

Radiologická fyzika a radiobiologie

7. přednáška



Základní principy MRI



$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi$$
$$U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{NI \sqrt{2}}{2\pi r}$$
$$k = \frac{p^2}{2m} = \frac{m_0 v^2}{2m}$$
$$\lambda = \frac{h}{p}$$
$$v = \sqrt{2eUm_e}$$
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} d\vec{S}$$
$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kTN_A}{M_m}}$$
$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} F_h = S h$$
$$\left(\frac{E_t}{E_0}\right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$
$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$$

$$2 \operatorname{tg} \vartheta_B = \frac{m_2}{m_1}$$
$$Me = \sigma T^4$$
$$\phi_e = -\frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$4\pi r^2$$
$$X_L = \frac{U_m}{\omega} = \omega L = 2\pi f L$$
$$4\pi \epsilon_0 \epsilon_r$$
$$v = \frac{c}{\lambda}$$
$$\Phi = NBS$$
$$F_m = \vec{B} I l = \frac{\mu I_1 I_2 l}{2\pi d}$$
$$1 \mu_0$$
$$R = \frac{\rho l}{A}$$
$$T = b$$
$$-\frac{x}{\lambda}$$

Historie MRI

- 1921 – objev elektronového spinu (A. Compton).
- 1924 – objev jaderného spinu (W. Pauli).
- 1938 – potvrzení magnetického kvantového jevu (nukleární magnetická rezonance NMR) (I.I. Rabi).
- 1945 – vylepšení Rabiho přístroje (zrod NMR spektroskopie) (F. Bloch a E. Purcell).

Historie MRI

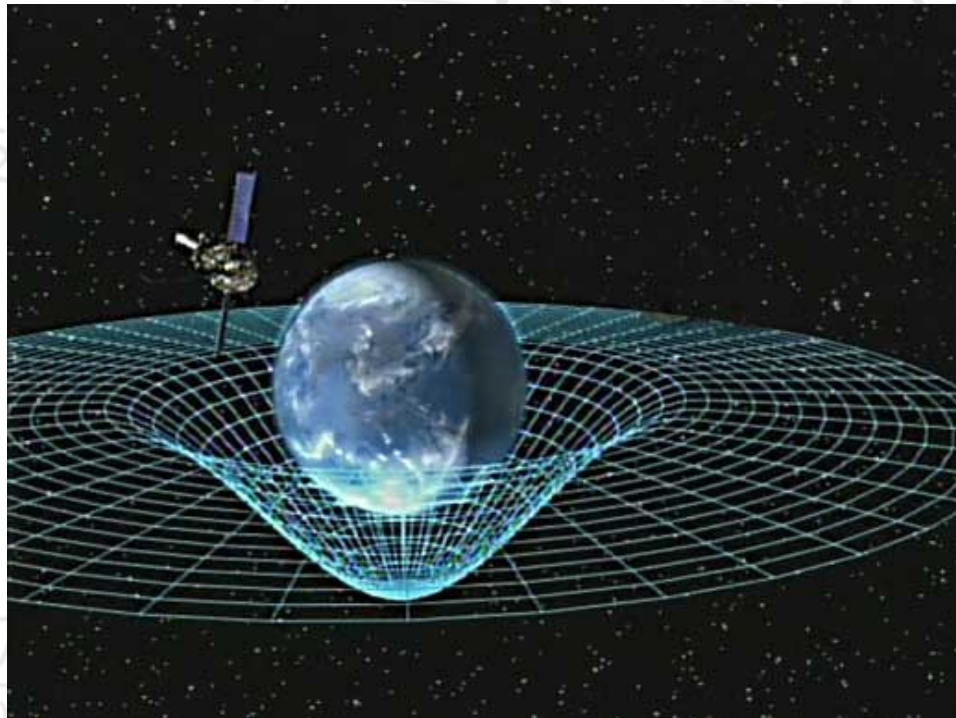
- 1949 – objev chemického posunu.
- Do 70. let – využití jen pro ch. a fy analýzu.
- Od 70. let – první využití v medicíně.
- 1971 – různé tkáně mají různé relaxační doby (R. Damadian).
- 1973 – počátky tomografického MRI (P. Lauterbur).

Historie MRI

- 1975 – matematické zpracování signálu (R. Ernst).
- 1977 – zavedení gradientních polí pro vylepšení analýzy (P. Mansfield).
- 1977 – první celotělové MRI (R. Damadian).
- 1987 – zrod MR angiografie (zobrazení toku krve).
- 1992 – zrod funkční MRI (fMRI).

Magnetický moment

- Zdroje silového pole:
 - Gravitační (hmota)



Magnetický moment

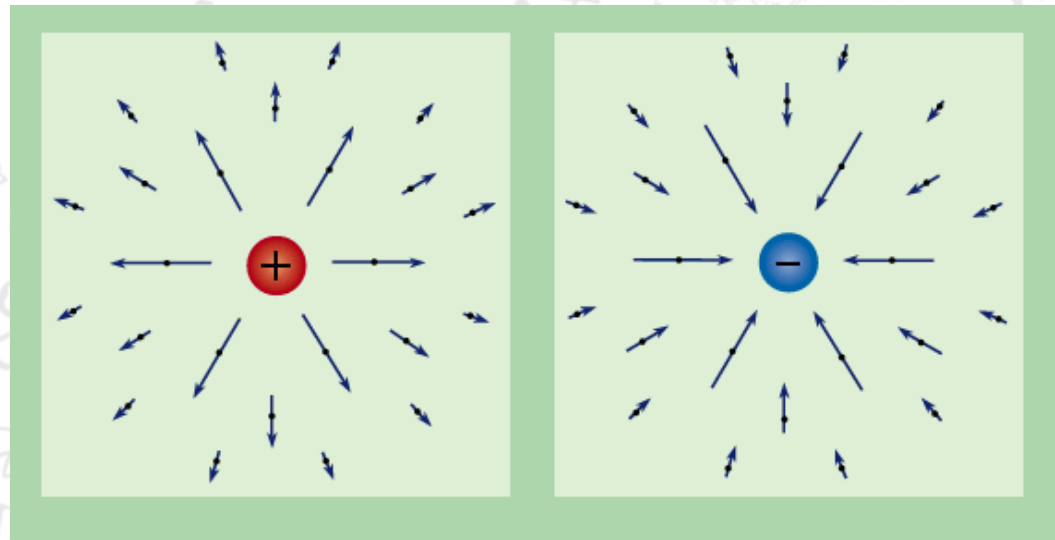
- Zdroje silového pole:

- Gravitační (hmota)

- Elektrické (náboj)

