

Radiologická fyzika a radiobiologie



10. cvičení



Výkon vlnění

- **Příklad 1**

- Struna má délkovou hustotu $\mu = 525 \text{ g/m}$ a je v ní vyvoláno napětí $\tau = 45 \text{ N}$. Na struně postupuje vlna s frekvencí 120 Hz a amplitudou výchylky $8,5 \text{ mm}$. Jaký je výkon přenášený vlnou?

Výkon vlnění

- **Příklad 1**

$$\omega = 2\pi f = 754 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$c = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = 9,26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\bar{P} = \frac{\Delta E_k}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{mv_a^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\mu \Delta x v_a^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} \mu c \omega^2 u_m^2 = 100 \text{ W}$$

Akustická impedance

- Příklad 2
- Vypočítej chybějící hodnoty

prostředí	$10^3 \rho$ [kg m ⁻³]	c [m s ⁻¹]	10^6 [Rayl]
vzduch	0,0012	330	
voda	1	1430	
měkká tkáň		1540	1,69
játra	1,05		1,65
tuk		1450	1,38
kost	1,91		7,8

Akustická impedance

- **Příklad 2**

$$Z = \rho c \quad [1 \text{ Rayl} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}]$$

10^6

Intenzita vlnění

- **Příklad 3**

- Určete amplitudu výchylky kmitů vzduchu:

- a) Při nejtišším zvuku, který ještě vnímá lidské ucho ($I = 10^{-12} \text{ W/m}^2$)
- b) Při nejhlasitějším zvuku, které lidské ucho již vnímá jako bolest ($I = 10^2 \text{ W/m}^2$).

Intenzita vlnění

- **Příklad 3**

- Hustota vzduchu: $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Rychlost šíření zvuku vzduchem: $c = 330 \text{ ms}^{-1}$
- Akustická impedance vzduchu: $Z = 0,0004 \cdot 10^6 \text{ Rayl}$

$$I = \frac{1}{2} \rho c v_a^2 = \frac{1}{2} Z (\omega u_m)^2$$

$$u_m = \sqrt{\frac{2I}{\rho c \omega^2}} = \sqrt{\frac{2I}{Z (2\pi f)^2}}$$

- Pro $f=1 \text{ kHz}$:

a) $u_m = 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

b) $u_m = 0,11 \text{ mm}$

Pro $f=20 \text{ Hz}$:

$u_m = 5,7 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

$u_m = 5,7 \text{ mm}$

Intenzita vlnění

• Příklad 4

- Reprodaktor na koncertu rockové skupiny má akustický výkon 15 W. Jakou hladinu akustické intenzity vnímá fanoušek, který stojí 3 m od reproduktoru, pokud se zvuk šíří rovnoměrně do celého prostoru?

Intenzita vlnění

- **Příklad 4**

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} = 0,13 \text{ Wm}^{-2}$$

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{0,13}{10^{-12}} = 111 \text{ dB}$$

Intenzita vlnění

• Příklad 5

- Na koncertě metalové skupiny hraje 10 reproduktorů, každý o výkonu 10^{-3} W/m^2 . Dohromady vytvářejí zvuk o hladině akustické intenzity 100 dB.

- a) Jakou hladinu akustické intenzity zvuku vytváří jeden reproduktor?
- b) O kolik poklesne hladina akustické intenzity zvuku, pokud přestanou fungovat 2 reproduktory?
- c) O kolik se zvýší hladina akustické intenzity zvuku, pokud technik připojí 2 reproduktory navíc?

Intenzita vlnění

• Příklad 5

- a) Jakou hladinu akustické intenzity zvuku vytváří jeden reproduktor?

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 90 \text{ dB}$$

- a) O kolik poklesne hladina akustické intenzity zvuku, pokud přestanou fungovat 2 reproduktory?

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{8 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3}} = -0,97 \text{ dB}$$

- a) O kolik se zvýší hladina akustické intenzity zvuku, pokud technik připojí 2 reproduktory navíc?

