# Radiologická fyzika a radiobiologie

## 2. cvičení

# Opakování Ma

- Vyjádřete neznámou E

$$\frac{7U}{X}\left(\frac{3EX^2}{KX}+BX\right)=8JE$$

- Vyjádři neznámou G

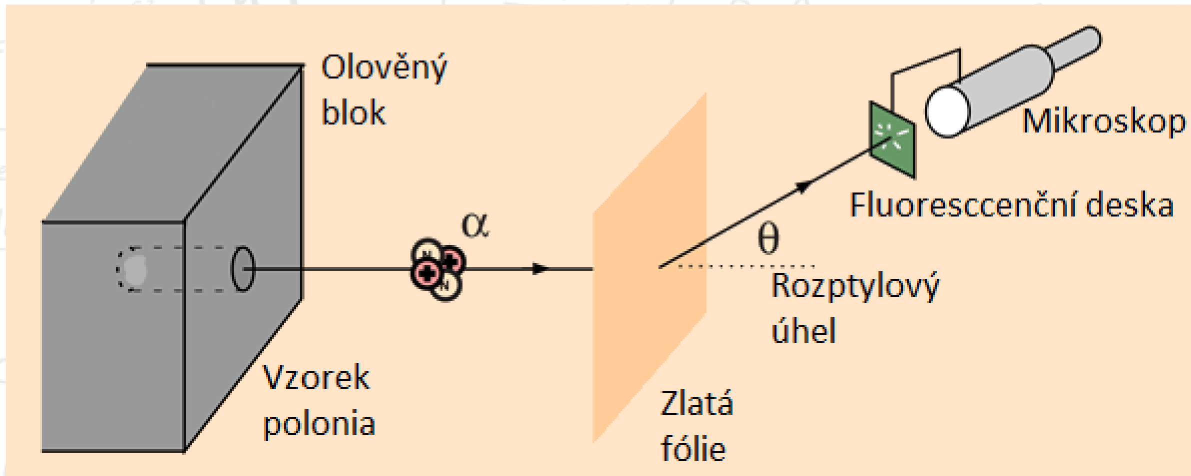
$$(15F+8B)e^{6F-G}=\frac{B^4}{4F}$$

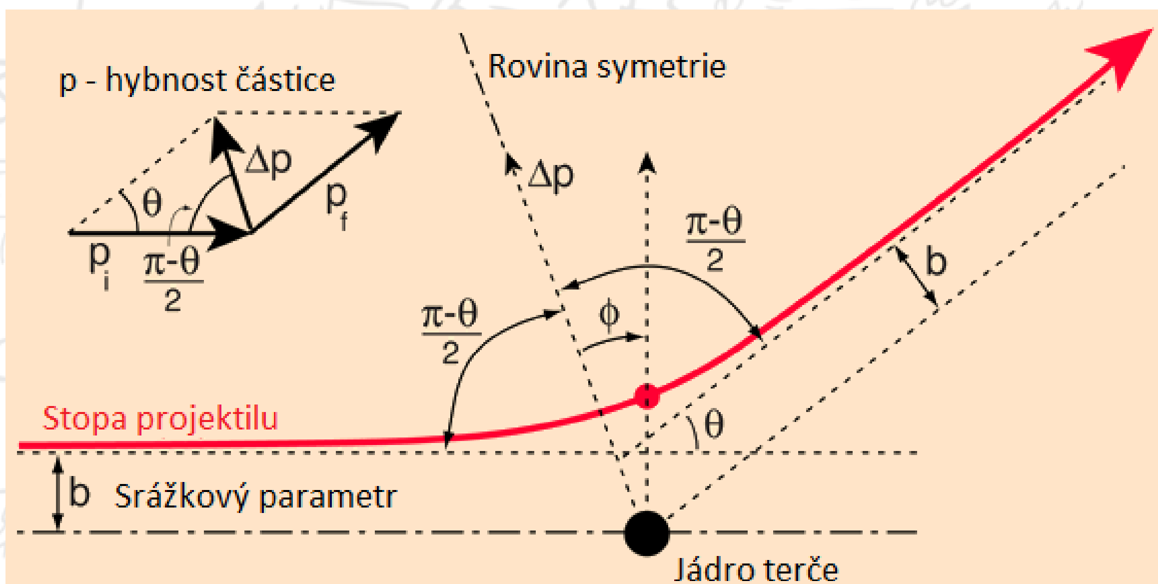
- Vyjádři neznámou T

$$log_8(6T)=\frac{6G}{7K}$$

Podrobněji

# Rutherfordův pokus




http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/rutsca.html

# Rutherfordův pokus

- Za použití vzorce Coulombovy síly

$$F_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r^2}$$

zákona zachování hybnosti a momentu hybnosti dostaneme vzorec pro Rutherfordův rozptyl:

$$\cot\frac{\Theta}{2} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{m v_0^2}{Z_1 Z_2 e^2} b$$

Podrobněji

# Atomové počty

- **Jakou relativní atomovou hmotnost má přibližně $^{238}_{92}U$, kolik to je kg a Da?**
- Má 238 nukleonů → Odhad $A_r = 238$
- Přesná $A_r = 238{,}050788$
- $m = A_r u = 3{,}95402\,.\,10^{-25}\,kg$
- $m = A_r = 238{,}050788\,Da$

Doporučuji: http://www.periodictable.com/Isotopes/092.238/index.html

# Atomové počty

- Mohl by se ${}^{238}_{92}U$ samovolně rozpadnout na ${}^{206}_{82}Pb$ a ${}^{63}_{29}Cu$?
- Může z 238 nukleonů vzniknout 269?
- Nemůže, někdy stačí zapojit logiku nejen vzorce…

