Radiologická fyzika a radiobiologie

9. cvičení

Postupná vlna

- Okamžitá příčná výchylka libovolné částice závisí nejen na čase *t*, ale také na vzdálenosti *x* částice od zdroje vlnění.
- Rovnice postupné vlny:

$$y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t)$$

$k = 2\pi/\lambda$ … úhlový vlnočet (vlnové číslo)

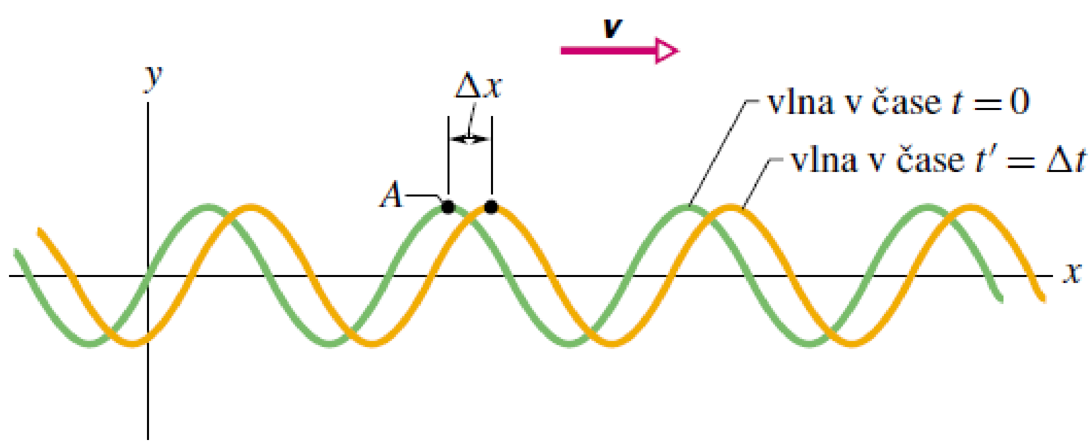
$(kx \pm \omega t)$ … fáze

Postupná vlna

- Je-li kmitání zdroje $y = y_m \sin(\omega t)$, potom kmitání dorazí do sledovaného bodu se zpožděním:

$$y = y_m \sin(\omega t - \Delta t)$$

- Velikost zpoždění závisí na vzdálenosti x bodu od zdroje a na rychlosti šíření kmitů prostředím c: $\Delta t = x/c$



Postupná vlna

- Po úpravách $\omega = 2\pi/T$ a $\lambda = cT$ dostáváme rovnici postupné vlny:

$$y(x,t) = y_m \sin[\omega(t - x/c)] = y_m \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t)$$

- Znaménko (–) platí pro pohyb vlny v kladném směru osy *x*, znaménko (+) pro pohyb vlny v záporném směru osy *x*.

Postupná vlna

- **Příklad 1**
- Máme rovnici postupné vlny:

$$y = 0{,}00327\sin(72{,}1x - 2{,}72t)$$

a) Jaká je amplituda vlny?

b) Jaká je vlnová délka, perioda a frekvence vlny?

c) Jaká je rychlost šíření vlny?

d) Jaká je příčná výchylka *y* vlny v místě $x = 22{,}5\ cm$ a v čase $t = 18{,}9\ s$?

Postupná vlna

- **Příklad 1**

$$y = y_m \sin(kx - \omega t)$$

a) Jaká je amplituda vlny?

$$y_m = 0{,}00327 \text{ m}$$

b) Jaká je vlnová délka, perioda a frekvence vlny?

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 8{,}71 \text{ cm}, T = \frac{2\pi}{\omega} = 2{,}31 \text{ s}, f = \frac{1}{T} = 0{,}433 \text{ Hz}$$

c) Jaká je rychlost šíření vlny?

$$v = \frac{\omega}{k} = 3{,}77 \text{ cm/s}$$

d) Jaká je příčná výchylka *y* vlny v místě *x=22,5 cm* a v čase *t=18,9 s*?

