Radiologická fyzika
a
radiobiologie

5. cvičení

Opakování

1. Jakou frekvenci bude mít foton při gama-rozpadu metastabilního neodymu ^{156m}Gd (156,059536) do základního stavu (155,922122)?

   Řešení

2. Máme 10^{43} jader. Konstanta rozpadu λ=1,446.10^{-5}. Jaký má daný izotop fyzikální poločas rozpadu?

   Řešení

Opakování

3. Po 15 dnech radioaktivní přeměny nám zůstalo $8,5.10^{8}$ jader. Konstanta rozpadu je $\lambda=1,292.10^{-5}$. Kolik jsme měli původně jader?

Řešení

4. Jakou hmotnost a vlnovou délku má elektron při rychlosti 0,84c a klidové hmotnosti $m_{0e}=9,1093.10^{-31}$kg?

Řešení

Opakování

5. Jakou energii bude mít alfa-částice (4,002603) při rozpadu francia 221 (221,014254) na astat 217 (217,0047188)? Uvažujme, že dceřiné jádro má nulou kinetickou energii.

Řešení

Schödinger a kočka

- Popis částic z pohledu kvantové fyziky není jednoduchý
- Pro popis stavu soustavy se používá vlnová funkce
- Jedná se obecně o komplexní veličinu a její druhá mocnina je úměrná pravděpodobnosti výskytu systému v určitém stavu

Schödinger a kočka

- Pokud neprovádíme měření, tak nevíme v jakém stavu se systém nachází (viz Stern-Gerlachovi experimenty)
- Jsme schopni pouze určit pravděpodobnost s jakou se v daný okamžik systém nachází, ale dokud neprovedeme měření (přístroj nebude interagovat se systémem) nevíme o stavu systému nic

Schödinger a kočka

- Při dvoj štěrbinovém experimentu s jedním elektronem nevíme, kterou štěrbinou elektron prošel
- Proto se nachází současně ve dvou stavech, kdy prošel buď štěrbinou A nebo štěrbinou B
- Je ve stavu superpozice obou stavů

Schödinger a kočka

- Dokud nebudeme chtít určit, kterou štěrbinou skutečně elektron prošel, budeme na stínítku vidět interferenční obrazec
- Jakmile jakýmkoliv způsobem určíme, kudy elektron prošel, narušíme superpozici obou stavů (dojde k tzv. kolapsu vlnové funkce) a vlnové funkce elektronu bude určena jedním stavem

Schödinger a kočka

- Tak to platí pro částice mikrosvěta
- Jak to je pro makrosvět a kde končí mikrosvět a začíná makrosvět?
- Tuto otázku si položil i Erwin Schrödinger (1935) a formuloval myšlenkový experiment (nikdy jej skutečně neuskutečnil)

Schödinger a kočka

- Mějme v neprůhledné a neprodyšné krabici libovolnou kočku
- Spolu s ní také jeden radioaktivní atom a detektor, schopný 100% detekovat rozpad jediného jádra
- Jakmile detektor zaznamená rozpad atomu, rozbije se ampulka s kyanovodíkem a usmrtí kočku

Schödinger a kočka

- V čem je u Schrödingerovy kočky zakopaný pes?
- Můžeme přesně určit, kdy dojde k rozpadu jádra a tím kočka zemře?
- Známe poločas rozpadu daného jádra, ale poločas rozpadu je matematicky střední doba života statisticky určena z většího množství jader

Schödinger a kočka

- Jediné co můžeme přesně říci, že při uplynutí doby rovné poločasu rozpadu máme pravděpodobnost 50 %, že se atom rozpadl
- Tudíž se jádro nachází v superpozici stavů rozpadlé-nerozpadlé jádro, kdy se oba tyto stavy na výsledné vlnové funkci podílejí stejným dílem

Schödinger a kočka

- Protože je detektor schopen vždy detekovat rozpad jádra, tak je i pravděpodobnost rozbití ampule s jedem 50 % (stejná jako rozpad jádra)
- A tudíž i samotná kočka je v superpozici stavů živá-mrtvá a my nejsme schopni říci, který stav nastal, protože oba se podílejí na výsledné vlnové funkci rovným dílem