# Atomové počty

- Jaký bude hmotnostní úbytek ${}^{238}_{92}U$? Jaká je vazebná energie jádra?
- Hmotnost neutronu je $m_n = 1{,}00866u$
- Hmotnost protonu je $m_p = 1{,}00727\ u$
- Hmotnost ${}^{238}_{92}U$ je $m_U = 238{,}05078\ u$
- $m_P = 92m_p = 92{,}66884\ u$
- $m_N = (238 - 92)m_n = 147{,}26436\ u$
- $m = m_P + m_N = 239{,}9332\ u$
- $\Delta m = m - m_U = 1{,}88242\ u$

# Atomové počty

- Hmotnostní úbytek jádra ${}^{238}_{92}U$ je $\Delta m = 1{,}88242\ u$
- Vazebnou energii určíme $\Delta E = \Delta mc^2$
- $\Delta E = \Delta mc^2 = 1{,}88242\ uc^2 = 1{,}88242\,.\,1{,}6605\,.\,10^{-27}\ 9\,.\,10^{16} =$

$\Delta E = 2{,}81318\,.\,10^{-10} J$

# Atomové počty

- Uvažujme, že máme k dispozici 10 t $^{238}_{92}U$ a umíme uvolnit jeho veškerou vazebnou energii (rozpad na jednotlivé nukleony). Kolik Mt TNT by měla takováto jaderná bomba?
- Vazebná energie 1 atomu je

$$\Delta E = 2{,}81318\,.\,10^{-10} J$$

# Atomové počty

- Kolik energie se uvolní z celých 10 t?
- Kolik molů $^{238}_{92}U$ je v 10 t?

$$n = \frac{m}{M_m} = \frac{10000}{238{,}050788.10^{-3}} = 42007{,}84\,mol$$

$$N = nN_A = 42007{,}84\,.\,6{,}022141\,.\,10^{23} = 2{,}52977\,.\,10^{28}$$

- 10 t $^{238}_{92}U$ obsahuje $2{,}52977\ .\ 10^{28}$ atomů
- Energie uvolněná ze všech atomů

$$E = N\Delta E = 2{,}52977\,.\,10^{28}.\,2{,}81318.10^{-10}$$
$$= 7{,}1167.10^{18}J = 7{,}1167\ EJ$$