Po dosazení za *k*. *x*. *ω* a *t* vvide *v=1.92 mm*

Postupná vlna

- **Příklad 2**
- Máme rovnici postupné vlny:

$$y = 0{,}00327\sin(72{,}1x - 2{,}72t)$$

a) Jaká je rychlost příčné výchylky částice prostředí při šíření této vlny?

b) Jaké je zrychlení příčné výchylky částice prostředí při šíření této vlny?

Postupná vlna

- **Příklad 2**

$$y = y_m \sin(kx - \omega t)$$

a) Jaká je rychlost příčné výchylky částice prostředí při šíření této vlny?

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t) = 7{,}2\ \mathrm{mm/s}$$

b) Jaké je zrychlení příčné výchylky částice prostředí při šíření této vlny?

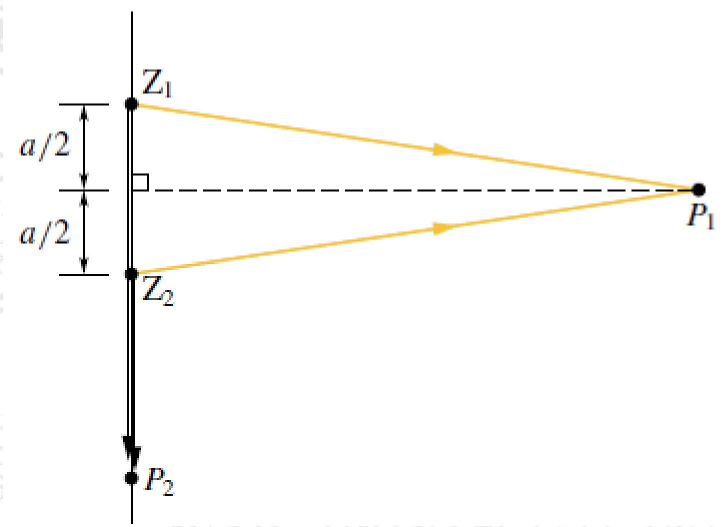
$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t} = -\omega^2 y_m \sin(kx - \omega t) = -14{,}2\ \mathrm{mm/s^2}$$

Interference

- **Příklad 3**
- Dva bodové zdroje Z1 a Z2 vysílají zvuk o vlnové délce λ. Vzájemná vzdálenost zdrojů je $a=1,5\lambda$. Vlny spolu navzájem interferují.

a) Jaká je fáze a typ interference v bodě P1?

b) Jaké je fáze a typ interference v bodě P2?



Interference

- **Příklad 3**

a) Vzdálenost obou zdrojů od bodu P1 je stejná. Dráhový rozdíl mezi oběma vlnami je $\Delta L = 0$.

$$\varphi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi = 0 \;\rightarrow\; n = 0$$

To odpovídá konstruktivní interferenci.

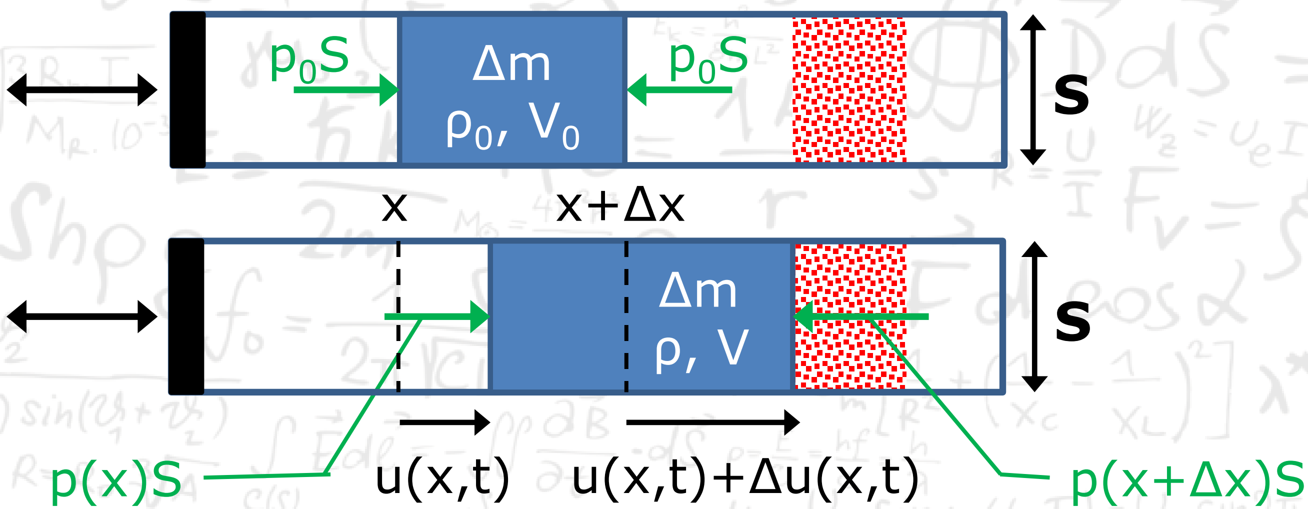
b) Dráhový rozdíl mezi oběma vlnami je $\Delta L = a = 1{,}5\lambda$.

