

Radiologická fyzika a radiobiologie



6. cvičení



Opakování

1. Jak byste slovně popsali Heisenbergovy relace neurčitosti?

[Řešení](#)

2. Jak tyto relace vypadají zapsány matematicky? Okomentuje je.

[Řešení](#)

Charakteristické z.

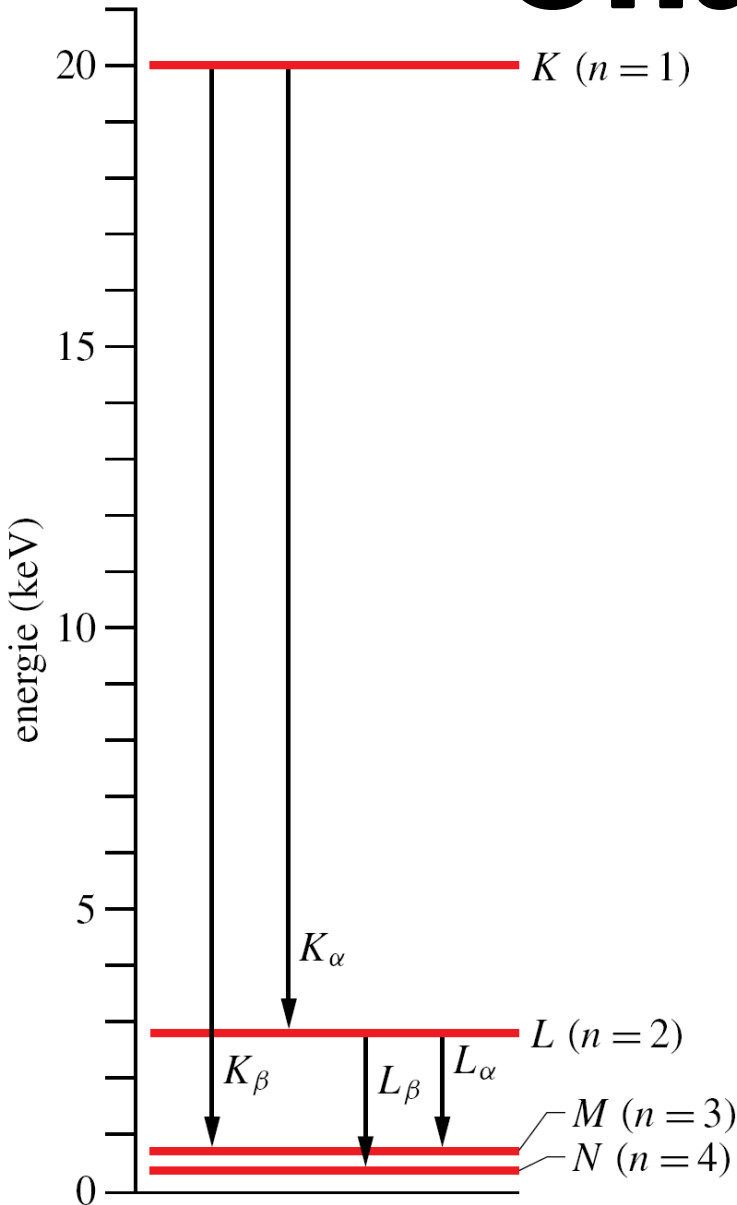
- Už z názvu je patrné, že každý prvek má své vlastní charakteristické záření.
- Studium závislosti volby materiálu anody a vlnové délce emitovaného záření se zabýval H. Moseley.
- Energie elektronového obalu je kvantována a energetické hladiny jsou pro každý prvek unikátní.

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

Charakteristické z.

- Na zjednodušeném diagramu vidíme přechody děr mezi hladinami a jejich označení.



$$E = \frac{mc^2}{2(\hbar c)^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2(Z-1)^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

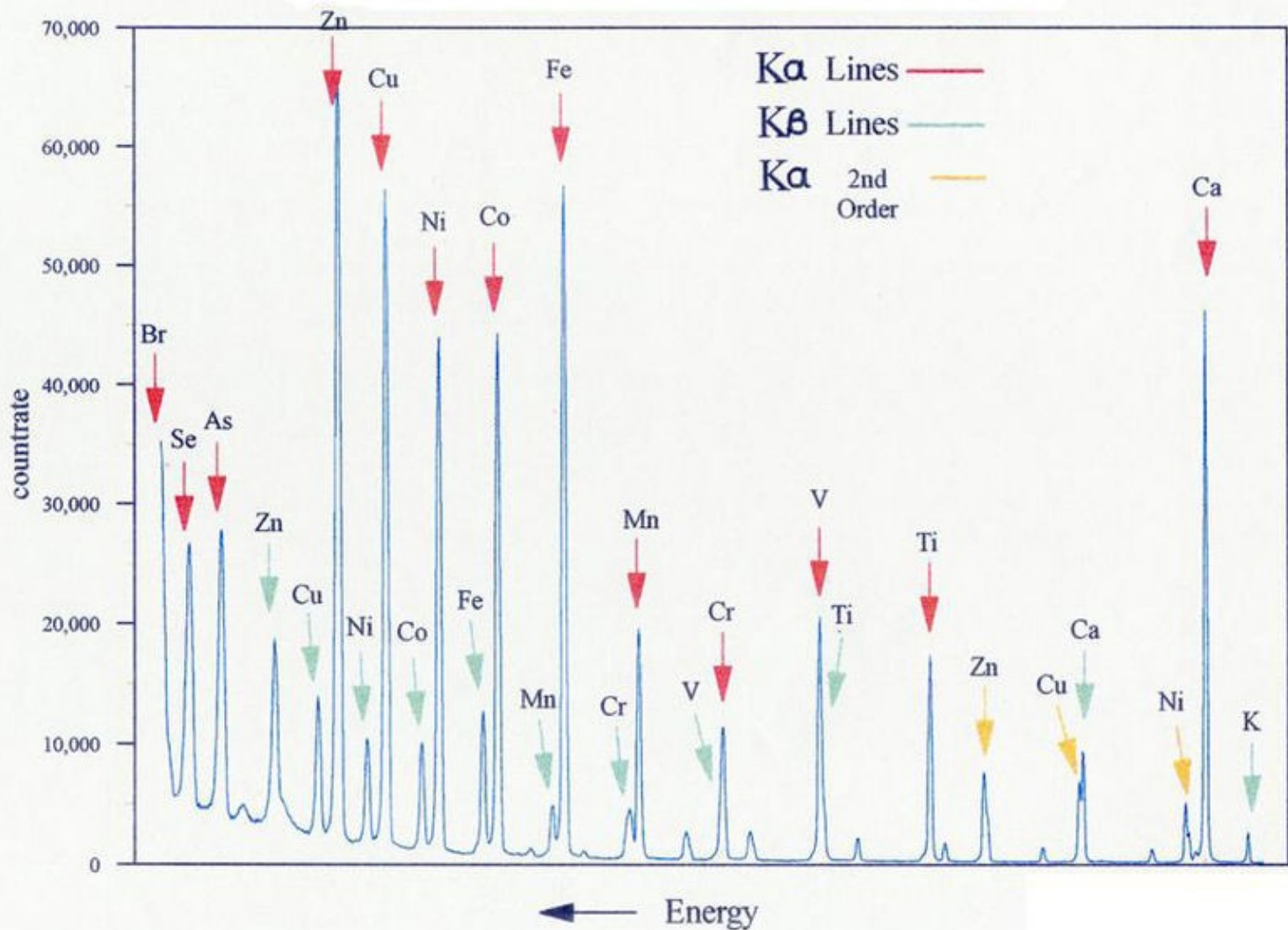
$$E = 13,6(Z-1)^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \text{ eV}$$

