = I_0\,.10^{-\varepsilon.c.x},$$

což je nám známá podoba Lambertova-Beerova zákona.

Z rovnic vyšších řádů jsou poměrně jednoduše řešitelné **homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty**:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0,$$

kde a_{n-1} , ... a_2, a_1, a_0 jsou reálná čísla. Řešení získáme na základě výpočtu nulových bodů charakteristického polynomu rovnice. Spíše pro ilustraci uvádíme, že partikulárním řešením rovnice

$$y'' + y = 0 \quad \text{jsou funkce} \quad \sin x,\ \cos x$$

a rovnice

$$y'' - y = 0 \quad \text{jsou funkce} \quad e^{-x}, e^{x}.$$

Tyto diferenciální rovnice druhého řádu jsou ve fyzice velmi časté.

Metodou variace konstant lze potom odvodit i řešení libovolné **nehomogenní lineární diferenciální rovince s konstantními koeficienty**, kde se na pravé straně může vyskytnout nějaká spojitá funkce nezávisle proměnné x.

Pokud je **analytické řešení** diferenciální rovnice příliš obtížné nebo není dostupné vůbec, je možno hledat přibližná řešení **numerickými metodami** s využitím výpočetní techniky. Obdobně lze využít numerických metod i pro výpočty složitých integrálů.

5 Elementy vektorového počtu

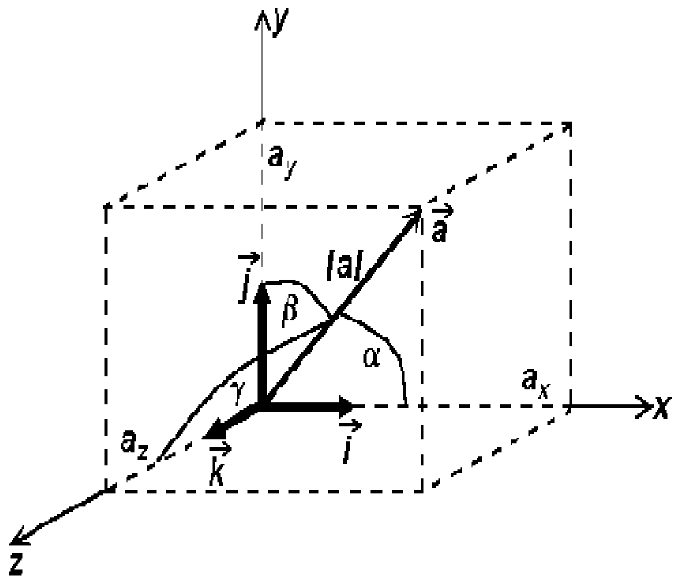
Ve fyzice se můžeme setkat jednak s veličinami, které mají určitou velikost, avšak nelze jim přisoudit žádný směr – tyto veličiny se nazývají **skaláry**. Veličiny, kterým lze přisoudit i směr se nazývají **vektory**. Nyní upozorníme na některé důležité vlastnosti vektorů a uvedeme základní pravidla pro výpočty s nimi. Vektorem je např. rychlost, moment síly, intenzita elektrického pole nebo magnetická indukce. Skalárem je např. hmotnost, energie, tlak nebo elektrické napětí. Vektorů lze s výhodou použít i pro popis poloh bodů v souřadnicových soustavách – pak hovoříme o tzv. **polohových vektorech**.

Vektor $\vec{a}$, jehož kladný směr svírá s osami x, y, z pravoúhlé souřadnicové soustavy úhly α, β, γ má tzv. **kartézské složky** (viz též obr. 5a):

$$a_x = a\cos\alpha\ ,\qquad a_y = a\cos\beta\ ,\quad a_z = a\cos\gamma,$$

kde

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \geq 0$$



Obr. 5. Zobrazení vektoru v kartézských souřadnicích.

je velikost vektoru $\vec{a}$. Kosiny úhlů α, β, γ se nazývají **směrové kosiny** daného vektoru. Složky vektoru a_x, a_y, a_z jsou skaláry a nazývají se **souřadnice vektoru.**

Z geometrického názoru a předchozích vztahů plyne po jisté úvaze:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$
$$a = a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma$$