$$\varphi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi = 3\pi\, rad \;\rightarrow\; n = 1$$

To odpovídá destruktivní interferenci.

Vlnová rovnice

- Uvažujme sloupec vzduchu v trubici o průřezu *S*.
- Vyberme element vzduchu Δx, který v čase mění svou polohu, rychlost, objem i hustotu. Posunutí elementu označíme jako $u(x,t)$.



Vlnová rovnice

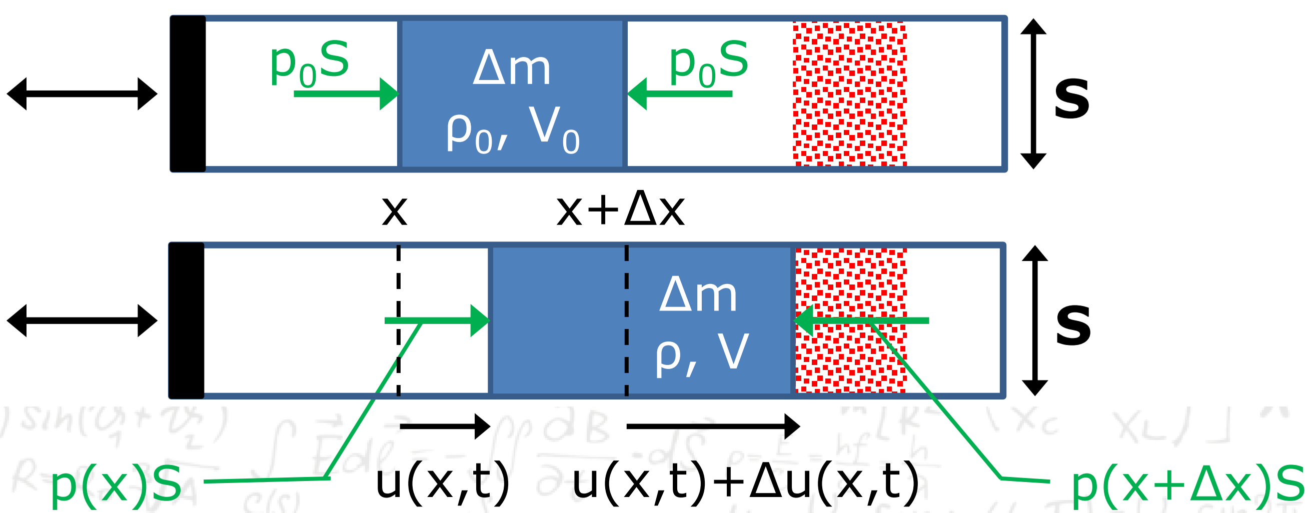
- Na základě 2. NZ. sestavíme pohybovou rovnici:

$$\boxed{\Delta F} = \boxed{\Delta m}\ \boxed{a}$$

$$\boxed{a = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta F &= p(x)S - p(x+\Delta x)S = \\ &= -\Delta p(x)S \approx -\frac{\partial p(x)}{\partial x} S\Delta x\end{aligned}}$$