Schödinger a kočka

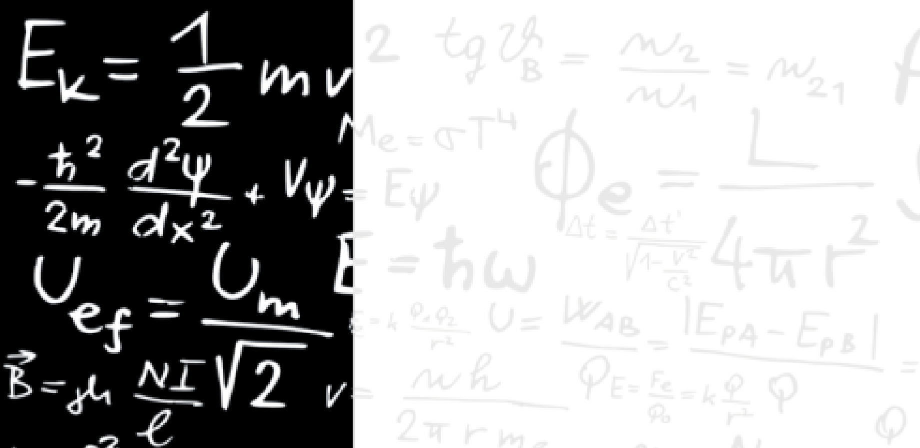
- Pokud v tomto okamžiku otevřeme krabici, co uvidíme?
- Kočku v superpozici obou stavů?
- Kočka může být pouze živá nebo mrtvá nic mezi tím
- Otevřením krabice dojde ke kolapsu vlnové funkce celého systému na stav popsán pouze jednou vlnovou funkcí

Schödinger a kočka

- Pokud je člověk pesimista může celý problém vidět tak, že je kočka z 50 % mrtvá, kdežto optimista tvrdí, že je kočka z 50 % živá
- Nad tímto čistě myšlenkovým experimentem se dá přemýšlet velmi dlouho, ale bez zdárného konce (nejeden vědec se o to pokusil)

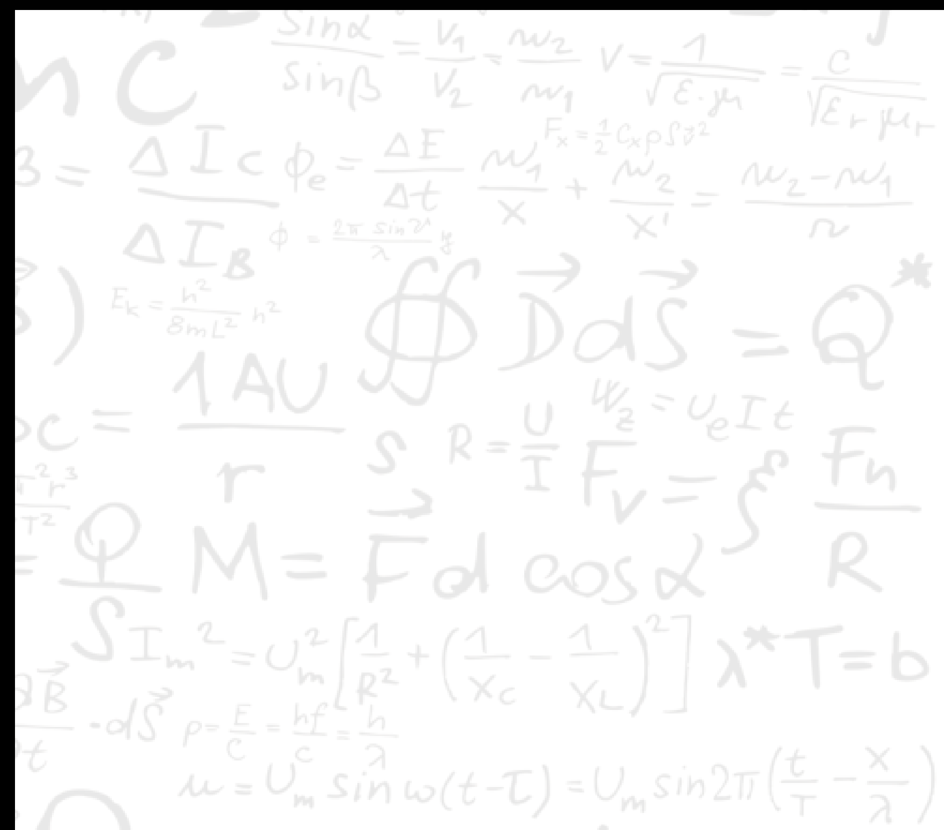
Schödinger a kočka

- Schrödinger se tímto pokusem snažil ukázat, že kvantová mechanika není kompletní
- Neznáme zákon, který by popisoval kdy a do jakého stavu bude vlnová funkce kolabovat ať už se díváme na stav kočky nebo samotného jádra