- Kladný

- Záporný

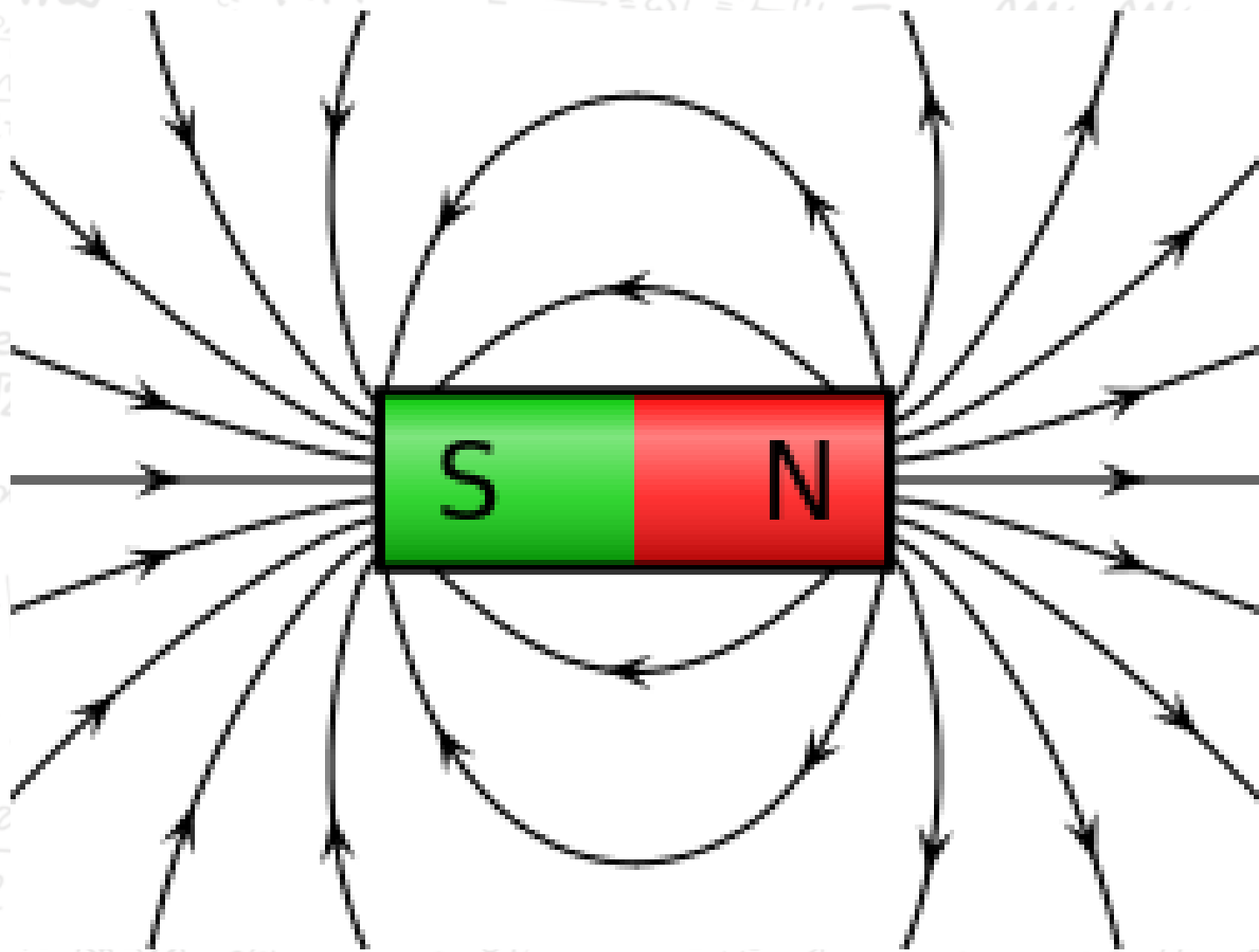


Magnetický moment

- Zdroje silového pole:

- Gravitační (hmota)
- Elektrické (náboj)
 - Kladný
 - Záporný
- Magnetické ((mono)póly)
 - Severní a jižní
 - Neexistují samostatně

Magnetický moment



$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$
$$U_{ef} = U_m$$
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{NI\sqrt{2}}{2r}$$
$$k = \frac{p^2}{2m} = \frac{m_0 v^2}{2m}$$
$$\lambda = \frac{h}{p}$$
$$\sqrt{2eUm}$$
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{e}} \psi(\alpha) = \frac{1}{2\pi}$$
$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} dS$$
$$C(s)$$
$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kTN}{M_m}}$$
$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} F_h =$$
$$\left(\frac{E_t}{E_0}\right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$$
$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$$

$$u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Magnetický moment

- Jak vypadání siločáry reálně?