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{12 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3}} = 0,79 \text{ dB}$$

Hladina akustické intenzity

- Při současném působení zvuků je výsledná intenzita dána součtem intenzit $I = I_1 + I_2$, ale ne součtem hladin intenzit $L \neq L_1 + L_2$. Jestliže jeden reproduktor dává hladinu intenzity 100 dB a druhý rovněž 100 dB, výsledná hladina bude 103 dB a ne 200 dB.

$$I_1 = I_2 = 10^{-2} \frac{W}{m^2}$$

$$I = I_1 + I_2 = 2 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2$$

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{2I_1}{I_0} = L_1 + 10 \log 2 \approx 103 \text{ dB}$$

Dopplerův jev

- Do detektoru přicházejí vlny v časech

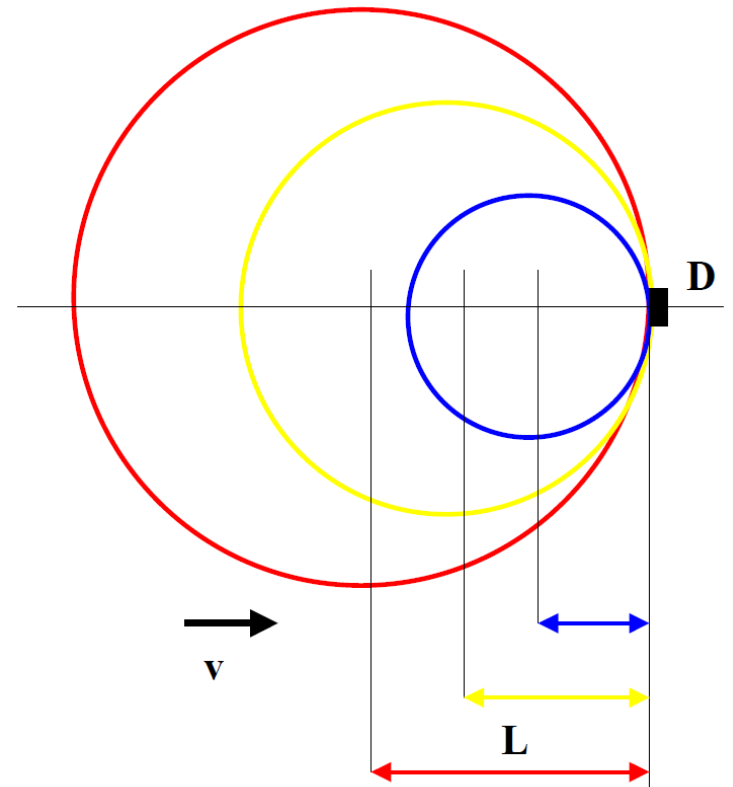
$$t_1 = \frac{L}{c}, \quad t_2 = \frac{1}{f} + \frac{L-v}{c}$$

$$t_3 = \frac{2}{f} + \frac{L-v}{c}, \quad \dots$$

- Frekvence je tedy

$$\frac{1}{f'} = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = \frac{1}{f} - \frac{v}{fc}$$