# Atomové počty

- 1 Mt TNT je přibližně 4,184 . $10^{15}$ J
- **Při 100% účinnosti jaderné reakce (rozpad na jednotlivé nukleony! Což se neděje) se z 10 t $^{238}_{92}U$ uvolní energie $7{,}1167.10^{18} J$ což odpovídá 1700,93 Mt TNT**
- Největší jaderná bomba (sovětská Car-bomba) vážila 27t a její výbuch měl sílu přibližně 50 Mt TNT

Podrobněji

# Atomové počty

- Při zobrazování pacienta metodou SPECT se využívá $^{99m}Tc$, které při rozpadu vyzáří γ-záření. Předpokládejme, že pro kvalitní snímek potřebujeme detekovat $3.10^{12}$ γ-záblesků. Kolik g $^{99m}Tc$ je potřeba do pacienta vpravit? (Hodnoty jsou odhadnuty, nevycházejí z reálných pokusů)

# Atomové počty

- **Relativní atomová hmotnost $^{99m}$Tc je**

$$A_r = 98{,}9062$$

- Kolik molů $^{99m}$Tc potřebujeme?

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{3.10^{12}}{6{,}022141.10^{23}} = 4{,}981.10^{-12}\ mol$$

- Kolik je to g?

$$m = nM = 4{,}981\,.10^{-12}\,.\,98{,}9062\,.\,10^{-3}$$
$$= 0{,}49265\,.10^{-12}\,kg = 492{,}65\ \mu g$$

# Atomové počty

- Hustota $^{98}Tc$ je

$$\rho = 11\,000\,\frac{kg}{m^3} = 11\,\frac{g}{cm^3}$$

- Jaký je to přibližně objem?

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{492{,}65.10^{-6}}{11} = 0{,}044786\ mm^3$$

- V našem vymyšleném příkladu by bylo potřeba do pacienta vpravit alespoň 492,65 μg $^{99m}Tc$, což přibližně odpovídá objemu 0,0448 mm$^3$

# Atomové počty

- Klidová energie neutronu je $m_n = 1{,}00866u$. Vyjádřete jeho hmotnost v eV/c$^2$

$$E = mc^2 = 1{,}00866 \times 1{,}6605.10^{-27} \times 9.10^{16}$$

$$E = 1{,}5073919.10^{-10} J$$

$$E = \frac{1{,}5073919.10^{-10}}{1{,}602176.10^{-19}} eV$$

$$E = 0{,}94084.10^{9} eV = 940{,}84\ MeV$$

$$m = \frac{E}{c^2} = 940{,}84 \frac{MeV}{c^2}$$

# Zasloužená pauza

# Stavová rovnice

$$pV = nRT$$

- Popisuje vzájemný vztah tlaku, objemu a termodynamické teploty ideálního plynu.
- Stavové veličiny
  - ➢ Popisují stav systému
  - ➢ Např: Objem (V), hmotnost (m), tlak (p), teplota (T), hustota (ρ), látkové množství (n), počet částic (N)…

Podrobněji

# Termodynamické děje

- Na plynovou bombu o objemu 50l obsahující vodík při tlaku 10 atmosfér začne svítit slunce. Bomba se zahřeje z 20 C na 55 C. Co se stane s objemem a tlakem vodíku?

# Termodynamické děje

- Objem vodíku je dán rozměry bomby → objem je konstantní
- Teplota se zvyšuje, objem zůstává stejný → tlak se musí měnit.
- **Jedná se o izochorický děj, platí Charlesův zákon ($\frac{p}{T} = konst.$)**

# Termodynamické děje

- 1 atmosféra (1 atm) je hydrostatický tlak u hladiny moře (dnes se moc nepoužívá)
- 1 atm = 101,325 kPa

$$\frac{p_1}{T_1} = konst = \frac{p_2}{T_2}$$

$$p_2 = \frac{p_1}{T_1} T_2 = \frac{10 \times 101325}{20 + 273{,}15}(55 + 273{,}15)$$

$$p_2 = 1{,}1342MPa = 11{,}193\ atm$$

# Termodynamické děje

- V uzavřené válcové nádobě s lehkým pohyblivým pístem o průměru 8 cm máme dusík. Při tlaku 100 kPa a teplotě -20 C bylo víčko ve výšce 5 cm. Pokud se teplota zvýší na 80 C do jaké výšky víčko vystoupá?