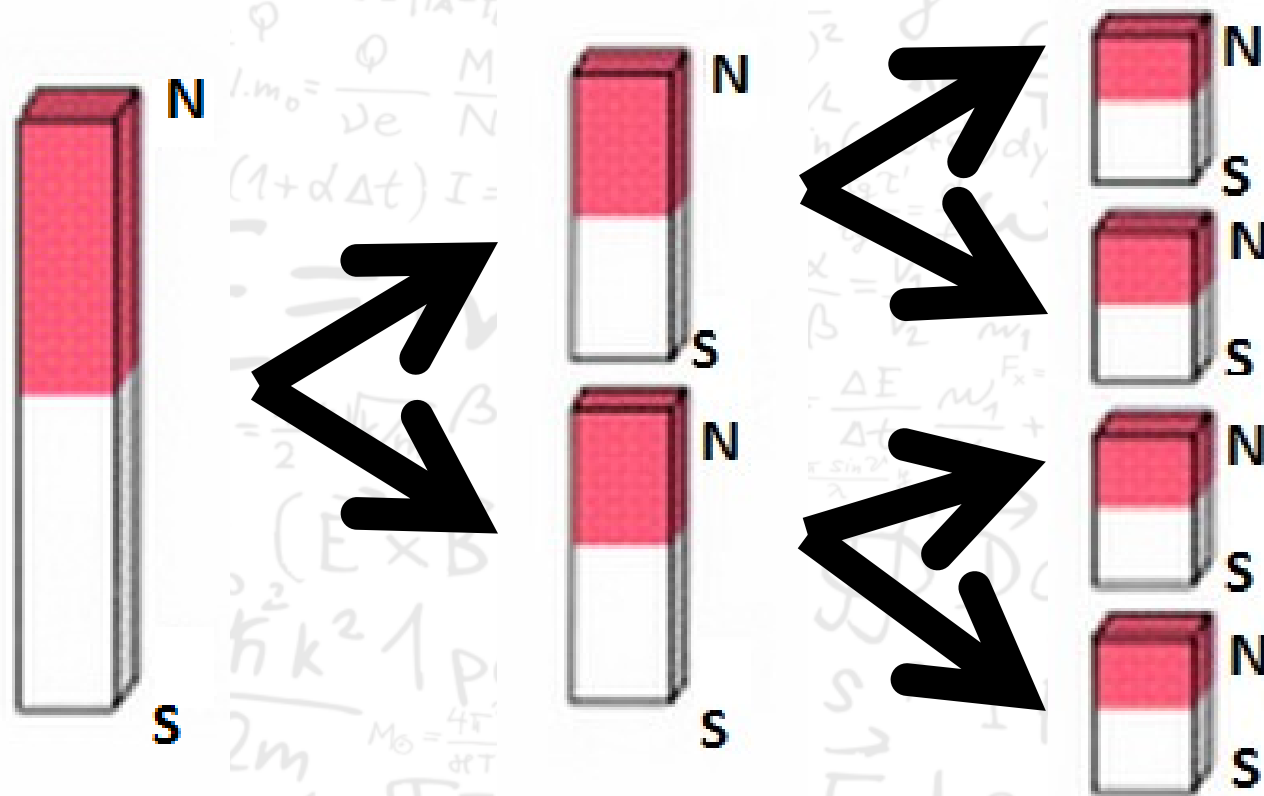
- Video7_1

<https://www.youtube.com/watch?v=8llkHQtaOlg>

- Video7_2

<https://www.youtube.com/watch?v=kdomJQvxpZE>

Magnetický moment



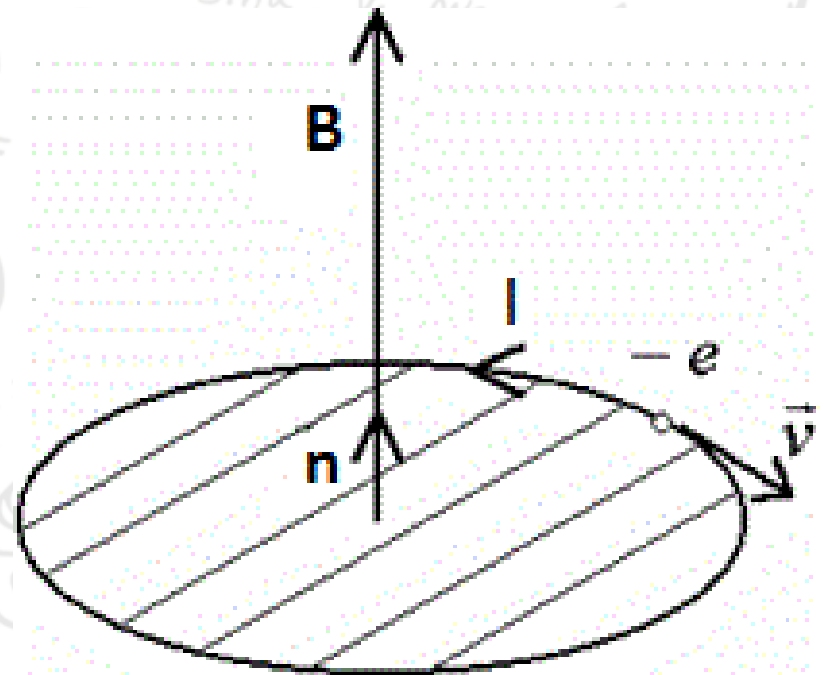
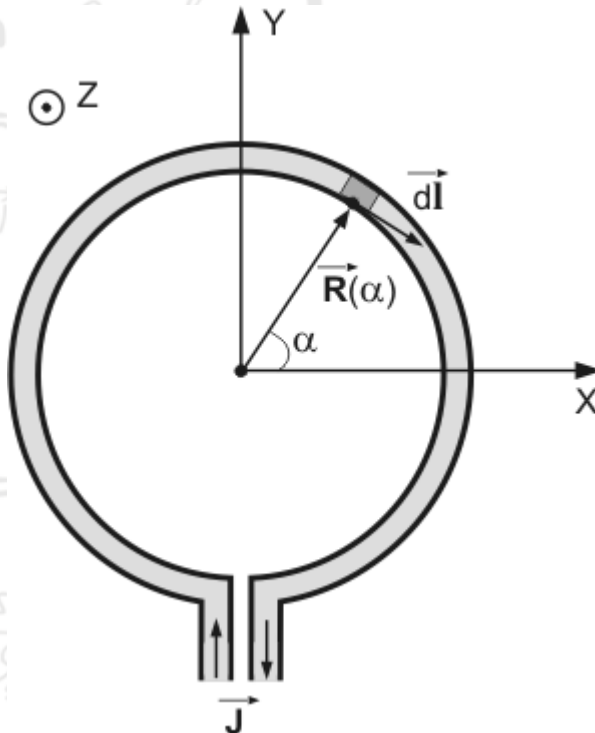
$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi$$
$$U_{ef} = U_m$$
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{NI \sqrt{2}}{2\pi r}$$
$$k = \frac{p^2}{2m} m_0 = \frac{M_0}{N_A}$$
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm_e}}$$
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{e}} \psi(\alpha) = \sqrt{2/\lambda}$$
$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} d\vec{S}$$
$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kTN_A}{M_m}}$$
$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} F_h = S$$
$$\left(\frac{E_t}{E_0}\right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$
$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$$

$$2 \operatorname{tg} \vartheta_B = \frac{m_2}{m_1} = m_{21}$$
$$pV = nRT \quad \Psi = \iint \vec{D} d\vec{S} = AD \quad H_\lambda = \frac{\Delta Me}{\Delta \lambda}$$
$$U = \frac{W_{AB}}{r} = \frac{|E_{PA} - E_{PB}|}{r} = |V_A - V_B| \quad I_m = \omega L = 2\pi f L \quad F_g = -\mu_1 \mu_2$$
$$I_m = \frac{Q}{2\pi r} \quad (1 + d\Delta t) I =$$
$$I_m = \frac{Q}{2\pi r} \quad M = \frac{4\pi}{\sigma} \frac{dM}{dT}$$
$$J_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{CL}}$$
$$J I_m^2 = U_m^2 \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2 \right] \quad \lambda^* T = b$$
$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$
$$u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$
$$\int \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
$$R = R_0 \sqrt{3A}$$
$$\vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
$$f \vec{T} \cdot \vec{v} = \rho \vec{c} \cdot \vec{v}$$

Magnetický moment

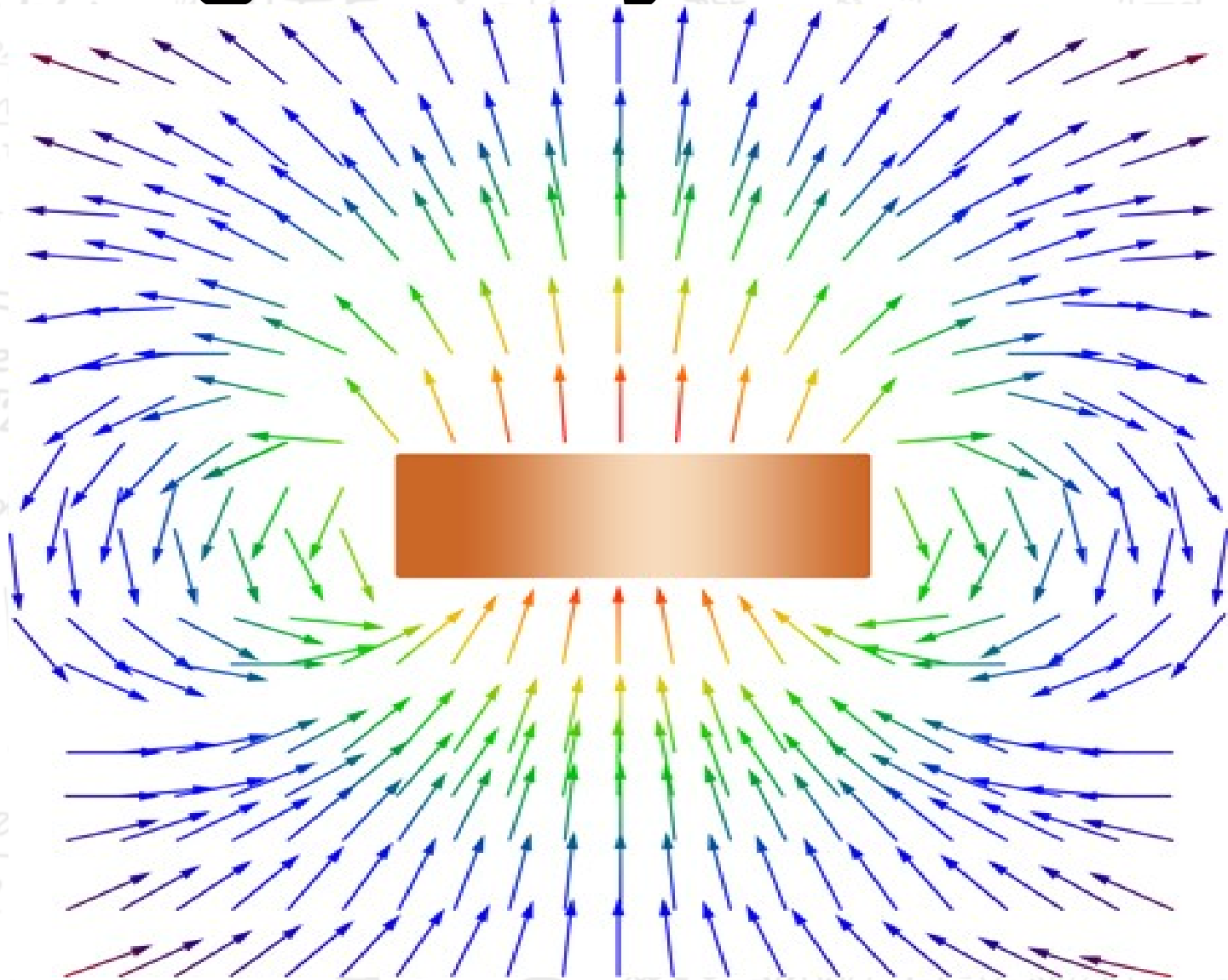
- Proudová smyčka:
 - Zdroj magnetického pole.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2r} \vec{n}$$