SCHRÖDINGER'S CAT IS


WANTED
DEAD & ALIVE
SCHRÖDINGER'S CAT



Pauza

Werner Heisenberg

- Teoretický fyzik, který byl jedním z prvních průkopníků kvantové fyziky za což dostal Nobelovu cenu (1932)
- V roce 1927 formuloval princip (relace) neurčitosti, jejichž jednodušší verzi si odvodíme a vysvětlíme

Werner Heisenberg

- Relace neurčitosti pojednávají o nejpřesnějším měření konjugovaných veličin (z pohledu kvantové fyziky se jedná o veličiny, které společně nekomutují)
- Mezi takové veličiny patří například:
  - Poloha a hybnost
  - Energie a čas
  - Moment hybnosti a úhel

Werner Heisenberg

- Při určování polohy částice si na ni musíme „posvítit"
- Fotony o vlnové délce λ nejsme schopni detekovat částice menší než $\frac{\lambda}{2}$
- Částice menší než $\frac{\lambda}{2}$ se fotonům „vyhnou" a ten se od nich neodrazí a nedopadá zpět na detektor
- Pro chybu měření polohy platí vztah

$$\Delta x \geq \frac{\lambda}{2}$$

Werner Heisenberg

- Při odrazu fotonů od částice dojde k předání hybnosti
- Za zákona zachování hybnosti se fotony odrazí zpět a částice (před interakcí v klidu) se začne pohybovat v původním směru fotonů (např. v ose x)
- Minimální změna hybnosti je při odrazu jednoho fotonu tudíž

$$\Delta p_x \geq \frac{h}{\lambda}$$

Werner Heisenberg

- Při souběžném měření polohy a hybnosti se chyby měření násobí a platí:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\lambda}{2}\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2}$$

- Pokud budeme tento vztah odvozovat exaktně dle zákonů kvantové fyziky dojdeme k výsledku

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

Werner Heisenberg

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

- Heisenbergovy relace neurčitosti nám říkají, že nelze stanovit polohu a hybnost s libovolnou přesností
- Čím přesněji stanovíme polohu (odchylka Δx bude minimální), tím větší musí být odchylka v hybnosti a naopak

Werner Heisenberg

- Heisenbergovy relace neurčitosti platí pro více veličin například pro energii a čas

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

Výpočet

5. V urychlovači částic LHC (Large Hadron Collider) v CERNu (Ženeva) se při velkých rychlostech srážejí hadrony. Jaká je celková energie při srážce dvou protonů, přičemž první je urychlen na 0,999998c a druhý na 0,99997c?

$m_{0p}=1{,}672621.10^{-27}$ kg

Řešení

Výpočet

6. Urychlovač částic LHC v CERNu má maximální energii na jeden svazek 3,5 TeV. Jakou rychlostí letí takto urychlený pion? $m_{0\pi} = 134{,}976\,\frac{MeV}{c^2}$

Řešení

Konec 5. cvičení

Dodatky 1

1. Jakou frekvenci bude mít foton při gama-rozpadu metastabilního neodymu ^{156m}Gd (156,059536) do základního stavu (155,922122)?

$$\Delta M = 0{,}137414$$

$$\Delta E = 0{,}137414uc^2 = hf$$

$$\frac{0{,}137414uc^2}{h} = f$$

$$3{,}0993.10^{22}Hz = f$$

Konec 1. dodatku

zpět

Dodatky 2

2. Máme 10^{43} jader. Konstanta rozpadu $\lambda=1{,}446.10^{-5}$. Jaký má daný izotop fyzikální poločas rozpadu?

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -\lambda t_{1/2}$$

$$\ln 2 = \lambda t_{1/2}$$

$$\frac{\ln 2}{\lambda} = t_{1/2}$$

$$47935{,}48\ s = t_{1/2}$$

Konec 2. dodatku

zpět

Dodatky 3

3. Po 15 dnech radioaktivní přeměny nám zůstalo $8{,}5.10^{8}$ jader. Konstanta rozpadu je $\lambda=1{,}292.10^{-5}$. Kolik jsme měli původně jader?