Násobkem vektoru $\vec{a}$ s libovolným reálným číslem (skalárem) $s \neq 0$ je vektor $s\vec{a}$, který má složky

$$sa_x\ ,\ sa_y\ ,\ sa_z\ .$$

Záporná hodnota veličiny s mění orientaci výsledného vektoru o 180° vůči vektoru původnímu.
Pro velikost tohoto vektoru platí

$$|s\vec{a}| = |s|a \; .$$

V případě, kdy bude s = 1/a, dostaneme vektor

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{a}\vec{a}$$

a bude platit, že

$$a^0 = |\vec{a}^0| = 1 \qquad \text{a} \qquad \vec{a} = a\vec{a}^0 \; .$$

Vektor $\vec{a}^0$ se nazývá **jednotkový vektor** vektoru $\vec{a}$ a tyto vektory jsou spolu souhlasně rovnoběžné. Jednotkový vektor má složky

$$a_x^0 = \cos\alpha, \qquad a_y^0 = \cos\beta, \qquad a_z^0 = \cos\gamma.$$

Jednotkové vektory v kladném směru os souřadnicového systému *x*, *y*, *z* značíme $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ a mají tyto složky:

$$\begin{array}{lll} i_x = 1, & i_y = 0, & i_z = 0, \\ j_x = 0, & j_y = 1, & j_z = 0, \\ k_x = 0, & k_y = 0, & k_z = 1. \end{array}$$

Jednotkový vektor není jen formální matematickou abstrakcí, ale má i ve fyzice značný význam. Připomeňme si definici tlaku: $p = F/S$, kde F je síla působící kolmo na plochu S. Víme, že tlak je na směru nezávislý, že je skalární veličinou. Z uvedeného vzorce však můžeme vyjádřit sílu

$$F = p.S.$$

Síla je vektor, tlak nikoliv, takže jediným vektorem na pravé straně rovnice může být jen plocha S. Správný zápis rovnice tedy zní:

$$\vec{F} = p \cdot \vec{S}$$

Vektor plochy chápeme jako součin skalární velikosti plochy S a jednotkového vektoru plochy $\vec{S}^0$, který má směr kolmý k ploše:

$$\vec{S} = S \cdot \vec{S}^0 \; .$$

Součet a rozdíl vektorů

Součet vektorů zapíšeme

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

a má složky

$$c_x = a_x + b_x, \qquad c_y = a_y + b_y, \qquad c_z = a_z + b_z \; .$$

Na základě výše uvedeného je patrno, že každý vektor lze zapsat jako součet tří vektorů ve tvaru

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

nebo

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \; .$$

Tento tvar se označuje jako semikartézské vyjádření vektoru (je určen vektorovým součtem vektorových složek v osách souřadnic).

Pro součet vektorů platí zákon komutativní

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}\,.$$

Velikost výsledného vektoru $\vec{c}$ vypočítáme podle kosinové věty

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}\,,$$

kde γ je úhel sevřený vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

Pro rozdíl vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ platí:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

a totéž, co pro sčítání vektorů, s výjimkou zákona komutativního.

Násobení vektorů

Daný vektor můžeme násobit jiným vektorem. Násobené vektory svírají úhel α.

Skalární součin dvou vektorů je skalárem rovným

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cos\alpha\,.$$

Pro skalární součin vektorů platí

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \qquad \text{a} \qquad \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \pm \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}\,.$$

Vyjádříme-li násobené vektory v semikartézské podobě, pak se snadno přesvědčíme, že platí:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Typickým fyzikálním příkladem skalárního součinu dvou vektorů je práce, definovaná jako skalární součin dráhy (posunutí) a síly:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F.s.\cos\alpha,$$

kde α je úhel sevřený mezi vektorem síly a dráhy, po které síla působí.

Vektorový součin dvou vektorů definujeme jako vektor $\vec{c}$, jehož velikost a směr se určí takto:

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = a.b.\sin\alpha,$$

kde vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou lineárně nezávislé.

Směr vektoru $\vec{c}$ je kolmý na rovinu určenou vektory $\vec{a}, \vec{b}$ a míří do poloprostoru, z něhož se otočení od $\vec{a}$ k $\vec{b}$ děje v kladném smyslu (proti směru pohybu hodinových ručiček). Jednotlivé složky vektorového součinu jsou definovány takto:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_x = a_y b_z - a_z b_y \qquad \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

Bez bližšího zdůvodnění uvádíme vzorce, které platí pro počítání s vektorovým součinem:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\pm\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}\pm\vec{a}\times\vec{c}$$