# Termodynamické děje

- O jaký děj se jedná?
- Při zahřívání se má plyn tendenci rozpínat, tudíž zvětšuje svůj objem. Tlak okolí na píst nádoby je stejný, tudíž i tlak v nádobě zůstává stejný. Jedná se o izobarický děj.
- Co víme o izobarickém ději?
- **Tlak je konstantní a platí** $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

# Termodynamické děje

- $T_1\ a\ T_2$ známe. $V_1$ neznáme, ale můžeme si jej dopočítat.
- Jedná se o válcovou nádobu. Objem válce zjistíme ze vzorce $V = \pi r^2 v$, kde $v$ je výška válce a $r$ je poloměr válce.

$$V_1 = \pi r^2 v = \pi 0{,}04^2 0{,}05 = 2{,}512.10^{-4} m^3 = 251{,}2\ cm^3$$

- Známe vše pro výpočet $V_2$?

$$\frac{V_1}{T_1} T_2 = V_2 = \frac{2{,}512.10^{-4}}{253{,}15} 353{,}15 = 3{,}504.10^{-4} m^3$$

# Termodynamické děje

- Známe konečný objem, ale do jaké výšky vystoupal píst nádoby?

$$V_2 = \pi r^2 v_2 \;\rightarrow v_2 = \frac{V_2}{\pi r^2} = \frac{3{,}504.10^{-4}}{\pi 0{,}04^2} = 0{,}0697\,m$$

- Píst vystoupal do výšky téměř 7 cm

# Termodynamické děje

- První koule má poloměr 10 cm je naplněna heliem o teplotě 30 C a při tlaku 250 kPa.
- Druhá koule má průměr 40 cm a je vzduchoprázdná.
- Určete p, V a T po spojení těchto nádob

# Termodynamické děje

- Nejprve si musíme určit jednotlivé objemy

$$V_{1K} = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi 0{,}1^3 = 4{,}186.10^{-3}\ m^3$$

$$V_{2K} = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi 0{,}2^3 = 0{,}0335\ m^3$$

- O jaký děj se jedná?
- Objem helia vzroste z $V_{1K}$ na $V=V_{1K}+V_{2K}$ →nejedná se o izochorický
- Tlak helia se změní → nejedná se o izobarický

# Termodynamické děje

- Jak to bude s teplotou?
- Teplota plynu se dá zjistit pomocí střední kinetické energie částic $T = \frac{2\overline{E_K}}{3k_B}$

  Po spojení nádob nedojde ke změně této energie, takže T je konstantní
- Platí $p_1 V_{1K} = p_2(V_{1K} + V_{2K})$

$$p_2 = \frac{p_1 V_{1K}}{V_{1K} + V_{2K}} = 2{,}5.10^5 \frac{4{,}186.10^{-3}}{0{,}037686} = 27{,}768\ kPa$$

# Konec 2. cvičení


# Cvičení na e-learningu

# Dodatky 1

Příklad 1. Vyjádři E

$$\frac{7U}{X}\left(\frac{3EX^2}{KX}+BX\right)=8JE$$ / roznásobíme závorku

$$\frac{21UEX^2}{KX^2}+\frac{7UBX}{X}=8JE$$ / pokrátíme co jde

$$\frac{21UE}{K}+7UB=8JE$$ / -8JE -7UB

$$\frac{21UE}{K}-8JE=-7UB$$ / vytkneme E

$$E\left(\frac{21U}{K}-8J\right)=-7UB$$ / vydělíme závorkou

$$E=-\frac{7UB}{\frac{21U}{K}-8J}$$ / upravíme

$$\boxed{E=-\frac{7UBK}{21U-8JK}}$$

zpět

# Dodatky 1

Příklad 1. Vviádři G

$$(15F+8B)e^{6F-G}=\frac{B^4}{4F}$$ / vydělíme závorkou

$$e^{6F-G}=\frac{B^4}{4F(15F+8B)}$$ / přirozený logaritmus (o základu e)

$$6F-G=\ln\frac{B^4}{4F(15F+8B)}$$ / -6F (-1)