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$N e^{\lambda t} = N_0$$

$$8{,}5.10^{8} e^{1{,}292.10^{-5} t} = N_0$$

$$1{,}5899.10^{16} = N_0$$

Konec 3. dodatku

zpět

Dodatky 4

4. Jakou hmotnost a vlnovou délku má elektron při rychlosti 0,84c a klidové hmotnosti m_{0e}=9,1093.10^{-31}kg?

[redacted]

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m = 9{,}1093.10^{-31}.1{,}84302$$

$$m = 1{,}67886.10^{-30}kg$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \lambda = \frac{h}{m_0\gamma v} \quad \lambda = \frac{6{,}626.10^{-34}}{1{,}27755.10^{-30}0{,}7c}$$

Konec 4. dodatku

$$\lambda = 1{,}5661.10^{-12}m$$

zpět

Dodatky 5

5. Jakou energii bude mít alfa-částice (4,002603) při rozpadu francia 221 (221,014254) na astat 217 (217,0047188)? Uvažujme, že dceřiné jádro má nulou kinetickou energii.

$$\Delta M = 0{,}0069322u$$

$$\Delta E = 0{,}0069322uc^2 = E_k$$

$$E_k = 1{,}036.10^{-12}J$$

zpět

Dodatky 6

6. Celková E srážky p a p_2 v_p=0,999998c v_{p2}=0,99997c m_0=1,672621.10^{-27} kg.

Platí zákon zachování energie. Tudíž celková E je rovna součtu jednotlivých energií $E = E_p + E_{p2}$

$$E_p^2 = m_0^2 c^4 + p_p^2 c^2$$

$$E_{p2}^2 = m_0^2 c^4 + p_{p2}^2 c^2$$

zpět

Dodatky 6

6. Celková E srážky p a p_2 v_p=0,999998c v_{p2}=0,99997c m_0=1,672621.10^{-27} kg

$$E_p^2 = m_0^2 c^4 + (m_p v_p)^2 c^2$$

$$E_p^2 = m_0^2 c^4 + (m_{0p} \gamma v_p)^2 c^2$$

$$E_p^2 = m_0^2 c^4 + \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_p^2}{c^2}}} v_p \right)^2 c^2$$

zpět

Dodatky 6

6. Celková E srážky p a p_2 v_p=0,999998c v_{p2}=0,99997c m_0=1,672621.10^{-27} kg

$$E_p^2 = m_0^2c^4 + \frac{m_0^2}{1-\frac{v_p^2}{c^2}}v_p^2c^2 = m_0^2c^4 + \frac{m_0^2v_p^2c^4}{c^2-v_p^2}$$

$$= m_0^2c^4\left(1+\frac{v_p^2}{c^2-v_p^2}\right) = m_0^2c^4\left(1+\frac{0{,}999998^2}{1-0{,}999998^2}\right)$$

$$E_p^2 = 5{,}6652635.10^{-15}\,J$$

$$E_p = 7{,}526794.10^{-8}\,J$$

zpět

Dodatky 6

6. Celková E srážky p a p_2 v_p=0,999998c v_{p2}=0,99997c m_0=1,672621.10^{-27} kg

$$E_n^2 = m_0^2 c^4 \left(1 + \frac{0{,}99997^2}{1 - 0{,}99997^2}\right)$$

$$E_n^2 = 3{,}7852756.10^{-16}\,J$$

$$E_n = 1{,}942899.10^{-8}\,J$$

zpět

Dodatky 6

6. Celková E srážky p a p_2 v_p=0,999998c v_{p2}=0,99997c m_0=1,672621.10^{-27} kg

$$E_{p2} = 1{,}942899.10^{-8}\,J \quad E_p = 7{,}526794.10^{-8}\,J$$

$$E = E_p + E_{p2} = 9{,}469693.10^{-8} J$$

$$E = 5{,}910519.10^{11} eV = 591{,}0519\ GeV$$

Konec 5. dodatku

zpět

Dodatky 7

7. Maximální energie na jeden svazek 3,5 TeV. Jakou rychlostí letí takto urychlený pion? $m_{0\pi} = 134{,}976 \frac{MeV}{c^2}$

$$E_\pi^2 = m_{0\pi}^2 c^4 + p_\pi^2 c^2 = m_{0\pi}^2 c^4 + (m_{0\pi} \gamma v_\pi)^2 c^2$$

$$= m_{0\pi}^2 c^4 + \frac{m_{0\pi}^2 v_\pi^2}{1 - \frac{v_\pi^2}{c^2}} c^2 = m_{0\pi}^2 c^4 + \frac{m_{0\pi}^2 v_\pi^2 c^4}{c^2 - v_\pi^2}$$