$$f' = f \frac{c}{c-v} > f$$



Dopplerův jev

- Do detektoru přicházejí vlny v časech

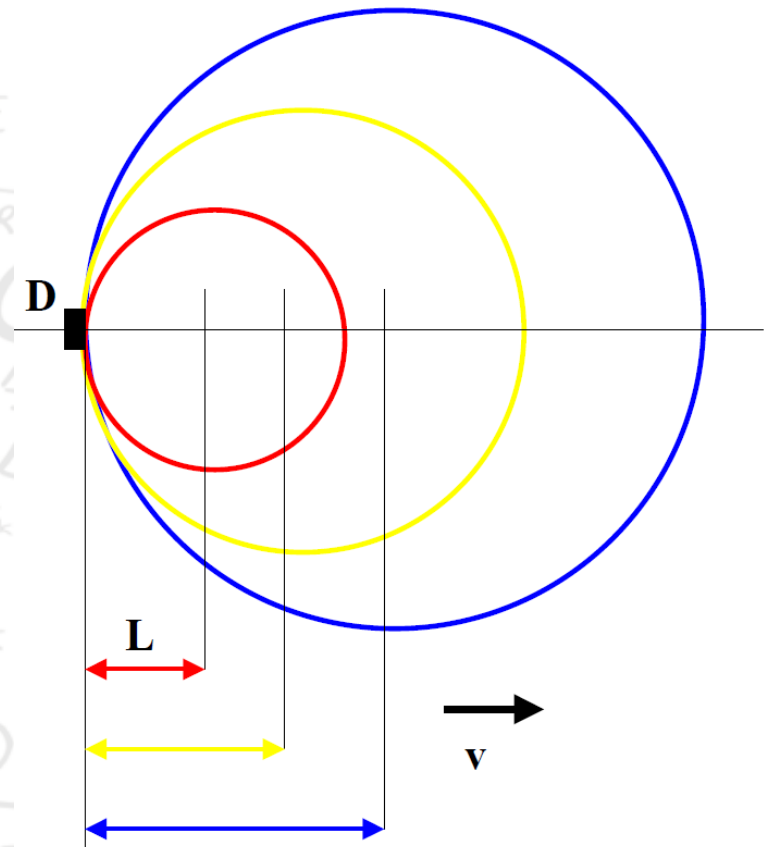
$$t_1 = \frac{L}{c}, \quad t_2 = \frac{1}{f} + \frac{L+v}{c}$$

$$t_3 = \frac{2}{f} + \frac{L+v}{c}, \quad \dots$$

- Frekvence je tedy

$$\frac{1}{f'} = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots \quad \frac{1}{f} \frac{v}{c}$$

$$f' = f \frac{c}{c+v} < f$$



Dopplerův jev

- Za jednu periodu T urazí vlna vzdálenost vlnové délky λ . Mezitím se zdroj pohybující se rychlostí v_Z posune o vzdálenost $v_Z T$.
- Následující vlna vznikne již ve vzdálenosti $\lambda' = \lambda - v_Z T$ od vlny předchozí. Toto bude vzdálenost hřebenů vln a zároveň vlnová délka pro pozorovatele.
- Protože se rychlost postupu vln prostředím nemění ($c=c'$), bude platit:

$$f' = \frac{c'}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - v_Z T} = f \frac{c}{c - v_Z}$$

$$c = \lambda f = \frac{\lambda}{T}$$

Dopplerův jev

- Podobně pro pohyb pozorovatele (detektoru). Rychlost relativního pohybu vln vzhledem k pozorovateli, který se pohybuje rychlostí v_p , se změní na $c' = c - v_p$. Vlnová délka vlny se však nemění ($\lambda = \lambda'$).

$$f' = \frac{c'}{\lambda'} = \frac{c - v_p}{\lambda} = f \frac{c - v_p}{c}$$

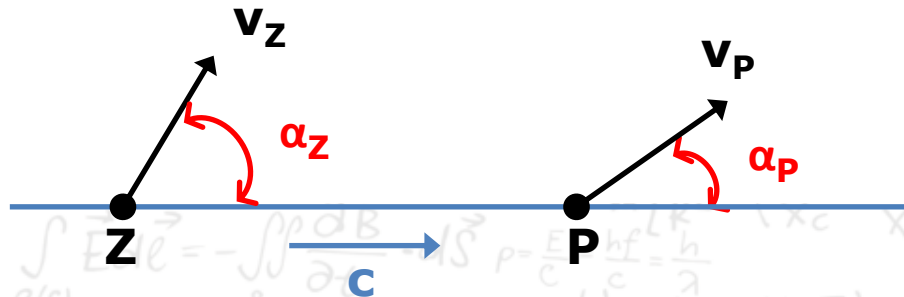
Dopplerův jev

- Při pohybu zdroje i pozorovatele platí současně $\lambda' = \lambda - v_z T$ a $c' = c - v_p$:

$$f' = \frac{c'}{\lambda'} = f \frac{c - v_p}{c - v_z}$$

- Při šikmém pohybu se započítává pouze složka rychlosti do směru šíření vlny:

$$\frac{f_p}{f_z} = \frac{c - v_p \cos \alpha_p}{c - v_z \cos \alpha_z}$$



Dopplerův jev

• Příklad 6

- Jaký vliv má na pozorovanou frekvenci při pohybu zdroje/pozorovatele pohyb prostředí, kterým se vlnění šíří? (např. vítr, který fouká určitou rychlostí v prostoru mezi zdrojem a pozorovatelem).

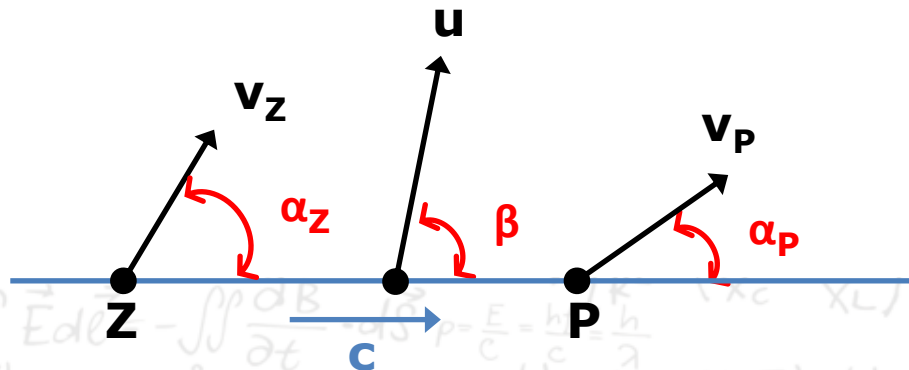
Dopplerův jev

- **Příklad 6**

- Vliv větru, který se šíří ustálenou rychlostí u .
Vzhledem k větrem unášenému vzduchu se vlna šíří rychlostí c , ale vzhledem k zemi již rychlostí $c+u$:

$$\frac{f_P}{f_Z} = \frac{c + u \cos \beta - v_P \cos \alpha_P}{c + u \cos \beta - v_Z \cos \alpha_Z}$$