Charakteristické z.

3. Mějme excitované technecium ${}_{43}\text{Tc}^*$.
Určete vlnovou délku emitovaného
světla při přechodu K_α a L_β .

[Řešení](#)

Charakteristické z.



$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$
$$U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{NI\sqrt{2}}{r}$$
$$k = \frac{p^2}{2m} m_0 = \frac{M_0}{N_0}$$
$$\lambda = \frac{h}{p}$$
$$\sqrt{2eU_m}$$
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \psi(\alpha)$$
$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$$
$$C(s)$$
$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kTN_0}{M_m}}$$
$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} F_h$$
$$\left(\frac{E_t}{E_0}\right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\cos(\theta_1 + \theta_2)}$$
$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$$

$$2 \tan \theta_B = \frac{m_2}{m_1} = m_{21}$$
$$pV = nRT \quad \Psi = \iint \vec{D} d\vec{S} = AD$$
$$H_{\lambda} = \frac{\Delta M_e}{\Delta \lambda}$$
$$\Phi = NBS$$
$$I_1 I_2$$
$$2\pi d$$
$$X_1 = U_m$$
$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2}$$
$$u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Brzdné záření

- Nabitá částice je brzděna.
- Při tom dochází k vyzařování přebytečné energie ve formě záření.
- Děj je popsán vyzařovacím výkonem.
- Na čem všem bude velikost vyzařovacího výkonu záviset?

Brzdné záření

1. Jedná se o nabitou částici, takže zde budou s největší pravděpodobností konstanty pro popis elektromagnetické interakce (ϵ_0, e).
2. Nejspíš bude platit zákon zachování energie a hybnosti.
3. S hybností je spjata hmotnost a rychlost.
4. Nesmíme zapomenout na vliv STR.

Brzdné záření

$$P = \frac{e^2 \gamma^2}{6\pi \epsilon_0 m^2 c^3} \left[\left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{dt} \right)^2 \right]$$

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} ; E = \gamma m c^2 ; \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

- Časová derivace vektoru hybnosti nám říká, jak rychle se mění směr nebo velikost hybnosti.
- Obdobně časová derivace energie.

Brzdné záření

- Pokud se částice pohybuje po kruhové trajektorii, v čase se mění vektor hybnosti.
- To znamená, že derivace je nenulová a částice musí vyzařovat záření.

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{p}{mc}\right)^4, R = \frac{p}{|eB|}$$

Synchrotron

- Tého skutečnosti se využívá například v synchrotronu.
- Synchrotron je kruhový urychlovač částí, který „generuje“ synchrotronové záření na základě změny směru částice pohybující se rychlostí blízkou rychlosti světla ($\sim 0,9c$).

Synchrotron



$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi$$
$$U_{ef} = U_m$$
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{NI \sqrt{2}}{r}$$
$$k = \frac{p^2}{2m} = \frac{M v^2}{2m}$$
$$\lambda = \frac{h}{p}$$
$$\sqrt{2eUm}$$
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} d\vec{s}$$
$$C(s)$$
$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kTN}{Mm}}$$
$$\lambda = \frac{h \ln 2}{T} F_h$$
$$\left(\frac{E_t}{E_0} \right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$
$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$$

$$2 \tan \vartheta_B = \frac{m_2}{m_1} = m_{21}$$
$$\rho V = n R T \quad \Psi = \iint \vec{D} d\vec{S} = A D$$
$$H_{\lambda} = \frac{\Delta M e}{\Delta \lambda}$$
$$\Phi = N B S$$
$$V = c/\lambda$$
$$X_L = \frac{U_m}{\omega} = \omega L = 2\pi f L$$
$$F_0 = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d}$$
$$U = \frac{W_{AB}}{q} = \frac{|E_{PA} - E_{PB}|}{q}$$
$$I_m = \frac{I_1 I_2}{4\pi r}$$
$$F_0 = \frac{\mu_1 \mu_2}{2\pi d}$$
$$p = \frac{E}{c} = \frac{h f}{c} = \frac{h}{\lambda}$$
$$u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$
$$\int \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
$$R = R_0 \sqrt[3]{A}$$
$$c(s)$$
$$\vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
$$p = \frac{E}{c} = \frac{h f}{c} = \frac{h}{\lambda}$$
$$u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Synchrotron

- Záření produkované synchrotronem má široký rozsah vlnových délek.
- Může dosahovat vysokých intenzit.
- Kvůli oběhu elektronů v prstenci je záření dodáváno v pulzech.
- Může být i polarizované.

Synchrotron

- Provoz je nákladný a v Evropě je celkem 25 synchrotronů různých výkonů a různého stáří.