[Podrobněji](#)

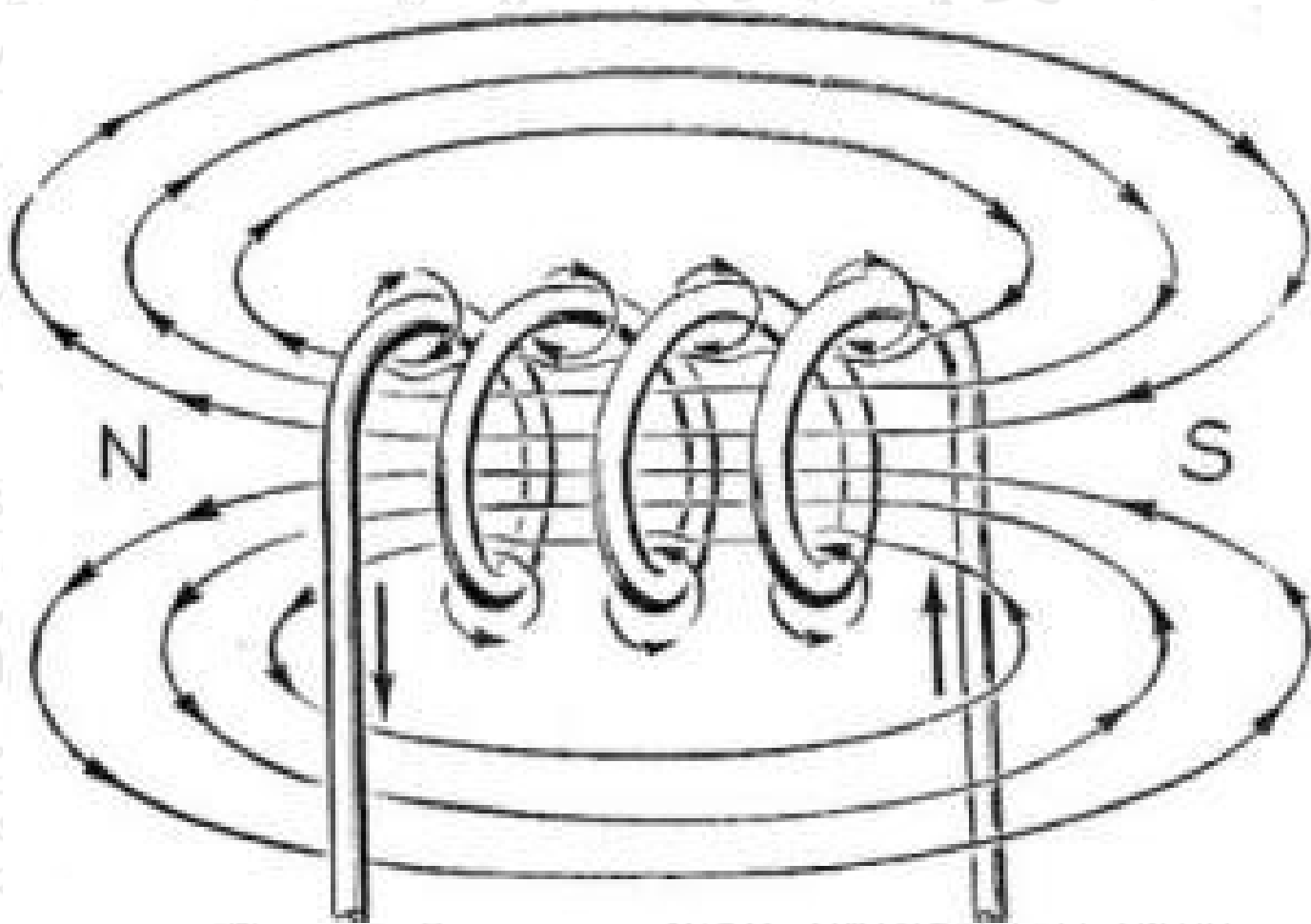
Magnetický moment



$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi$$
$$U_{ef} = U_m$$
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{NI \sqrt{2}}{l}$$
$$k = \rho^2 / 2m m_0 = \frac{M_0}{N_0}$$
$$\lambda = \frac{h}{p}$$
$$\sqrt{2eUm}$$
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \psi(x)$$
$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}_0$$
$$C(s)$$
$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kTN}{M_m}}$$
$$\lambda = \frac{\ln_2 F_h}{T}$$
$$\left(\frac{E_t}{E_0} \right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$$
$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$$

Magnetický moment

- Cívka.



Magnetický moment

- Magnetický moment (μ)
 - Charakterizuje zdroj magnetického pole.
 - Vektorová veličina.
 - Pro proudovou smyčku. $\vec{\mu} = I\pi r^2 \vec{n}$
- Co to má společného s MR?



Magnetický moment

- Elektrony „obíhají“ kolem jádra (analogie s proudovou smyčkou).
 - Orbitální mag. moment (μ_L)
- Elektrony mají vnitřní moment hybnosti („rotace kolem osy“).
 - Spinový mag. moment (μ_S)
- Nukleony mají vnitřní moment hybnosti („rotace kolem osy“).
 - Jaderný mag. moment

Jaderný magnetický moment

- I nukleony mají spin.
 - Vnitřní moment hybnosti („rotace kolem osy“).
 - Je kvantovaný (může nabývat jen přesně daných hodnot).
 - Je to vektor.
 - Nukleony jsou fermiony (musí splňovat Pauliho vylučovací princip).
 - Žádné 2 nerozlišitelné fermiony nemohou být ve stejném kvantovém stavu.

Jaderný magnetický moment

- Nukleony se musejí skládat do kvantových stavů (obdobně jako elektrony v obale).
- Protony a neutrony jsou rozlišitelné částice.
- Spiny se skládají jako vektory.