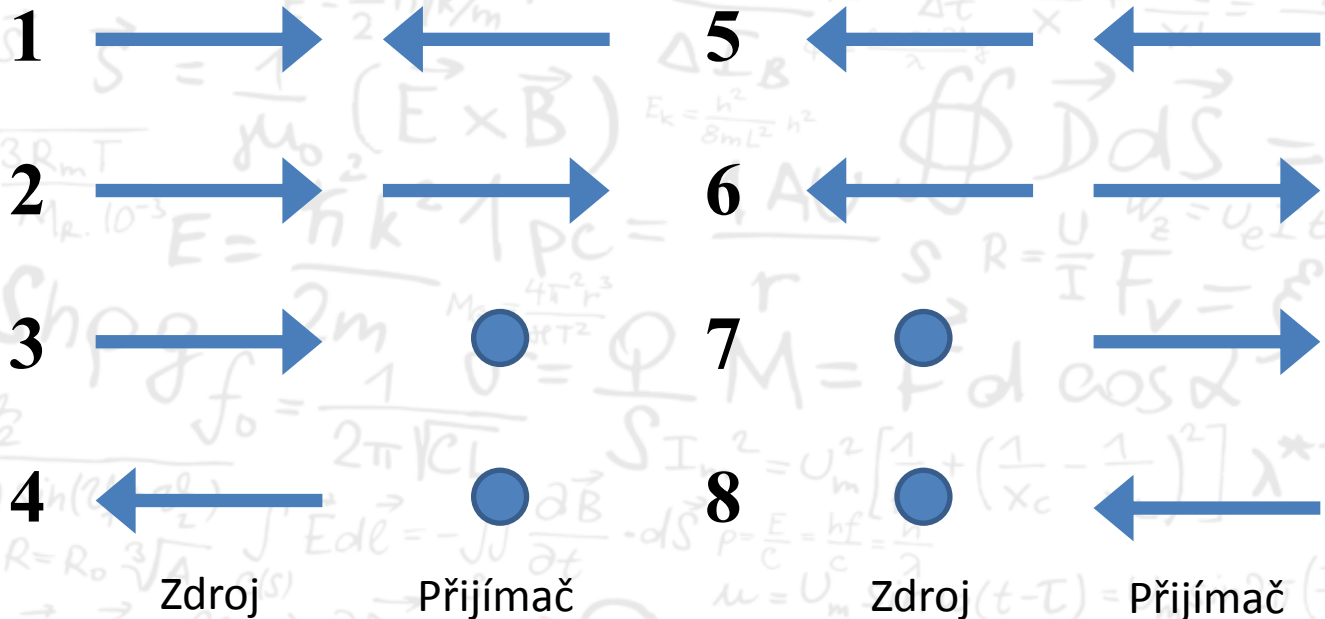
- Pokud budou zdroj i pozorovatel v relativním klidu ($v_Z=v_P$), platí $f_P=f_Z$ a žádný Dopplerův jev nevzniká. Samotný pohyb prostředí Dopplerův jev nevytváří.



Dopplerův jev

• Příklad 7

- Na obrázcích 1 až 8 jsou různé stavy pohybu zdroje a přijímače vlnění. Jak se v jednotlivých situacích změní frekvence vlnění v důsledku Dopplerova jevu?



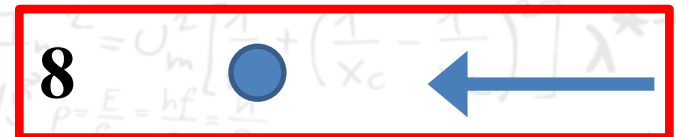
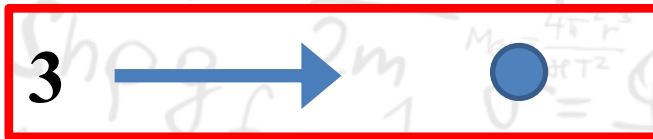
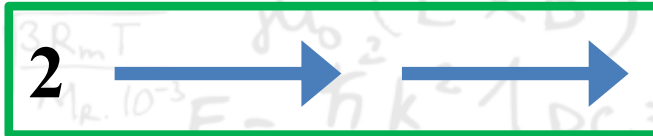
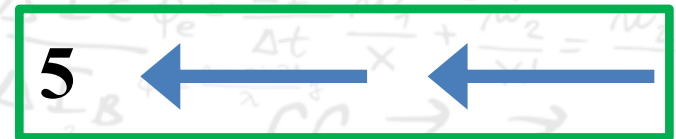
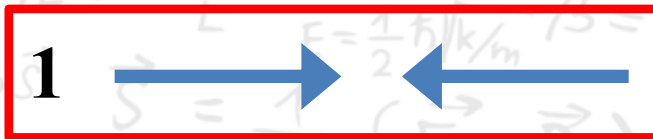
Dopplerův jev

• Příklad 7

Frekvence se zvyšuje

Frekvence se snižuje

Nelze rozhodnout



Zdroj

Přijímač

Zdroj

Přijímač

Dopplerův jev

• Příklad 8

- Policejní Pasat jede po silnici rychlostí 80 km/h a radarem zachytí rychle jedoucí automobil v protisměru. Radar vysílá impulzy na frekvenci 50 kHz. Signál odražený od protijedoucího automobilu má po návratu do radaru frekvenci 80 kHz. Jak rychle jede protijedoucí automobil?