Země	Počet	Země	Počet
Německo	5	Itálie	2
Švédsko	5	Dánsko	2
Francie	3	Holandsko	1
Švýcarsko	3	Španělsko	1
Velká Británie	3		

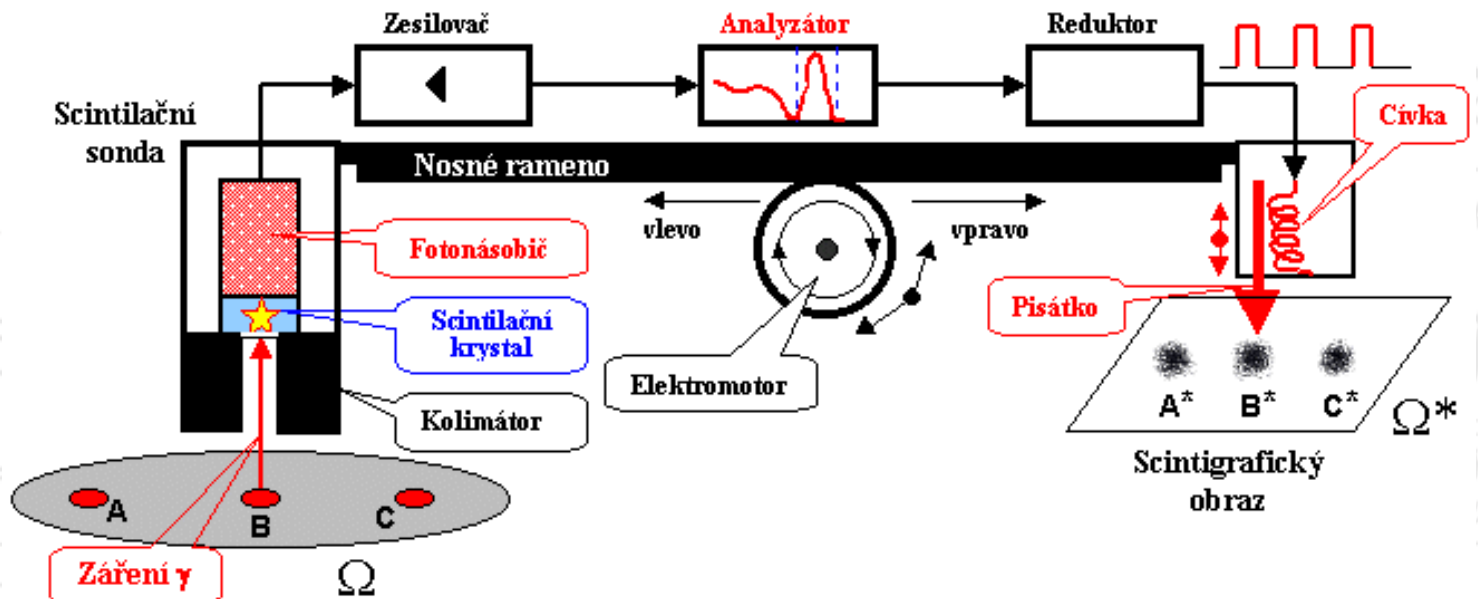
Synchrotron

- Využití synchrotronu je velmi široké.
- Záření se využívá v:
 - Mikroelektronice
 - Nanotechnologiích
 - Materiálových vědách
 - Farmaceutický průmysl
 - Biologii a biomedicíně
 - Výzkum životního prostředí

Detekce γ

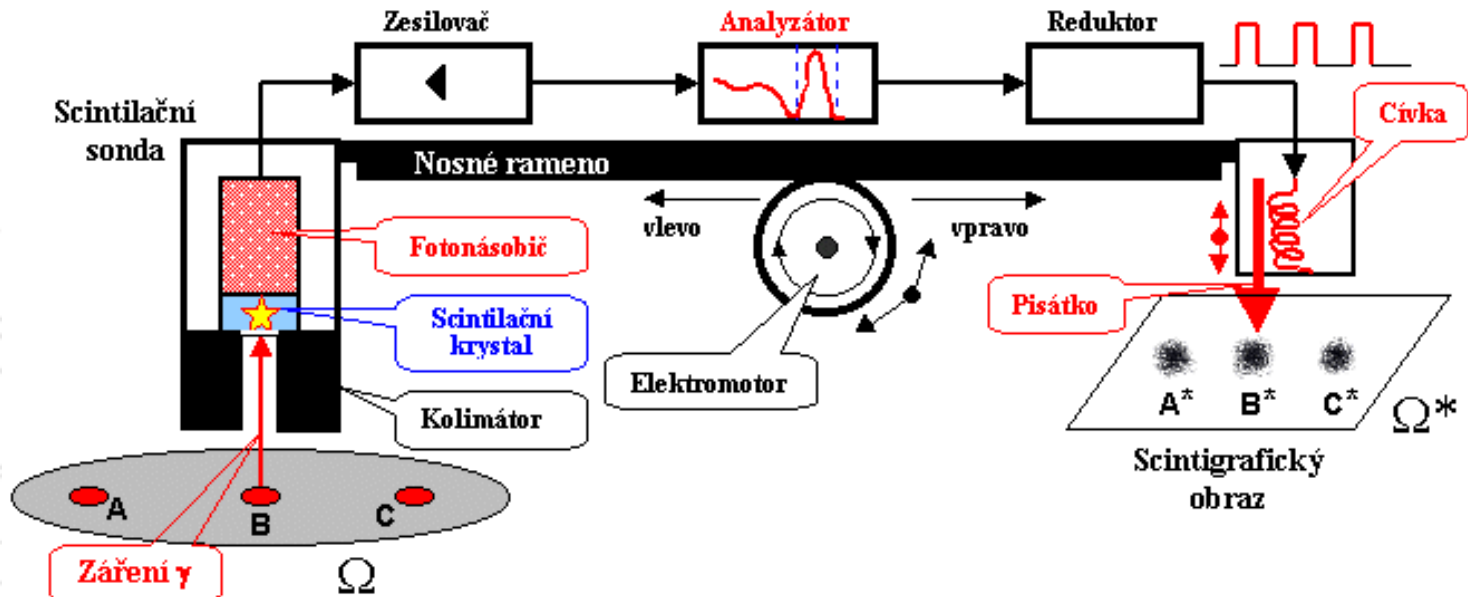
- Pohybový scintigraf bylo první zařízení schopno zobrazit distribuci radioaktivity.
- Jednalo se o scintilační detektor a elektromagnetické „pisátko“ na společném rameni připojeném k elektromotoru.