$$\boxed{G=6F-\ln\frac{B^4}{4F(15F+8B)}}$$ / můžeme dále upravovat (procvičení log) podíl argumentu je rozdíl logaritmů

$$G=6F-\{\ln B^4-\ln[4F(15F+8B)]\}$$ / roznásobení, zbavení se {}

$$G=6F-\ln B^4+\ln(60F^2+32FB)$$ / mocnění v ln je násobení ln

$$G=6F-4\ln B+\ln(60F^2+32FB)$$ / nic víc už nejde

zpět

# Dodatky 1

Příklad 1. Vyjádři T

$$\log_8(6T) = \frac{6G}{7K}$$

/ exponenciální a log funkce jsou inverzní

$$\log_8(6T) = \log_8 8^{\frac{6G}{7K}}$$

/ rovnost argumentů

$$6T = 8^{\frac{6G}{7K}}$$

/ 6

$$T = \frac{8^{\frac{6G}{7K}}}{6}$$

/ finální úprava exponenciální funkce

$$T = \frac{8^{6G} 8^{\frac{1}{7K}}}{6}$$

/ finální úprava exponenciální funkce

$$T = \frac{8^{6G} 8^{(7K)^{-1}}}{6}$$

/ finální úprava exponenciální funkce

$$\boxed{T = \frac{1}{6}\frac{8^{6G}}{8^{7K}}}$$

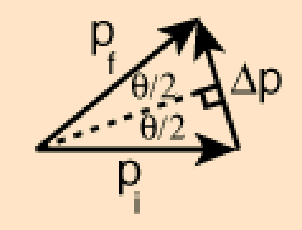
Některé kroky se dají udělat v 1 kroku, ale pro názornost podrobně rozepsáno.

Konec 1. dodatku.

zpět

# Dodatky 2

- Rutherfordův experiment trochu podrobněji
- Nejprve geometrie pokusu:




- Změna vektoru hybnosti je díky pravoúhlosti:

$$\Delta p = 2mv_0 \sin\frac{\Theta}{2}$$

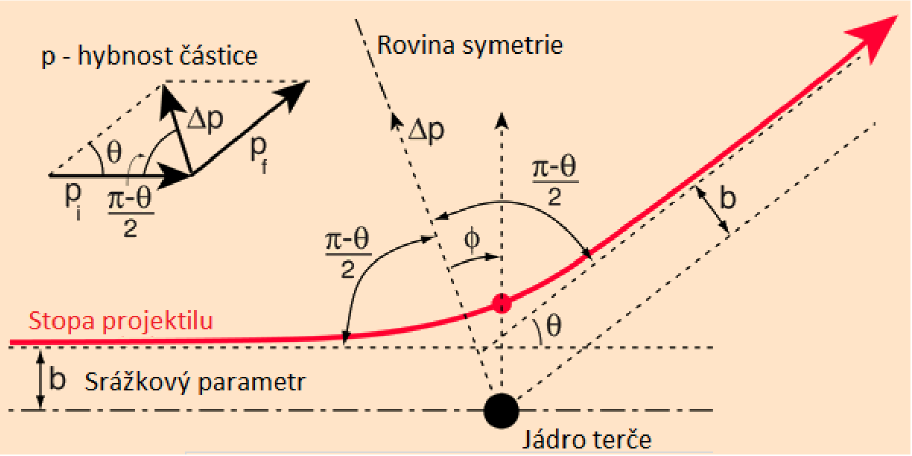
- Impuls síly je roven změně hybnosti

$$I = \Delta p = \int F_{\Delta p} dt$$

zpět

# Dodatky 2

- Síla měnící dráhu letu je Coulombova síla
- Vektor síly se mění v čase (vzdálenost r i směr působení)




$$F_{\Delta p} = F_C \cos\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r^2}\cos\Phi$$

zpět

# Dodatky 2

- Změna hybnosti je tedy rovna

$$\Delta p = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\cos\Phi}{r^2} dt = 2mv_0 \sin\frac{\Theta}{2}$$

- Ze zákona zachování momentu hybnosti plyne

$$mv_0 b = \frac{mr^2 d\Phi}{dt} \rightarrow \mathrm{r}^2 = \frac{\mathrm{v_0 b\, dt}}{\mathrm{d\Phi}}$$