Jaderný magnetický moment

$E_k = \frac{1}{2} m v^2$
 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$
 $U_{ef} = U_m$
 $\vec{B} = \mu_0 \frac{NI\sqrt{2}}{2\pi r}$
 $k = \rho^2 / 2m m_0 = \frac{M_m}{N_A}$
 $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm}}$
 $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$
 $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} d\vec{S}$
 $C(s)$
 $v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kT N_A}{M_m}}$
 $\lambda = \frac{h \ln 2}{T F_m}$
 $\left(\frac{E_t}{E_0}\right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$
 $E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$
 $S = \frac{1}{A} \frac{d\omega}{dt}$

$\frac{1}{0} \hbar$



$I = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{1} \hbar$



$I = \frac{1}{2}$

$\frac{2}{1} \hbar$



$I = 1$

$\frac{3}{1} \hbar$



$I = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{2} \hbar$



$I = \frac{1}{2}$

$\frac{4}{2} \hbar$



$I = 1$

Jaderný magnetický moment

Prvek	Spin s	$\gamma [10^8 \text{T}^{-1} \text{s}^{-1}]$	Výskyt [%]
Vodík	$1/2$	2,68	99,985
Deut.	1	0,41	0,015
Uhlík	$1/2$	0,67	1,11
Dusík	1	0,19	99,63
Dusík	$1/2$	-0,27	0,37
Fluor	$1/2$	2,51	100
Sodík	$3/2$	0,71	100
Fosfor	$1/2$	1,08	100

[Podrobněji](#)

Jaderný magnetický moment

- Magnetický moment jádra je spojen s celkovým vektorem spinu:

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$$

- γ – gyromagnetický poměr [Hz T^{-1}]
- Nebo pomocí Bohrova magnetonu.
 - Mag. moment volného elektronu.

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$$

- <http://www.periodictable.com/Isotopes/092.238/index.html>

H	Home	Background Color:	He
Li Be	Hydrogen Main Page	Black White Gray	B C N O F Ne
NaMg	Hydrogen Pictures Page		Al Si P S Cl Ar
K Ca	Hydrogen Technical Data	Sc Ti V Cr Mn Fe Co Ni Cu Zn Ga Ge As Se Br Kr	
Rb Sr		Y Zr Nb Mo Tc Ru Rh Pd Ag Cd In Sn Sb Te I Xe	
Cs Ba La Ce Pr Nd Pm Sm Eu Gd Tb Dy Ho Er Tm Yb Lu Hf Ta W Re Os Ir Pt Au Hg Tl Pb Bi Po At Rn			
Fr Ra Ac Th Pa U Np Pu Am Cm Bk Cf Es Fm Md No Lr Rf Db Sg Bh Hs Mt Ds Rg Uub Uut Uuq Uup Uuh Uus Uuo			

Isotopes of Hydrogen (click to see decay chain):

[\$^1\text{H}\$](#) [\$^2\text{H}\$](#) [\$^3\text{H}\$](#) [\$^4\text{H}\$](#) [\$^5\text{H}\$](#) [\$^6\text{H}\$](#) [\$^7\text{H}\$](#)

^1H Half-life
Stable

Boson, 1p 0n
Spin 1/2 Parity 1



Atomic Weight 1.00782503207
Abundance 99.9885%
Mass Excess 7.2889705MeV
Binding Energy 0 MeV

Magnetic Moment 2.79284739μ

Quadrupole moment N/A

This isotope is stable and thus has no decay products, so instead we show decay chains that lead down to it.

Magnetizace

- Magnetizace je výslednice všech magnetických momentů (dalo by se říci, že se jedná o makroskopický projev magnetických momentů).
- Průmět magnetizace do osy z se označuje jako longitudinální magnetizace (M_z) a do roviny xy transverzální magnetizace (M_{xy}).

Magnetizace

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi$$

$$U_{ef} = U_m$$

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{NI}{\sqrt{2}}$$

$$2 \operatorname{tg} \varphi_B = \frac{w_2}{w_1} = w_{21}$$

$$pV = nRT$$

$$\vec{\Psi} = \iint \vec{D} d\vec{S} = AD$$

$$H_\lambda = \frac{\Delta M_e}{\Delta \lambda}$$

$$Me = \sigma T^4$$

$$\phi_e = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta x_2 - x_1}{\Delta t}$$

$$V = c/\lambda$$

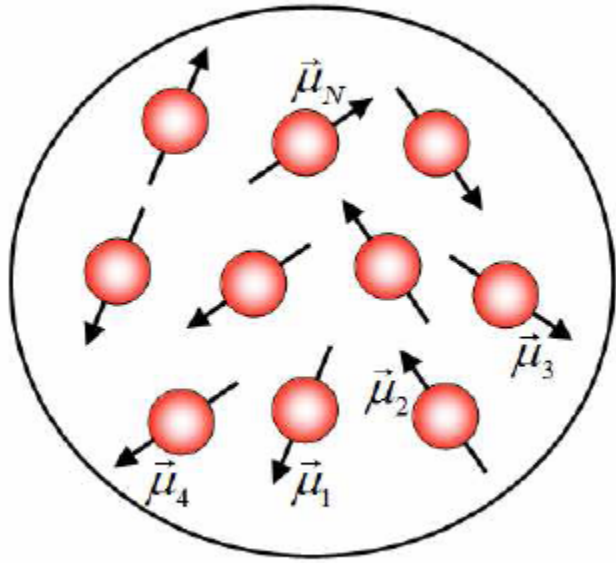
$$\Phi = NBS$$

$$U = \frac{W_{AB}}{q} = \frac{|E_{PA} - E_{PB}|}{q} = \frac{|\varphi_A - \varphi_B|}{q}$$

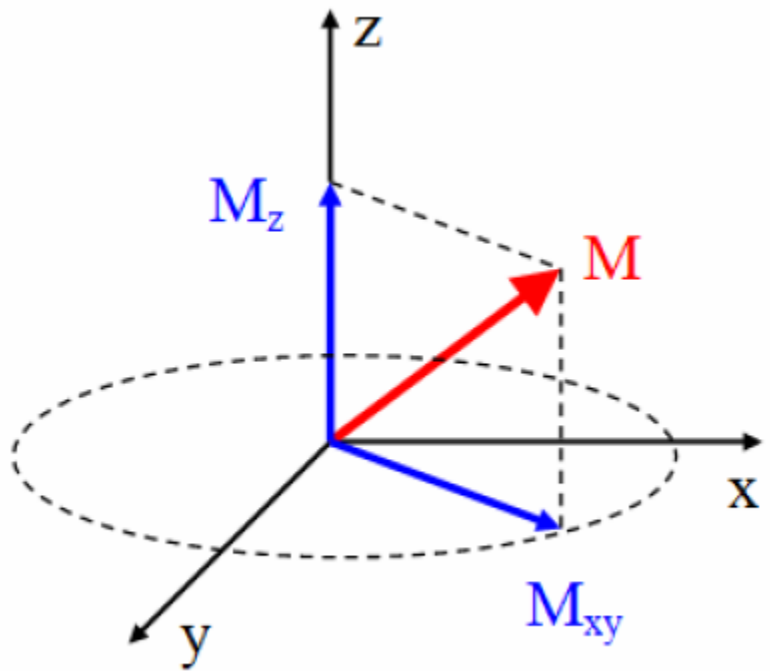
$$I_m = \omega L = 2\pi f L$$

$$F_g = \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$$

N = počet částic v látce
 V = objem látky



$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{\mu}_i$$



$$\left(\frac{E_t}{E_0}\right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$$

$$j_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{\epsilon L}}$$

$$S_{I_m^2} = U_m^2 \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2 \right]$$