Detekce γ



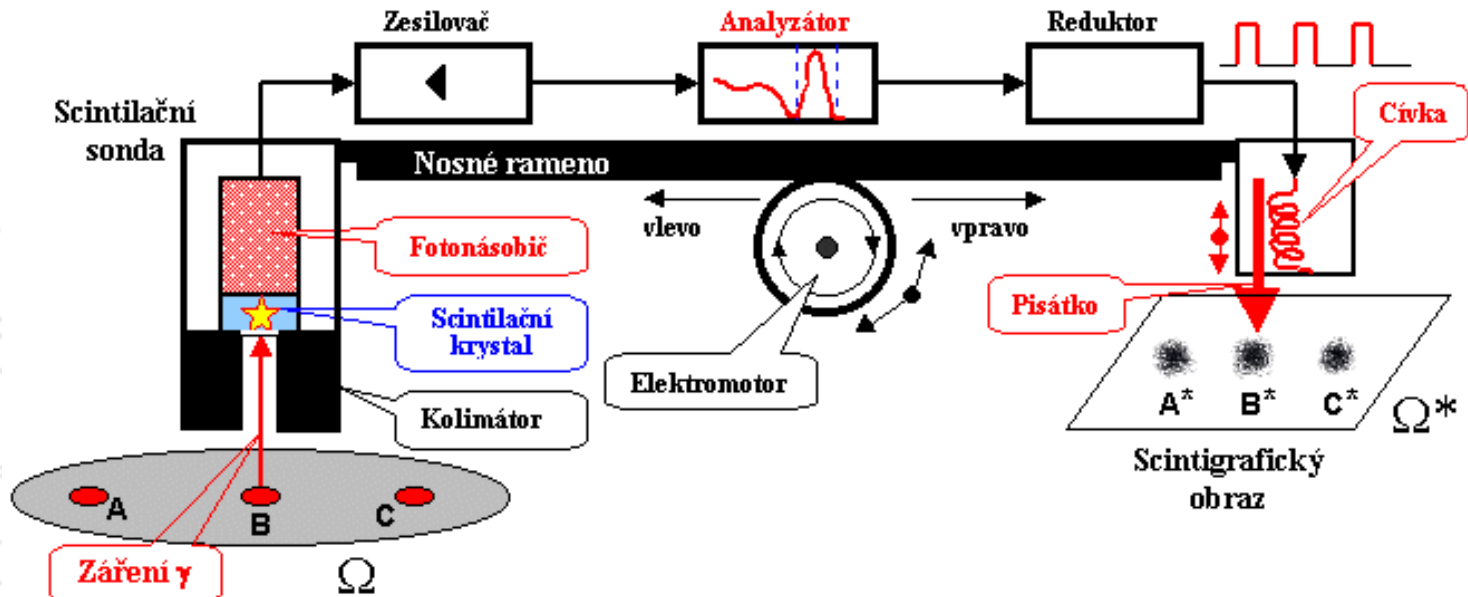
- Sonda se pohybuje nad objektem a detekuje γ -záření pouze kolmo nad zdrojem.
- Signál převádí na elmag. Pulzy.

Detekce γ



- Pulzy jsou zesíleny a jsou vedeny na cívku pisátka.
- Dle intenzity pulzu se cívka rozkmitá a pisátko natisčne značku.

Detekce γ



- Čím silnější radioaktivita, tím větší signál, tím větší frekvence kmitání cívka a tím větší hustota značek otištěných pisátkem na papír.
- Tím vzniká scintigrafický obraz.

Detekce γ

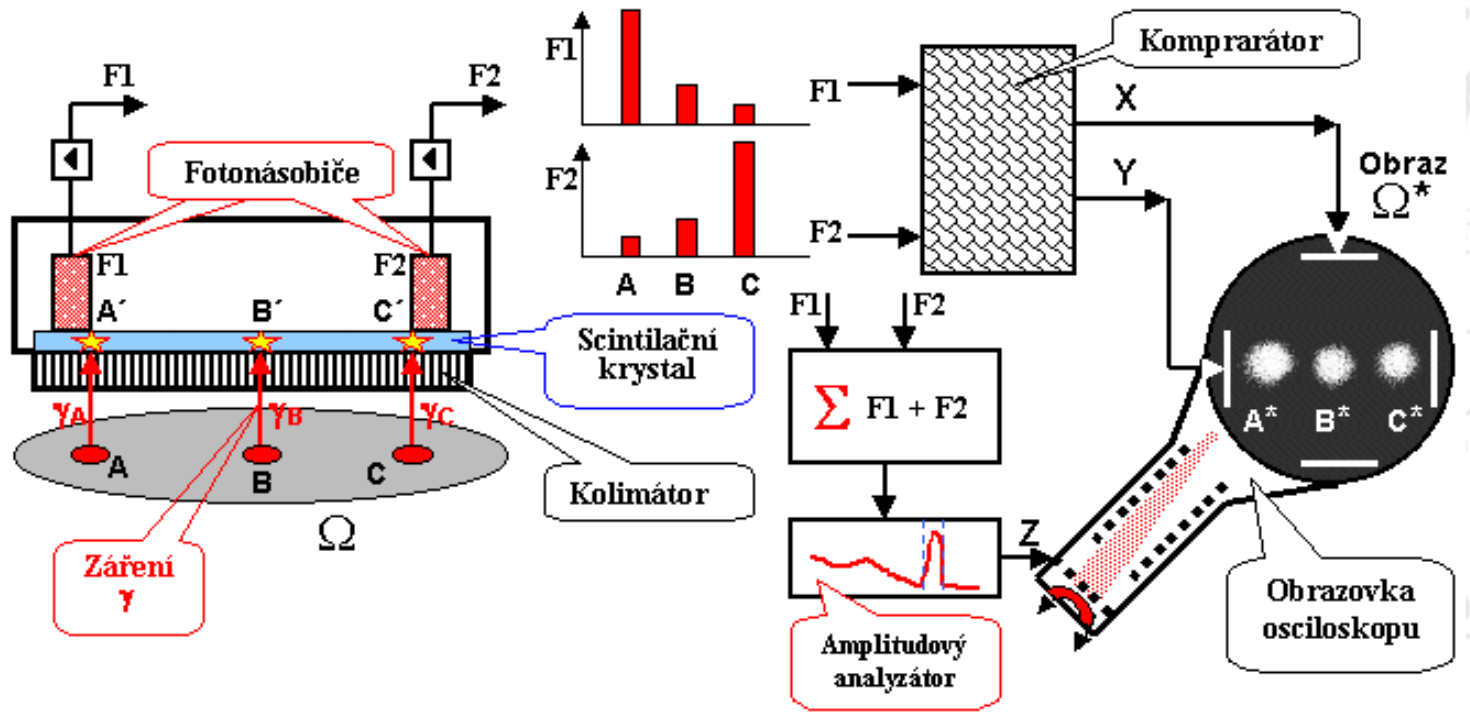
- Jedná se o relativně jednoduchá přístroj, který zobrazoval obraz v 1:1.
- Měření bylo ovšem pomalé, ať už kvůli pomalému pohybu detektoru, tak i dlouhého snímání a záznamu.
- Signál je detekován pouze z jednoho místa (zbytek γ -fotonů nebyl využit).
- Měření je bez časové závislosti (nelze zachytit změnu radioaktivity v čase (statická scintigrafie)).

Detekce γ

- Proto se od 80. let používají γ -kamery.
- Jedná se o principiálně i konstrukčně složité přístroje.
- První zkonstruoval H.O. Anger (1958)
- Použil více fotonásobičů.
- Kolimátor je olověná destička s velkým množstvím otvorů (projdou pouze kolmo dopadající fotony).