- Dosazením do předchozího vzorce za $r^2$

$$2mv_0 \sin\frac{\Theta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\cos\Phi}{v_0 b} \frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 v_0 b} \int \cos\Phi\, d\Phi$$

zpět

# Dodatky 2

- Interval hodnot, kterých může úhel Φ nabývat:

$$\Phi \in \left\langle -\frac{1}{2}(\pi - \theta); \frac{1}{2}(\pi - \theta) \right\rangle$$

- Nyní z integrujeme předchozí výraz

$$\int_{\Phi} \cos\Phi \, d\Phi = [\sin\Phi]_{-\frac{1}{2}(\pi-\theta)}^{\frac{1}{2}(\pi-\theta)} = \sin\frac{1}{2}(\pi - \theta) - \sin\frac{-1}{2}(\pi - \theta)$$

- Za využití goniometrických vzorců

$$\int_{\Phi} \cos\Phi \, d\Phi = 2\cos\frac{\theta}{2}$$

zpět

# Dodatky 2

- Celkově dostáváme vztah

$$2mv_0 \sin\frac{\theta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 v_0 b} 2\cos\frac{\theta}{2}$$

- Vyjádříme si srážkový faktor b

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2} \cot\frac{\theta}{2}$$

- Tento vzorec nám vyjadřuje závislost srážkového faktoru („vzdálenost od roviny jádra“) a rozptylového úhlu

Konec 2. dodatku

zpět

# Dodatky 3

Odpálení Car-bomby proběhlo 30. října 1961 v 11:32 moskevského času nad sovětskou jadernou střelnicí Nová země. Bomba byla shozena z letounu Tupolev Tu-95V z výšky 10,5 km. Její padákový systém zbrzdil pád a tím umožnil posádce letadla dostat se do bezpečné vzdálenosti v okamžiku výbuchu. Ten nastal ve výšce 4 km nad povrchem (roznět byl sepnut vestavěným senzorem tlaku vzduchu). Proces štěpení proběhl během 39 ns, jeho výkon byl odhadnut na 5,4 $10^{24}$ W, což by odpovídalo výbuchu 50 megatun TNT. Okamžitě poté vznikla ohnivá koule o teplotě řádově milionů C a průměru 9,2 km, jejíž spodní část zasáhla zem, kde způsobila kráter a zemětřesení o síle 5 - 5,25 stupňů Richterovy stupnice, a vrchní část téměř dosáhla výšky, ze které byla bomba shozena. Během následujících několika sekund ohnivá koule ztratila asi 2 km v průměru, a způsobila tak nasání zasaženého povrchu s větším uvolněním následného radioaktivního spadu a tlakovou vlnu, vyvolanou vyrovnáním tlaku po vypaření veškeré primárně zasažené hmoty, která do 40 km srovnala vše se zemí a měla potenciál působit škodu až do 100 km od epicentra; měřitelná však byla i po svém třetím oběhu kolem Země. Určitá část energie se přeměnila ve světlo, teplo či jiné elektromagnetické záření, které bylo schopné způsobit popáleniny 3. stupně do vzdálenosti 100 km, a bylo pozorovatelné na většině severní polokoule. Atomový hřib s průměrem 40 a výškou 60 km pronikl až do spodní části termosféry Země.

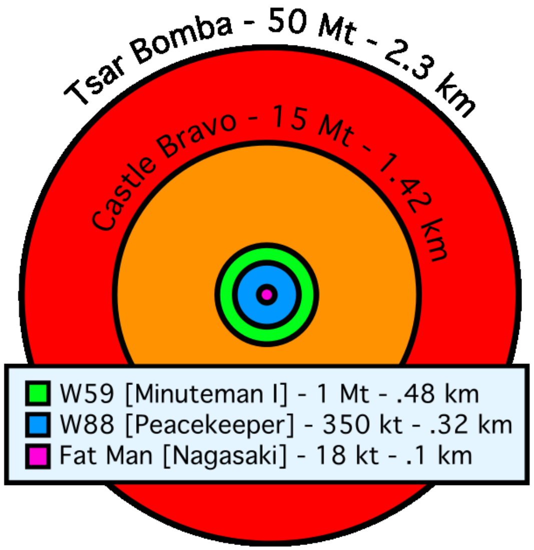
Car-bomba byla schopna naprosto zničit jakékoli město nebo obydlenou oblast o průměru 280 km.