$$\lambda^* T = b$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

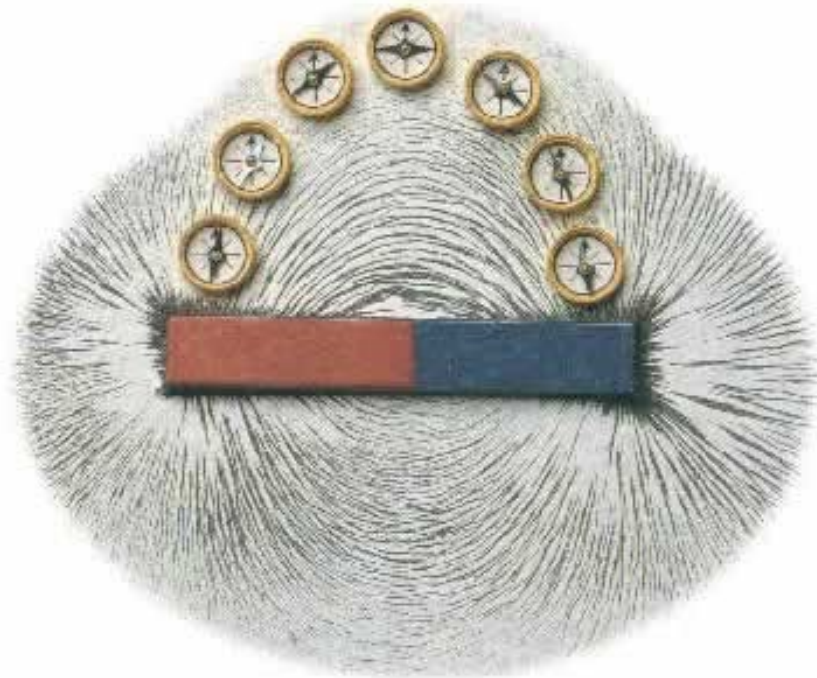
$$u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Larmorova precese

- Důsledkem nenulové teploty ($T > 0$ K) se částice pohybují zcela náhodně a také orientace magnetických momentů je zcela náhodná.
- Proto je střední hodnota vektoru magnetizace nulová $\langle \vec{M} \rangle = 0$.

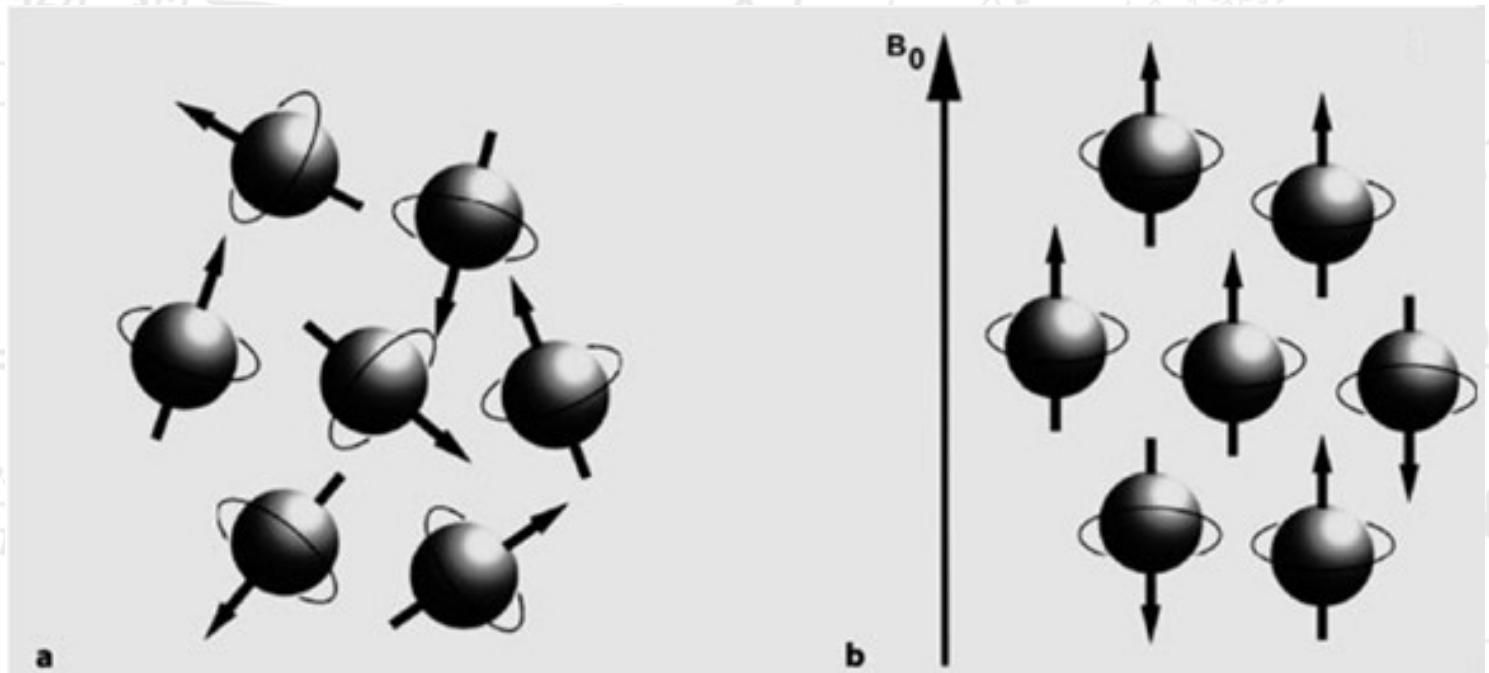
Larmorova precese

- Orientace mag. momentů v silném vnějším statickém mag. poli.
 - Střelka kompasu



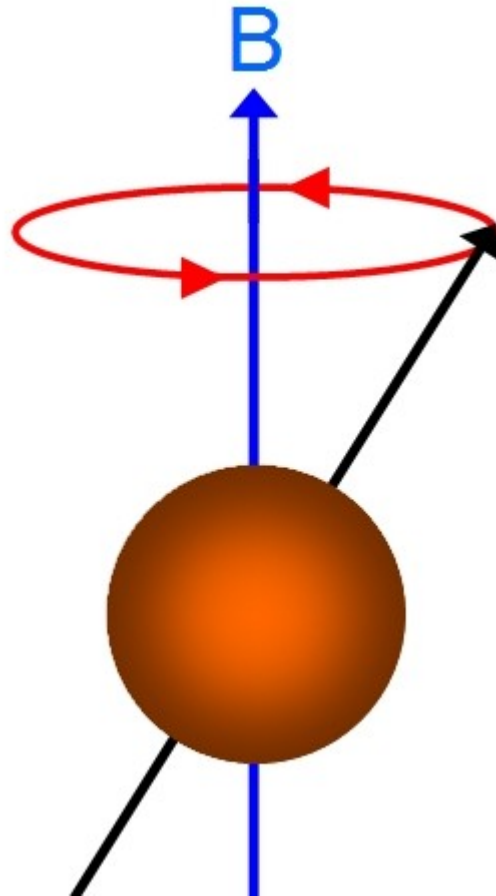
Larmorova precese

- Orientace mag. momentů v silném vnějším statickém mag. poli
 - Střelka kompasu
 - Magnetický moment jádra