Detekce γ

SCINTILAČNÍ KAMERA



$E_k = \frac{1}{2} m v^2$
 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$
 $U_{ef} = U_m$
 $\vec{B} = \mu_0 \frac{NI\sqrt{2}}{r}$
 $k = \rho^2 / 2m m_0 = \frac{M}{N}$
 $\lambda = \frac{h}{p}$
 $\sqrt{2eUm}$
 $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{e}} \psi_{\alpha}$
 $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$
 $C(s)$
 $v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kTN}{Mm}}$
 $\lambda = \frac{h\nu_2}{T} F_h$
 $\left(\frac{E_t}{E_0}\right)_{\parallel} = \frac{2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2}{\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)}$
 $E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$
 $S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$

$2 \tan \vartheta_B = \frac{m_2}{m_1} = m_{21}$
 $pV = nRT \Psi = \iint \vec{D} d\vec{S} = AD$
 $H_{\lambda} = \frac{\Delta Me}{\Delta \lambda}$
 $V = c/\lambda$
 $\Phi = NBS$
 $\vec{F}_m = \vec{B} I l = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d} l$
 $X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L = 2\pi f L$
 $F_9 = \frac{m_1 m_2}{2\pi d}$
 $U = \frac{W_{AB}}{Q} = \frac{|E_{PA} - E_{PB}|}{Q} = \frac{W_{AB}}{Q} = \frac{W_{AB}}{4\pi n_1 n_2}$
 $\vec{E} d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$
 $\rho = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$
 $\omega = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

SPECT

- Jedno-fotonová emisní počítačová tomografie (Single Photon Emission Computerized Tomography).
- Využívá γ -radionuklidy.
- Rotační model (starší).
- Stacionární (novější).

SPECT - rotační

- Rovinná γ -kamera, která se může pohybovat okolo pacienta.
- Tomuto uchycení se říká gantry (portál)
- Může být i více detekčních systémů na jedné gantry (dvouhlavá γ -kamera).
- Gantry obíhá (rotuje) okolo pacienta a snímá rovinné obrazy.

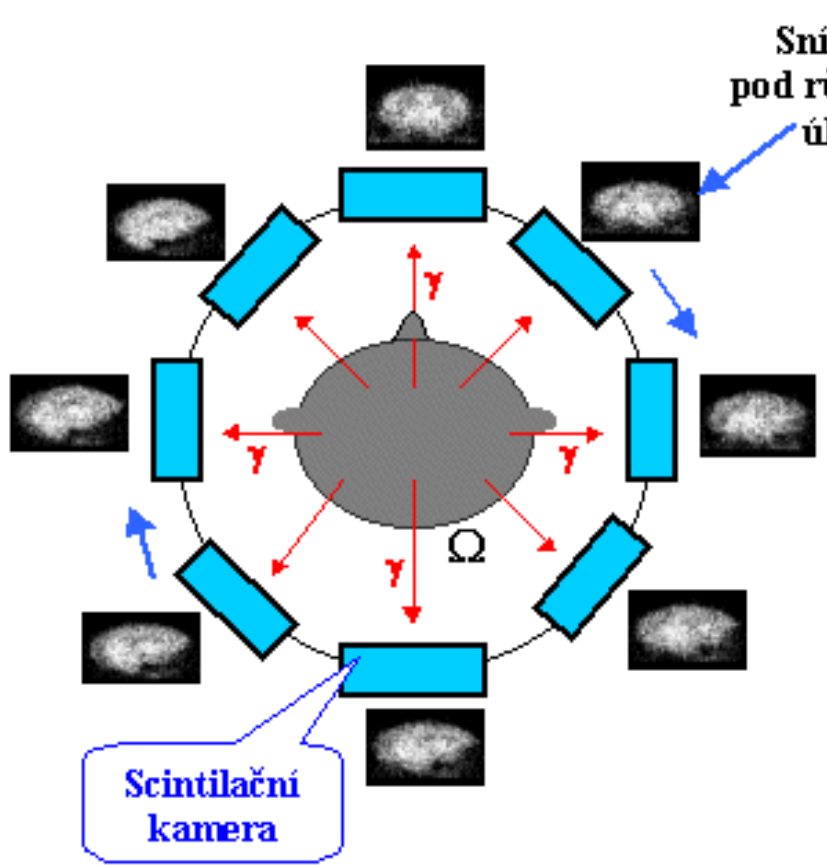
$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi$$

$$U_{\text{er}} = U_m$$

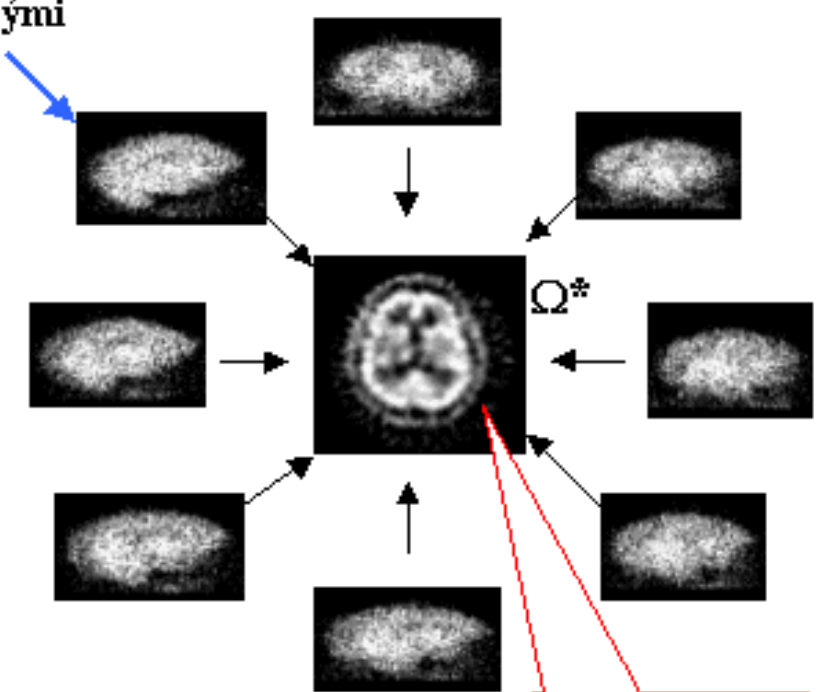
SPECT - rotační

Akvizice SPECT



Rekonstrukce SPECT

Snímky
pod různými
úhly



Zrekonstruovaný
obraz
příčného řezu

$$\vec{B} = \dots$$

$$k = \dots$$

$$\lambda = \dots$$

$$f_0 = \dots$$

$$C(s) = \dots$$

$$v_k = \dots$$

$$\lambda = \dots$$

$$\left(\frac{E_0}{E_0} \right) = \dots$$

$$E_y = E_0 \sin(k_x - \omega t)$$

$$S = \frac{1}{A} \frac{d\omega}{dt}$$

$$R = R_0 \sqrt[3]{\frac{L}{A}}$$

$$E \cdot dl = - \int \frac{\partial \dots}{\partial t} \dots ds$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