http://cs.wikipedia.org/wiki/Car-bomba

zpět

# Dodatky 3

- Srovnání poloměrů ohnivé koule různých bomb




Konec 3. dodatku

zpět

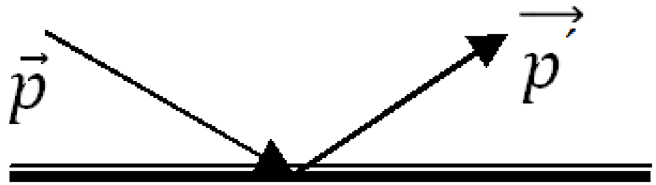
# Dodatky 4

- Odvození stavové rovnice ideálního plynu
- **Ideální plyn máme v krychli o objemu $V = a^3$**
- V tomto objemu je N molekul, které se chaoticky pochybují a narážejí přitom do stěn nádoby. Při každém nárazu dojde ke změně hybnosti molekuly. Protože je hmotnost molekuly zanedbatelná proti stěně nádoby, můžeme předpokládat, že se změní pouze hybnost molekuly. (pink-ponkový míček a betonová zeď)

zpět

# Dodatky 4

- Změna hybnosti při dopadu:




$$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \overrightarrow{p'}$$

- Velikost změny složky kolmé na stěnu:

$$|\vec{p}_z| = mv_z - (-mv_z) = 2mv_z$$

zpět

# Dodatky 4

- Molekula dopadne na stěnu za 1 s k-krát

$$k = \frac{v_z}{2a}$$

- Z Newtonova 2. zákona pro sílu, kterou působí 1 molekula na stěnu nádoby plyne

$$f_z = \Delta p \Delta t = 2mv_z \frac{v_z}{2a} = \frac{mv_z^2}{a}$$

- Pro všech N molekul platí

$$F_z = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{N} mv_{(i)z}^2 = \frac{N}{a} \overline{mv_z^2}$$

- **kde $\overline{mv_z^2}$ vyjadřuje střední hodnotu kvadrátu rychlostí v ose z.**

zpět

# Dodatky 4

- Protože je pohyb molekul chaotický, tak je jejich střední kvadratická rychlost stejná ve všech směrech.

$$\overline{mv_x^2} = \overline{mv_y^2} = \overline{mv_z^2} = \frac{1}{3}\overline{mv^2}$$

- Takže celkovou sílu můžeme za pomoci vzorce pro kinetickou energii přepsat

$$F_z = \frac{N}{3a}\overline{mv^2} = \frac{2N}{3a}\overline{E_K}$$

zpět

# Dodatky 4

- Z Pascalova zákona víme, že tlak je roven síle působící na plochu

$$F_z = pS = \frac{pV}{a} \quad , S = \frac{V}{a}$$

- Tepelný pohyb částic má střední kinetickou energii rovnu

$$\overline{E_K} = \frac{3}{2} k_B T$$

- **Kde $k_B$ je Boltzmannova konstanta**
- $k_B = 1{,}3806\,.\,10^{-23} J.K^{-1}$

zpět

# Dodatky 4

- Nyní dosadíme do rovnice pro sílu působící na stěny nádoby

$$F_z = \frac{pV}{a} = \frac{2N}{3a}\overline{E_K} = \frac{2N}{3a}\frac{3}{2}k_BT$$

$$pV = Nk_BT$$

- Počet částic vyjádříme pomocí Avogadrova zákona

$$pV = nN_Ak_BT$$

- Součin $N_A$ a $k_B$ označíme R – molární plynovou konstantou R = 8,314 J.K$^{-1}$.mol$^{-1}$

$$pV = nRT$$

Konec 4. dodatku

zpět

Prezentace vznikla v rámci fondu rozvoje MU 1515/2014