Larmorova precese

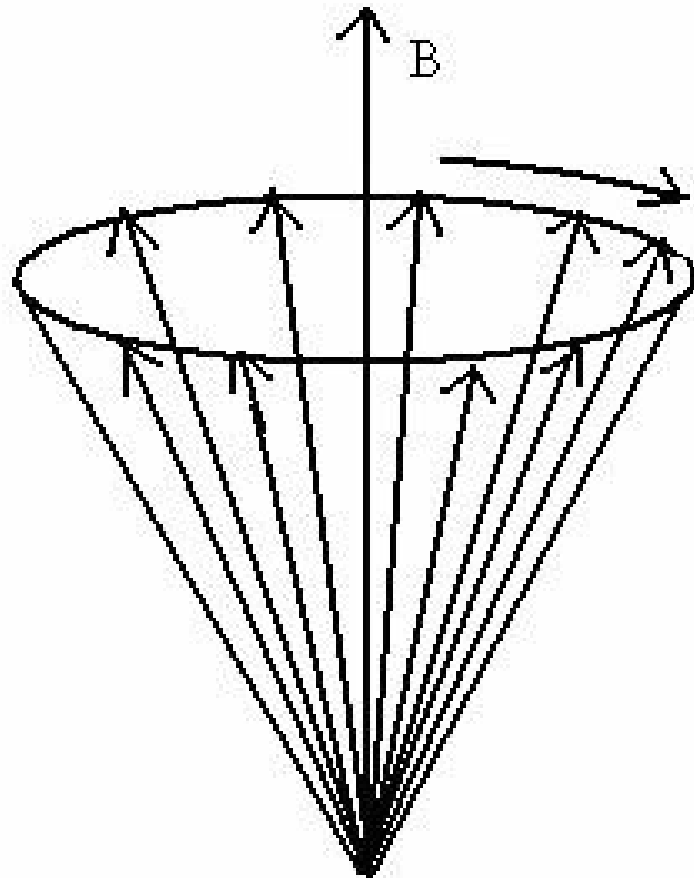
- Bližší pohled na jádro:



$$f_L = \frac{\gamma}{2\pi} B_0$$

Larmorova precese

- Bližší pohled na jádra:



Larmorova precese

• Pro některé prvky v $B_0=1\text{T}$:

➤ Vodík ^1H 42,7 MHz

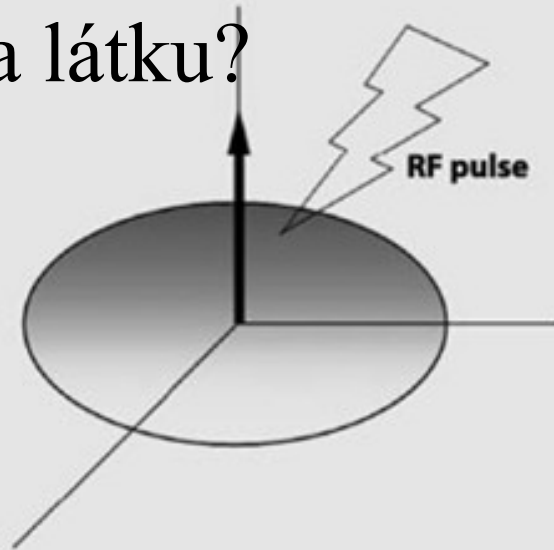
➤ Uhlík ^{13}C 10,7 MHz

➤ Dusík ^{14}N 6,1 MHz

➤ Fosfor ^{31}P 17,2 MHz

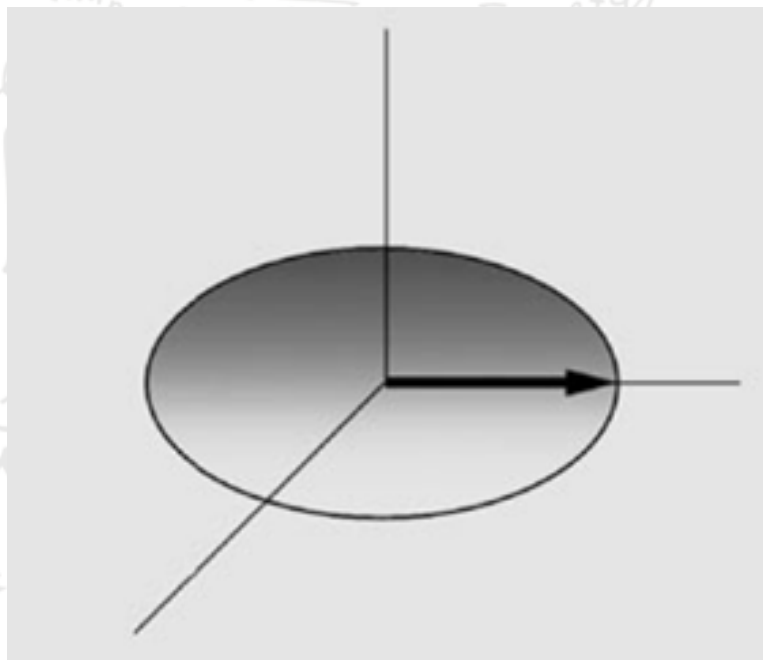
Relaxační doby

- Výsledný vektor magnetizace směřuje ve směru statického magnetického pole B_0 . Obecně se uvažuje ve směru osy z.
- Co se stane, když zapůsobíme krátkým radiofrekvenčním (RF) pulzem o Larmorově frekvenci na látku?



Relaxační doby

- Magnetizace se překlopí o úhel α .

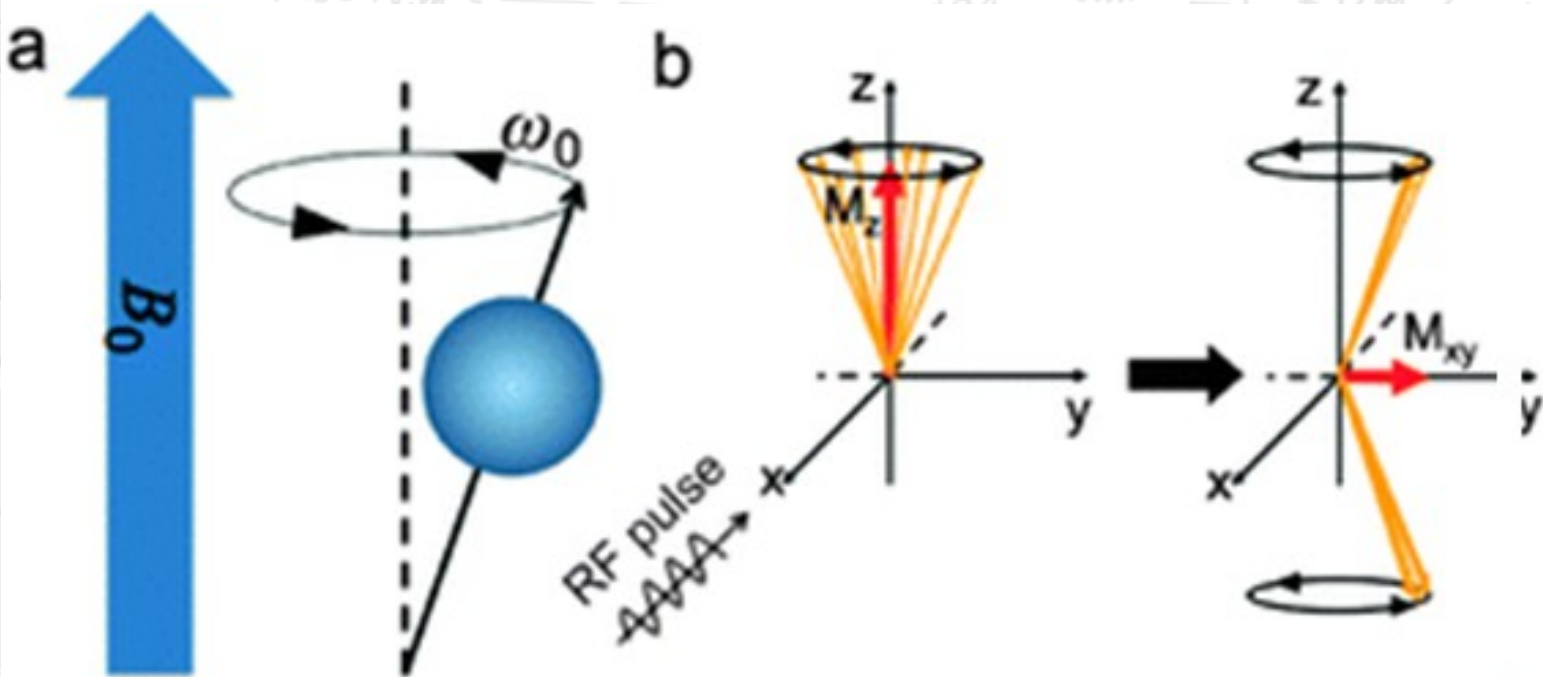


Relaxační doby

- Potřebné předpoklady:
 - Frekvence RF pulzu musí být v **rezonanci** s frekvencí precesního pohybu daného jádra v daném statickém magnetickém poli (musí být rovna Larmorově frekvenci).
 - Intenzita a doba působení RF pulzu ovlivní velikost sklápěcího úhlu α .