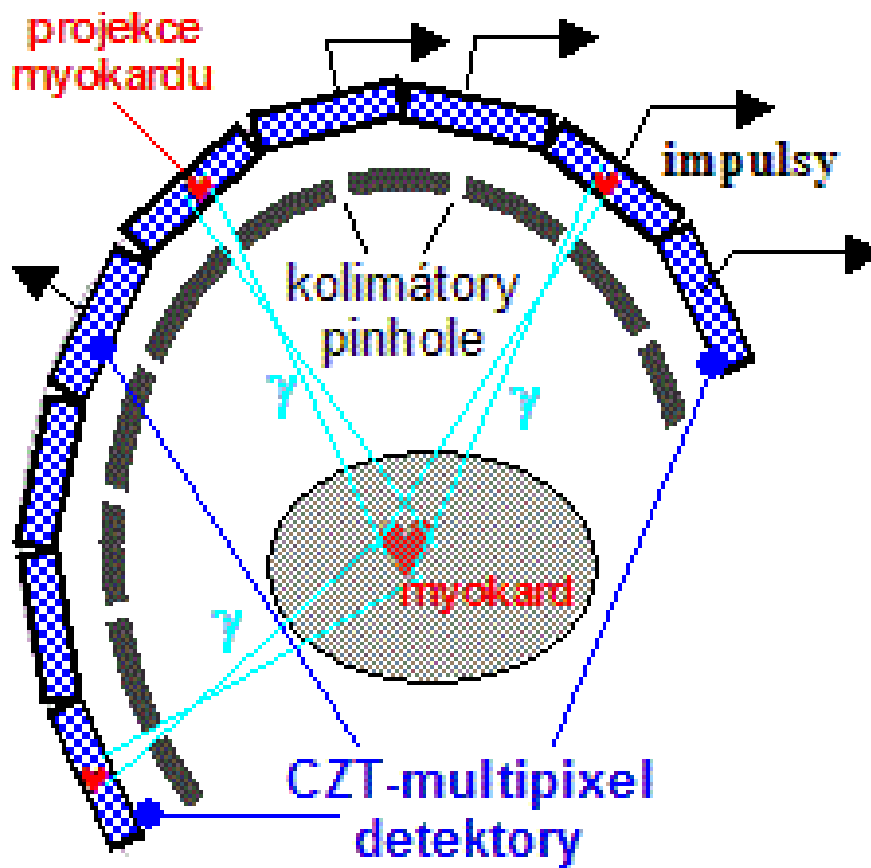
SPECT - rotační

- Rotace může být kontinuální nebo kroková.
- Většinou 32 nebo 64 obrazů.
- Následuje počítačová rekonstrukce obrazů ve výsledný 3D obraz.
- S 3D obrazem se dále pracuje pomocí pokročilých metod analýzy obrazu.
- Nevýhody rotační SPECT:
 - Dlouhá doba vyšetření
 - Nízká detekční účinnost

SPECT - stacionární

- Větší počet stacionárních detektorů.
- Lepší detekční účinnost.
- Rychlejší vyšetření.
- Rekonstrukce obrazu už při měření.
- Nižší dávka radionuklidu.

SPECT - stacionární



$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi$$
$$U_{ef} = \frac{U_m}{2}$$
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{NI \sqrt{2}}{2\pi r m_e}$$
$$k = \rho^2 / 2m m_0 = \frac{M_r \cdot 10^{-3}}{N_A l_t}$$
$$\lambda = \frac{h}{m v}$$
$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \psi(\alpha)$$
$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} d\vec{S}$$
$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kT N_A}{M_r \cdot 10^{-3}}}$$
$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} F_h = S h p g$$
$$\left(\frac{E_t}{E_0} \right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$
$$E_y = E_0 \sin(k_x - \omega t)$$
$$S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$$

$$2 \operatorname{tg} \vartheta_B = \frac{m_2}{m_1} = m_{21}$$
$$\rho V = n R T \Psi = \iint \vec{D} d\vec{S} = A D$$
$$H_\lambda = \frac{\Delta M_e}{\Delta \lambda}$$
$$\frac{\Delta \varphi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{x_2 - x_1}{\lambda}$$
$$V = \frac{h^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2}$$
$$\Phi = \int \vec{A} \cdot d\vec{S}$$
$$X_L = \frac{U_m}{c} = \frac{v}{c} = \frac{v}{2\pi \nu}$$
$$m_1 m_2$$
$$r_2$$
$$k = \pm \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V)}$$
$$\nu = 2\pi f$$
$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$$
$$\frac{1}{2} c v \rho^2$$
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu}$$
$$\frac{x'}{x} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu}$$
$$\vec{\lambda} \vec{S} = Q^*$$
$$\psi_2 = U_e I t$$
$$F_v = \int \frac{F_n}{R}$$
$$\left(\frac{v}{c} \right)^2 \lambda^* T = b$$
$$u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

PET

- Pozitronová Emisní Tomografie.
- Využívá β^+ zářičů.
- Konkrétně detekujeme γ záření vzniklé anihilací pozitronu a elektronu.
- Při anihilaci e^+ a e^- dochází k jejich vzájemnému zániku a tvorbě dvou γ fotonů a každý má energii 511 keV.
- Navíc směr pohybu je téměř přesně opačný (svírá úhel $\sim 180^\circ$).

PET

- V době anihilace e^+ a e^- v hustém látkovém prostředí mají oba velmi malou rychlost a jejich energie je blízká klidové, která je 511 keV.
- Proto i vzniklé fotony mají energii okolo 511 keV (plyne ze ZZE).
- Ze ZZH vyplývá, že směry fotonů musí být opačné nebo tomuto směru velmi podobné.

PET

- Všech těchto poznatků je využito při detekci PET.
- Scintilační detektory jsou rozmístěny v kruhu okolo pacienta.
- Protože 511 keV je poměrně vysoká energie musejí být scintilační krystaly ze speciálního materiálu.
- Průměr prstence s detektory bývá 60-80 cm.

PET

- Po β^+ rozpadu se pozitron pohybuje 1-3 mm dokud se nezpomalí natolik, aby mohl anihilovat.
- Touto základní mezí je určena rozlišovací schopnost PET.
- Pro často využívaný ^{18}F je tato mez 0,9 mm, což je ovšem méně než je rozlišovací schopnost většiny aparatur.