Dopplerův jev

- **Příklad 8**

- Rychlost šíření zvuku ve vzduchu je 333 m/s.

$$f' = f \frac{c + v_D}{c - v_Z} \rightarrow v_Z = c - \frac{f}{f'} (c + v_D)$$

$$v_Z = 333 \text{ ms}^{-1} - \frac{50 \text{ kHz}}{80 \text{ kHz}} (333 \text{ ms}^{-1} + 80 \text{ kmh}^{-1})$$

$$v_Z = 111 \text{ kmh}^{-1}$$

Dopplerův jev

- Je-li rychlost zdroje větší než rychlost šíření vlny prostředím ($v_Z > c$) zjistíme, že v takové situaci nemá rovnice Dopplerova jevu řešení ($c - v_Z < 0$).
- Zvukové vlnoplochy vytvářené zdrojem se v takovém případě za zdrojem zpožďují a vytvářejí obálku tvaru „V“ – tzv. **Machův kužel**.
- Na povrchu kužele dochází k nahromadění (zhuštění) vlnoploch, které způsobuje výrazný nárůst a pokles tlaku. Zvukové vlnoplochy přicházejí k pozorovateli současně a ten je vnímá jako **rázovou vlnu a akustický třesk**.

Dopplerův jev

- Rázová vlna vzniká jen u zdrojů pohybujících se rychleji než zvuk $v_z > c$. Poměr v_z/c se označuje jako **Machovo číslo** a popisuje, kolikrát je rychlost pohybu zdroje vyšší než rychlost šíření vlny prostředím (nejčastěji vzduchem). Machovo č. větší než 1 značí nadzvukovou rychlost.
- Let nadzvukového letadla neslyšíme, dokud k nám nedorazí rázová vlna, která se šíří rychlostí zvuku. Neslyšíme ani střelu z pušky, dokud nás nemine nebo nezasáhne.
- Rázová vlna má podobné fyzikální vlastnosti jako rázová vlna vznikající při explozi výbušniny.

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi$$
$$U_{ef} = U_m$$
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{NI \sqrt{2}}{2r}$$
$$k = \frac{p^2}{2m} m_0 = \frac{M_p}{N_A}$$
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm}}$$
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} d\vec{S}$$
$$C(s)$$
$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kTN_A}{M_m}}$$
$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} F_h = \frac{Shp}{g}$$
$$\left(\frac{E_t}{E_0} \right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$
$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$S = \frac{1}{A} \frac{d\omega}{dt}$$

**Prezentace vznikla v
rámci fondu rozvoje
MU
1515/2014**

$$2 \operatorname{tg} \vartheta_B = \frac{m_2}{m_1} = m_{21}$$
$$\rho V = nRT \quad \vec{\Psi} = \iint \vec{D} d\vec{S} = AD$$
$$H_\lambda = \frac{\Delta Me}{\Delta \lambda}$$
$$\frac{\Delta \varphi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} S_2$$
$$V = c/\lambda \quad \Phi = NBS$$
$$\phi_e = \frac{L}{4\pi r^2}$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L = 2\pi f L$$
$$F_m = \vec{B} I l = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d} l$$
$$U = W_{AB} = |E_{PA} - E_{PB}|$$
$$I_m = \frac{F_q}{L}$$
$$F_q = \frac{m_1 m_2}{2\pi d}$$
$$E = \frac{Ec}{\lambda} \int \sin(\omega t + \phi) dy$$
$$E = \frac{1}{2} \hbar k^2 / m$$
$$\beta = \frac{v}{c}$$
$$\phi_e = \frac{\Delta E}{\Delta t} \frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{x'} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{v}$$
$$\vec{D} d\vec{S} = Q^*$$
$$S I_m^2 = U_m^2 \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2 \right]$$
$$\lambda^* T = b$$
$$p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar f}{c} = \frac{\hbar}{\lambda}$$
$$u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$