$$\boxed{\Delta m = \rho_0 V_0 = \rho_0 S \Delta x}$$

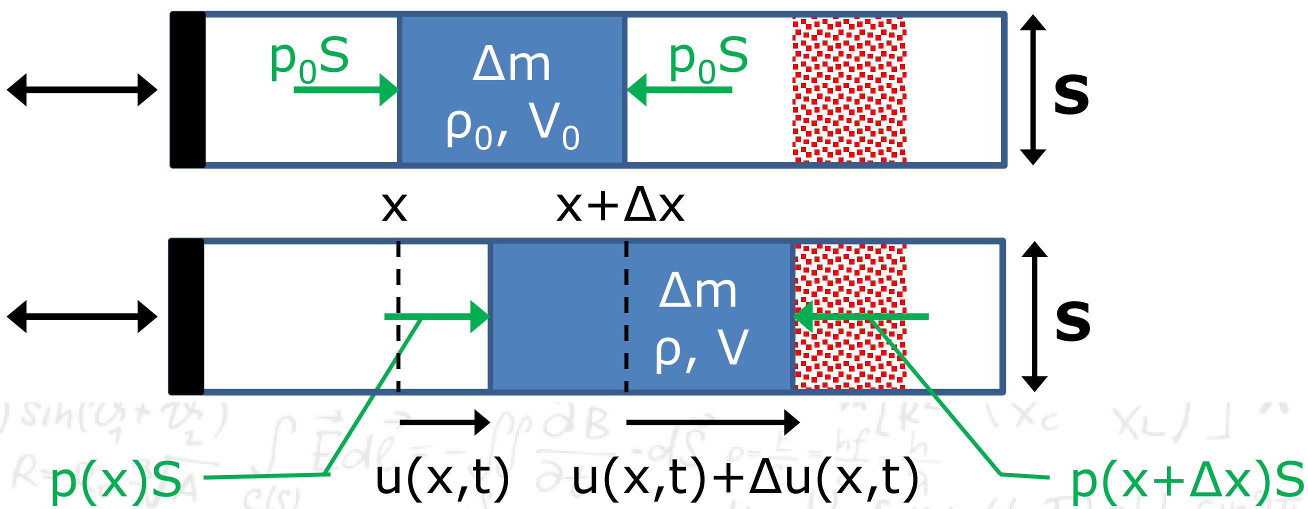


Vlnová rovnice

- Na základě 2. NZ. sestavíme pohybovou rovnici:

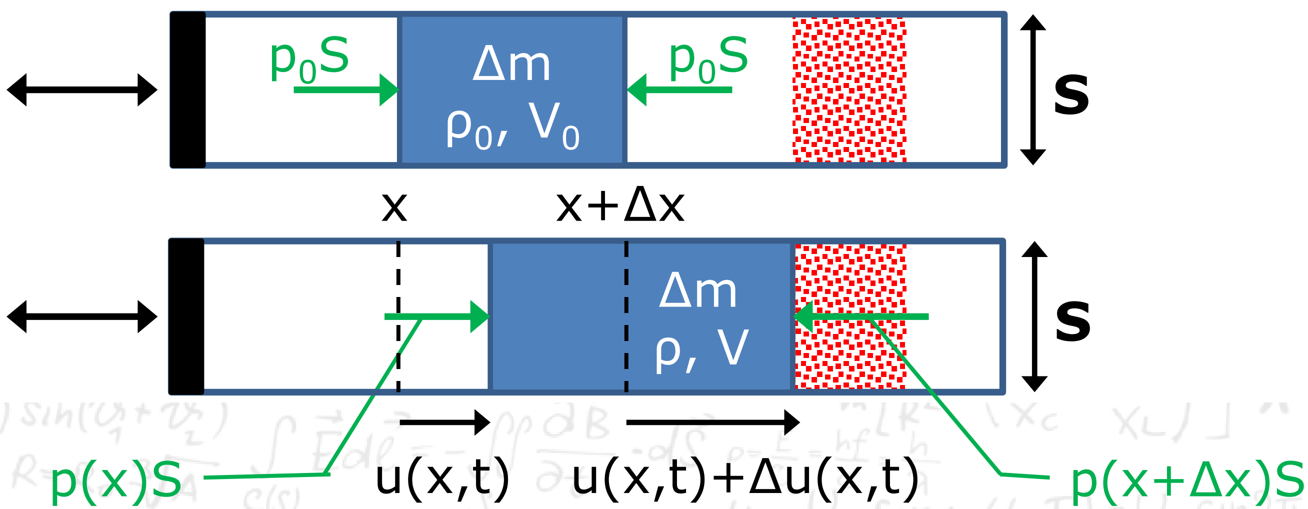
$$\boxed{\Delta F} = \boxed{\Delta m}\,\boxed{a}$$