PET

- Po anihilaci vznikají 2 fotony, které jsou koincidenčně detekovány.
- Detekovány jsou jen ty fotony, které leží na koincidenční přímce (spojnice foton1-místo anihilace-foton2) a dopadnou současně na dva protější detektory (viz obrázek).

PET

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi$$

$$U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{B} = \mu_0 N I \sqrt{2}$$

$$2 \operatorname{tg} \varphi_B = \frac{w_2}{w_1} = w_{21}$$

$$Me = \sigma T^4$$

$$\phi_e = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L}{\frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$4\pi r^2$$

$$X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L = 2\pi f L$$

$$F_m = \vec{B} I l = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d} l$$

$$F_g = \frac{m_1 m_2}{h^2}$$

$$pV = nRT$$

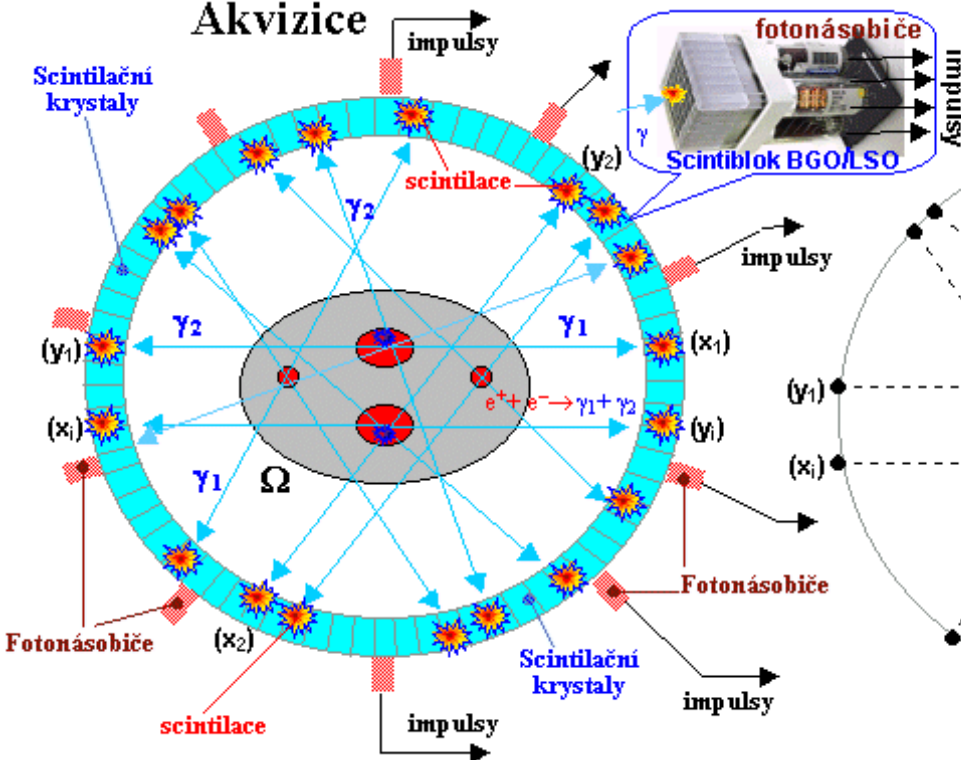
$$\Psi = \iint \vec{D} d\vec{S} = AD$$

$$H_\lambda = \frac{\Delta Me}{\Delta \lambda}$$

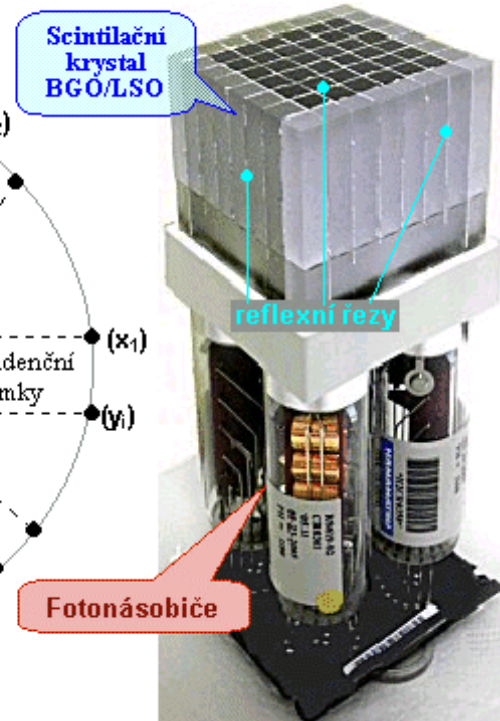
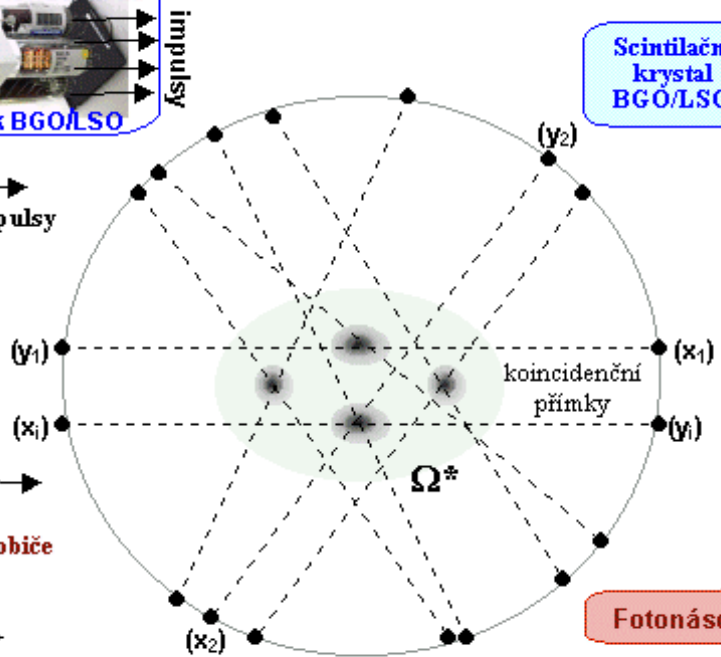
$$V = c/\lambda$$

$$\Phi = NBS$$

Akvizice



Rekonstrukce



$$\left(\frac{E_t}{E_0}\right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$E_y = E_0 \sin(k_x - \omega t)$$

$$S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$$

$$j_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{CL}}$$

$$S I_m^2 = U_m^2 \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2 \right]$$

$$\lambda^* T = b$$

$$\int \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

PET

- PET má oproti SPECT výhody:
 - Oproti rotační SPECT detektory nerotují (rychlejší měření a vyšší detekční účinnost).
 - Oproti stacionární SPECT se před detektory nenachází olověné kolimátory, které absorbují nežádoucí fotony.
 - Proto má PET vyšší detekční účinnost.