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\,.$$

Příkladem použití vektorového součinu ve fyzice může být vztah pro výpočet Lorentzovy síly, která působí na náboj q pohybující se v stacionárním magnetickém poli. (Tato síla udržuje na kruhové dráze protony v cyklotronu nebo vychyluje elektronový svazek v elektronovém mikroskopu.) Ve "středoškolské podobě" známe tento zákon takto:

$$F = q.B.v \qquad \text{resp.} \qquad F = q.B.v.\sin\alpha,$$

kde α je úhel sevřený vektorem magnetické indukce B a vektorem rychlosti pohybu náboje v. K tomu se musíme naučit zpaměti pravidlo určující směr síly působící na náboj. Ve skutečnosti je však tento vzorec správně zapisován takto:

$$\vec{F}=q\cdot\left(\vec{B}\times\vec{v}\right).$$

Fyzikální realitu tedy popisuje vektorový součin. Pořadí veličin ve vzorci není libovolné a směr působící síly je dán vlastnostmi vektorového součinu – je kolmý k rovině dané vektory magnetické indukce a rychlosti náboje a "míří do poloprostoru, z něhož se otočení od $\vec{B}$ k $\vec{v}$ děje v kladném smyslu". S vektorovými součiny se setkáváme především v mechanice a v teorii elektromagnetismu.

Gradient

Na závěr výkladu k základním pojmům vektorového počtu (a vektorové analýzy) přikročíme k vysvětlení důležitého matematicko-fyzikálního pojmu - gradientu.

Představme si, že stojíme na úpatí vysoké skály, a potom se nějakým způsobem dostaneme na její vrchol. Tímto přesunem v gravitačním poli jsme získali, oproti výchozímu bodu, určitou potenciální energii. Podstatné je, že potenciální energie, kterou jsme při výstupu na skálu získali, závisí jen na poloze výchozího a koncového bodu našeho výstupu, bez ohledu na způsob přesunu. Také změna potenciální energie elektrického náboje v elektrostatickém poli, který prošel mezi dvěma body v prostoru, závisí jen na jeho počáteční poloze a konečné poloze, nikoliv na dráze, kterou prošel. Pokud má nějaké silové působení v přírodě tuto vlastnost, pak hovoříme o skalárním poli. V každém bodě prostoru je definován skalární potenciál, například elektrický potenciál (rozdíl elektrického potenciálu mezi dvěma body je elektrické napětí), gravitační potenciál ap. Ne všechna pole mají tuto vlastnost, například při průchodu náboje magnetickým polem závisí jeho energetický zisk na prošlé dráze.

U skalárních polí a veličin obdobného charakteru lze v každém bodě definovat gradient. Směr tohoto vektoru je kolmicí (normálou) k ploše o konstantní hodnotě potenciálu (ekvipotenciální ploše), procházející daným bodem, tj. v tomto bodě mířící ve směru největší změny dané veličiny. Velikost gradientu je úměrná velikosti (rychlosti) změny této veličiny, tj. hustotě ekvipotenciálních ploch. Přesněji, jeho velikost je rovna derivaci pole ve směru jednotkové normály ekvipotenciální plochy. Gradient přitom míří ve směru nárůstu veličiny, tj. z oblasti nižší energie do oblasti vyšší energie, gradient koncentrace z oblasti nižší koncentrace do oblasti vyšší koncentrace ap. Českým ekvivalentem slova gradient by bylo slovo nárůst nebo vzestup (v praxi se těchto výrazů nepoužívá). Opakem (vektorem opačného směru) gradientu je spád. Někdy se tyto veličiny zaměňují, takže se můžeme dočíst, že např. látka proudí difuzí po gradientu koncentrace, i když ve skutečnosti látka proudí proti gradientu koncentrace (po spádu), aby se rozdíly v její koncentraci vyrovnávaly. Máme-li na mapě znázorněny vrstevnice, můžeme snadno určit směr stoupání jako kolmici na vrstevnice a velikost stoupání (strmost) z hustoty vrstevnic. I toto je vlastně příklad gradientu, kdy skalárním polem je nadmořská výška a ekvipotenciálám odpovídají plochy konstantní nadmořské výšky.

Gradient skalární funkce $f\,(x, y, z)$ je tedy vektor a jeho matematický zápis vypadá takto:

$$\nabla f = \mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{k}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Symbol ∇ čteme jako "nabla" nebo "del" a patří mezi matematické operátory. Gradient tedy můžeme formálně vyjádřit jako součin tohoto operátoru ($\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$), který se sám o sobě chová jako vektor, a skalární funkce f. V této učebnici jsme se setkali s “jednorozměrným” gradientem - např. změnou koncentrace látky ve směru osy x. Pak můžeme pominout jeho vektorový charakter (uvažujeme jen jeho kladnou či zápornou hodnotu) a jednoduše psát

$$\text{gradient funkce } f(x) = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x = f\,'(x).$$

Je však vhodné si uvědomit, že se obecně jedná o veličinu vektorovou, definovanou v třírozměrném prostoru.

Gradienty polí mají veliký význam, například záporně vzatý gradient gravitačního pole je gravitační zrychlení, záporně vzatý gradient elektrického pole je intenzita elektrického pole.

(autor: Vojtěch Mornstein)