$$\boxed{-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} S\Delta x} = \boxed{\rho_0 S\Delta x}\,\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}} \rightarrow \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p(x)}{\partial x}$$



Vlnová rovnice

- Se změnou tlaku je spojena změna rozměrů objemu elementu plynu, protože pružné látky jsou stlačitelné.
- Chování látky pod tlakem popisuje např. stavová rovnice závislosti hustoty na tlaku: $\rho = f(p)$



Vlnová rovnice

- Za předpokladu malých změn tlaku a hustoty kolem rovnovážné hodnoty ($p = p_0 + p_a$ a $\rho = \rho_0 + \rho_a$) bude platit linearizovaná stavová rovnice:

$$p_a \approx \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \rho_a$$

- $(dp/d\rho)_0$ značí derivaci tlaku podle hustoty za klidového atmosférického tlaku p_0.

Vlnová rovnice

- Se změnou tlaku je spojena změna objemu a hustoty elementu. Hmotnost zůstává vzhledem k platnosti zákona zachování hmoty konstantní ($m_0=m$).

$$V_0 = S\Delta x \quad \rightarrow \quad V = S(\Delta x + \Delta u)$$

$$\underbrace{\boxed{\rho_0 S\Delta x}}_{m_0} = \underbrace{\boxed{\rho S\left(\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right)}}_{m} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{\rho_0}{1+\underbrace{\boxed{(\partial u/\partial x)}}_{\varepsilon}}$$

ε představuje lokální deformaci elementu vzduchu. Pro akustické vlny platí $\varepsilon \ll 1$.

Vlnová rovnice

- Protože $\rho = \rho_0 + \rho_a$, platí:

$$\rho_a \approx -\rho_0 \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}} \quad \varepsilon$$

- Jelikož je relativní změna hustoty plynu až na znaménko stejná jako relativní změna objemu, platí:

$$p_a = -\rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

Vlnová rovnice

- Dosazením do pohybové rovnice dostáváme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

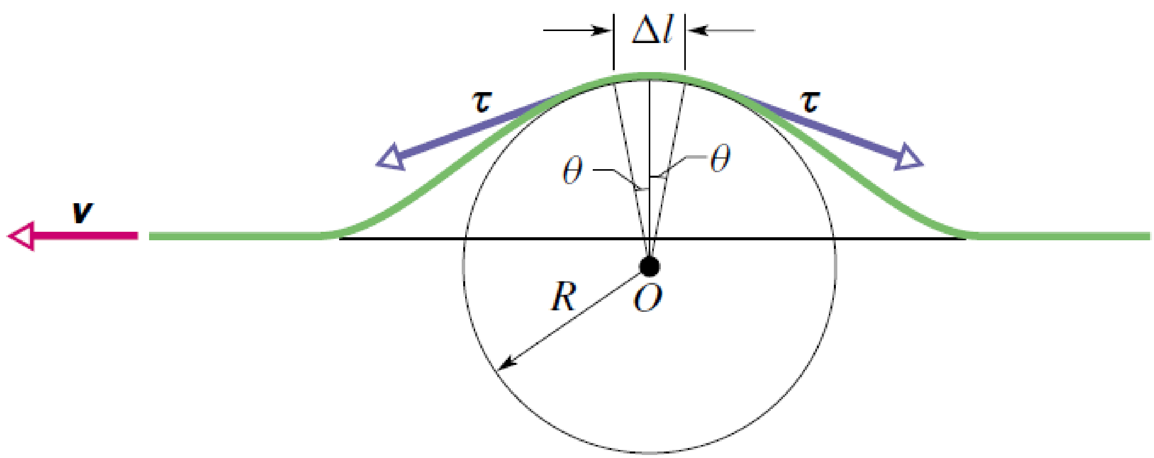
- Je zřejmé, že rychlost šíření akustických vln bude:

$$c^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0$$

Vlnová rovnice

- Napnutá struna
- Na úsek Δl struny působí tečné síly τ v obou směrech. Jejich vodorovné složky se vyruší, ale svislé složky se sčítají. Celková síla působící na element struny je:

$$F = 2\tau \sin\theta = \tau(2\theta) = \tau \frac{\Delta l}{R}$$



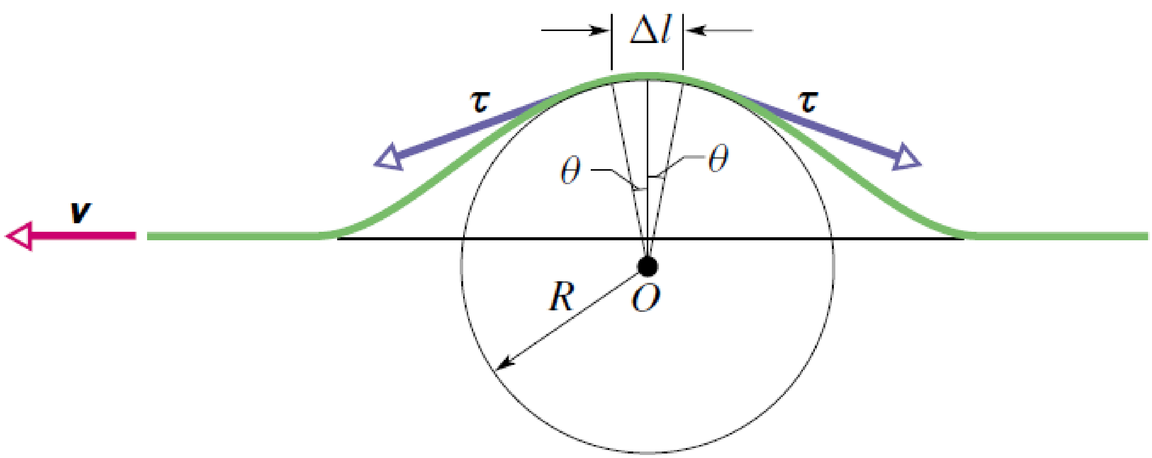
Vlnová rovnice

- Hmotnost elementu struny je:

$$\Delta m = \mu \Delta l$$

- Zrychlení elementu struny je dáno dostředivým zrychlením:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

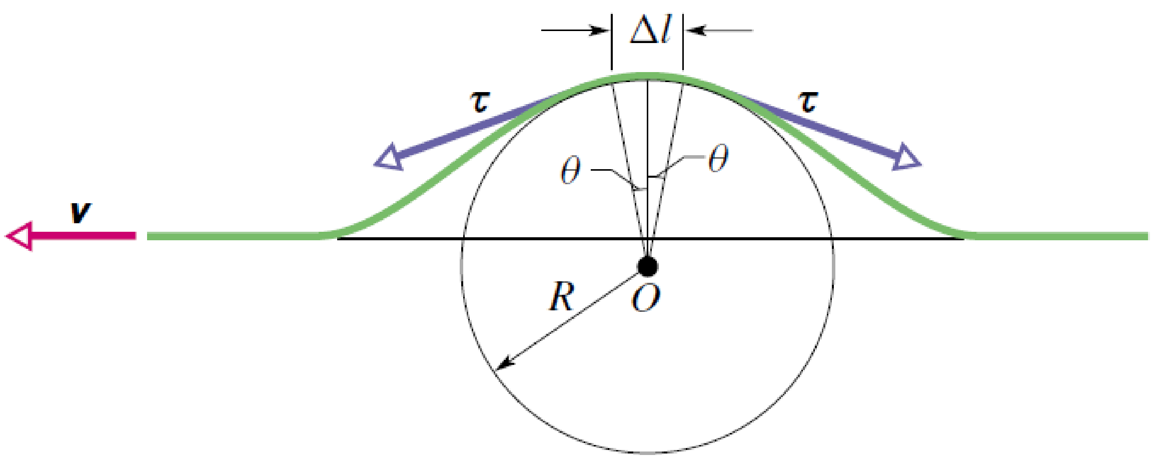


Vlnová rovnice

- Dosazením do 2. NZ dostáváme:

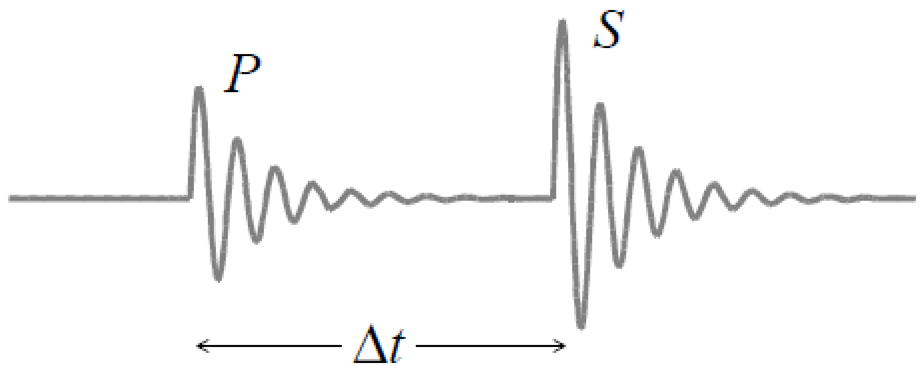
$$\tau \frac{\Delta l}{R} = \mu \Delta l \frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$



Rychlost šíření vlny

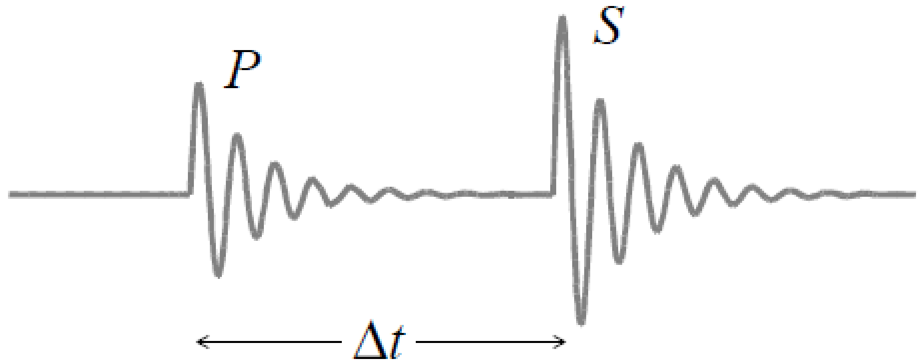
- **Příklad 4**
- Jak vzdálené je epicentrum zemětřesení od seismografické stanice, pokud byla naměřena časová prodleva mezi primární a sekundární vlnou Δt=20 s? Co potřebujete znát pro výpočet?



Rychlost šíření vlny

- **Příklad 4**
- Rychlost podélných vln v zemském plášti je asi 6,0 km/s, rychlost příčných vln asi 3,4 km/s.

$$\Delta t = \frac{s}{c_P} - \frac{s}{c_S} \;\rightarrow\; s = \frac{c_S c_P}{c_P - c_S}\Delta t \;\rightarrow\; s = 157\ km$$



Rychlost šíření vlny

- **Příklad 5**
- V jakém rozsahu vzdálenosti bude fungovat lodní sonar, který vysílá akustický signál o délce $\Delta t = 1$ ms s periodou $T = 2$ s?

Rychlost šíření vlny

- **Příklad 5**
- Odražený signál se vrátí za dobu $t = 2s/c$ (tam i zpět). Tato doba musí být delší než doba trvání signálu, jinak by se odražený signál ztratil ve vyslaném signálu, a musí být kratší než opakovací perioda T, jinak se nový signál vyšle dříve, než se odražený signál vrátí zpět.

$$\frac{c\Delta t}{2} < s < \frac{cT}{2}$$

- Pro c=1500 m/s ve vodě vychází 0,75 m<s<1500 m.

Prezentace vznikla v rámci fondu rozvoje MU 1515/2014