PET

• PET ovšem ovlivňují i nežádoucí jevy:

- Absorpce záření
- Comptonův rozptyl
- Dolet pozitronů
- Odchylka od 180
- Náhodné koincidence

PET

- Kolem 90 % PET vyšetření slouží v onkologii k lokalizaci, určení povahy nádorů a monitorování odezvy nádoru na terapii.
- V neurologie se využívá ke sledování aktivity v mozku.
- V kombinaci s CT (PET/CT) dodává funkční obraz.

Černobyl

Roku 1977 byl 18 kilometrů severně od města dobudován 1. reaktor Jaderné elektrárny Černobyl. V sobotu 26. dubna 1986 v 1 hodinu 23 minut došlo na jejím 4. reaktorovém bloku k dosud největší zaznamenané havárii jaderné elektrárny. Výbuch způsobil uvolnění velkého množství radioaktivních částic. Okolo 130 000 lidí z blízkého okolí bylo evakuováno. Evakuace však proběhla až několik desítek hodin po havárii. Obyvatelům také dlouho nebylo řečeno, co se vlastně děje, a tak většina z nich ani nevěděla, že jsou během evakuace velmi silně ozařováni. A to stejně tak jako armáda a všichni ostatní, kdo pomáhali odstraňovat, nebo aspoň zmírňovat, následky této havárie.

Ačkoliv je celá oblast stále radioaktivní a město oficiálně opuštěné, okolo pěti set zejména starých lidí se přes nebezpečí rozhodlo vrátit do svého města.

Dnes v Černobyli žije asi 3000 lidí, jde o úředníky, zaměstnance elektrárny a pracovníky starající se o „Zónu“. Strídají se tam po týdnů, který má čtyři pracovní dny.

Video

- Sestřih videa o Černobylu (vystřiženy nejzajímavější pasáže cca 20 min).
- Zde neposílám, protože video má 200MB (je to verze bez videa).
- Celé video na youtube.com
- https://www.youtube.com/watch?v=p_fsXlcDzc

Konec 6. cvičení

THE END



www.teleinterferencias.blogspot.com

$E_k = \frac{1}{2} m v^2$
 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi$
 $U_{ef} = U_m$
 $\vec{B} = \mu_0 \frac{NI \sqrt{2}}{2\pi r}$
 $k = \rho \frac{1}{2m} m_0 = \frac{M}{N}$
 $\lambda = \frac{h}{m v}$
 $\sqrt{2eU_m}$
 $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$
 $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} d\vec{S}$
 $C(s)$
 $v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kTN}{M_m}}$
 $\lambda = \frac{\ln 2}{T} F_h = \frac{S h \rho g}{2m}$
 $\left(\frac{E_t}{E_0}\right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$
 $E_y = E_0 \sin(k_x - \omega t)$
 $S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$

$2 \tan \vartheta_B = \frac{m_2}{m_1} = m_{21}$
 $\rho V = n R T$
 $\vec{\Psi} = \iint \vec{D} d\vec{S} = A D$
 $H_{\lambda} = \frac{\Delta M_e}{\Delta \lambda}$
 $\Phi = N B S$
 $\Delta x = x_2 - x_1$
 $V = C \lambda$
 $\mu \frac{I_1 I_2}{2\pi d}$
 $X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L = 2\pi f L$
 $F_n = m_1 m_2$
 $U = W_{AB}$
 $|E_{\text{eff}}| = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$
 $v = \frac{m h}{2\pi r}$
 $\frac{M}{N}$
 $\frac{M}{N}$
 $\frac{R}{L}$
 $\frac{c}{\sqrt{\epsilon + \mu}}$
 $-\mu_1$
 $\frac{Q}{r}$
 $E = \hbar k$
 $PC = \frac{1}{m_0} \frac{U}{c}$
 r
 S
 $R = \frac{U}{I}$
 $F_v = \int \frac{F_n}{R}$
 $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{CL}}$
 $\sigma = \frac{Q}{M} = \frac{F d \cos \alpha}{R}$
 $S I_m^2 = U_m^2 \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2 \right]$
 $\lambda^* T = b$
 $\int \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$
 $p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar f}{c} = \frac{\hbar}{\lambda}$
 $u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$
 $R = R_0 \sqrt[3]{A}$
 $\int \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$
 $\vec{E} = - \nabla \phi - \dot{\vec{A}}$
 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$
 $\vec{E} = - \nabla \phi - \dot{\vec{A}}$
 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Dodatky 1

1. Jak byste slovně popsali Heisenbergovy relace neurčitosti?
 - Možností je více, ale např.:
 - Relace neurčitosti dávají do vztahu dvě veličiny (tzv. konjugované veličiny). Pokud měříme obě veličiny (např. polohu a hybnost částice) tak se projeví jejich vzájemný vztah. Čím přesněji budeme chtít změřit jednu z veličin, tím nepřesněji změříme tu druhou. To se dostatečně projeví až na úrovni mikrosvěta.

Dodatky 1

1. Jak byste slovně popsali Heisenbergovy relace neurčitosti?

- Pokud ovšem u auta budeme chtít určit hybnost s přesností na 50 desetinných míst a zároveň polohu těžiště auta s přesností na fm, tak nám to relace neurčitosti nepovolí.

$$(\Delta p) = 10^{-50} \quad (\Delta x) = 10^{-15}$$

$$(\Delta p)(\Delta x) = 10^{-65} < \frac{\hbar}{2}$$

Dodatky 2

2. Jak tyto relace vypadají zapsány matematicky? Okomentuje je.

- Relace neurčitosti nám říkají, že součin směrodatných odchylek dvou konjugovaných veličin nesmí být menší než polovina redukované Planckovy konstanty.

$$(\Delta p)(\Delta x) \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Konjugovanými veličinami jsou poloha a hybnost, energie a čas, dvě na sebe kolmé (ortogonální) složky celkového momentu hybnosti...

Konec 2. dodatku

[zpět](#)

Dodatky 3

3. Mějme excitované technecium ${}_{43}\text{Tc}^*$.
Určete vlnovou délku emitovaného
světla při přechodu K_α a L_β .

a) K_α je přechod z 1. do 2. hladiny $n_1=1$
a $n_2=2$

$$E = 13,6(Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 17,992 \text{ keV}$$

b) L_β z 2. do 4. $n_1=2$ a $n_2=4$.

$$E = 13,6(Z - 1)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = 4,498 \text{ keV}$$