$$E_\pi^2 - m_{0\pi}^2 c^4 = \frac{m_{0\pi}^2 v_\pi^2 c^4}{c^2 - v_\pi^2}$$

zpět

Dodatky 7

7. Maximální energie na jeden svazek 3,5 TeV. Jakou rychlostí letí takto urychlený pion? $m_{0\pi} = 134{,}976\,\frac{MeV}{c^2}$

$$E_\pi^2 - m_{0\pi}^2 c^4 = \frac{m_{0\pi}^2 v_\pi^2 c^4}{c^2 - v_\pi^2}$$

$$(E_\pi^2 - m_{0\pi}^2 c^4)(c^2 - v_\pi^2) = m_{0\pi}^2 v_\pi^2 c^4$$

$$E_\pi^2 c^2 - m_{0\pi}^2 c^6 = m_{0\pi}^2 v_\pi^2 c^4 + E_\pi^2 v_\pi^2 - m_{0\pi}^2 v_\pi^2 c^4$$

$$\frac{(E_\pi^2 - m_{0\pi}^2 c^4)c^2}{E_\pi^2} = v_\pi^2$$

zpět

Dodatky 7

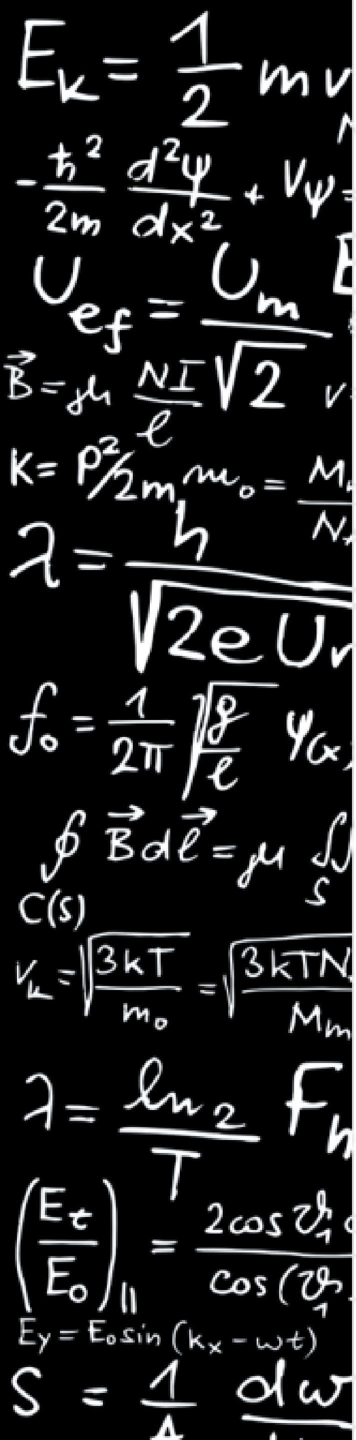
7. Maximální energie na jeden svazek 3,5 TeV. Jakou rychlostí letí takto urychlený pion? $m_{0\pi} = 134{,}976\,\frac{MeV}{c^2}$

$$\frac{(E_\pi^2 - m_{0\pi}^2 c^4)c^2}{E_\pi^2} = v_\pi^2 = c^2\left(1 - \frac{m_{0\pi}^2 c^4}{E_\pi^2}\right)$$

$$m_{0\pi} = 134{,}976\,\frac{MeV}{c^2} = 1{,}34976.10^8 \mathrm{eV/c^2}$$

$$v_\pi^2 = c^2\left(1 - \frac{\frac{1{,}821852.10^{16}}{c^4}c^4}{12{,}25.10^{24}}\right)$$

zpět



Dodatky 7

7. Maximální energie na jeden svazek 3,5 TeV. Jakou rychlostí letí takto urychlený pion? $m_{0\pi} = 134{,}976\,\frac{MeV}{c^2}$

$$v_\pi^2 = c^2\left(1 - \frac{\frac{1{,}821852.10^{16}}{c^4}c^4}{12{,}25.10^{24}}\right)$$

$$= c^2(1 - 1{,}48722.10^{-9}) = 0{,}99999998512c^2$$

$$v_\pi = 0{,}9999999999256389c^2$$

Konec 6. dodatku

zpět

Prezentace vznikla v rámci fondu rozvoje MU 1515/2014