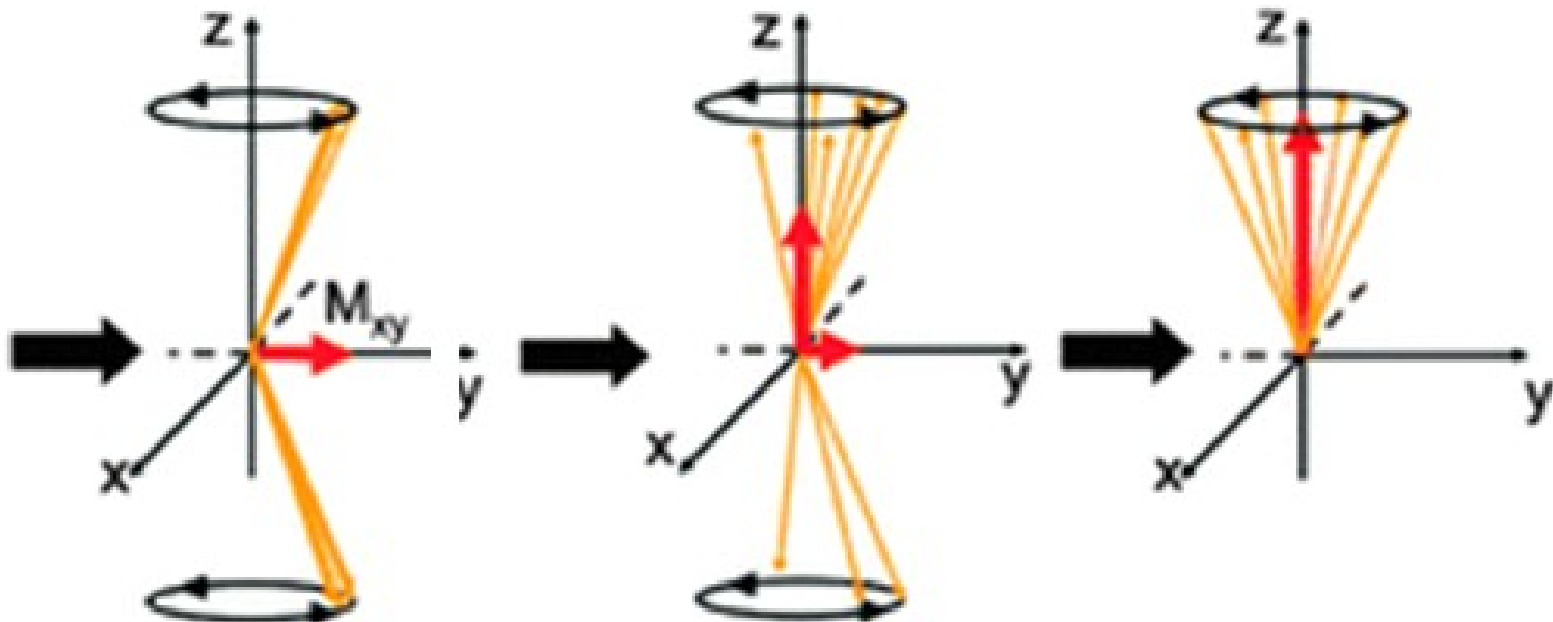
Relaxační doby

- Bližší pohled:



Relaxační doby

- Bližší pohled:



$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi$$

$$U_{ef} = U_m$$

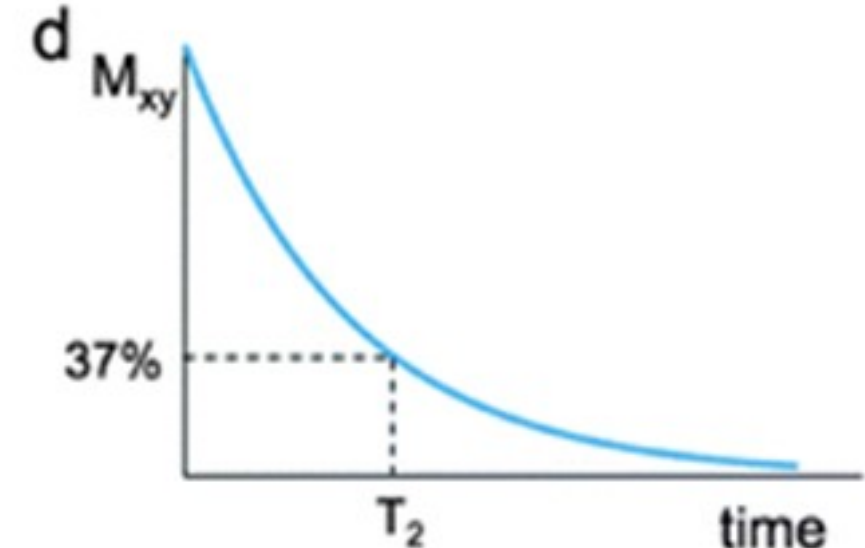
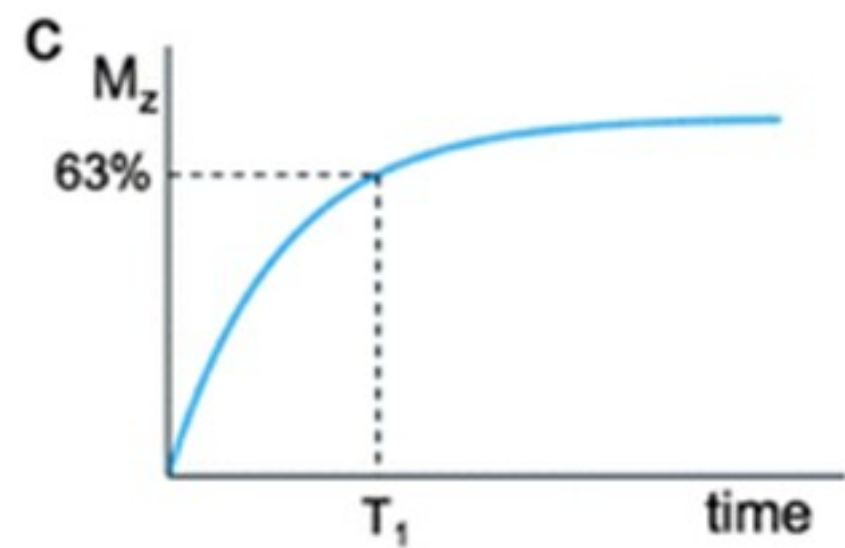
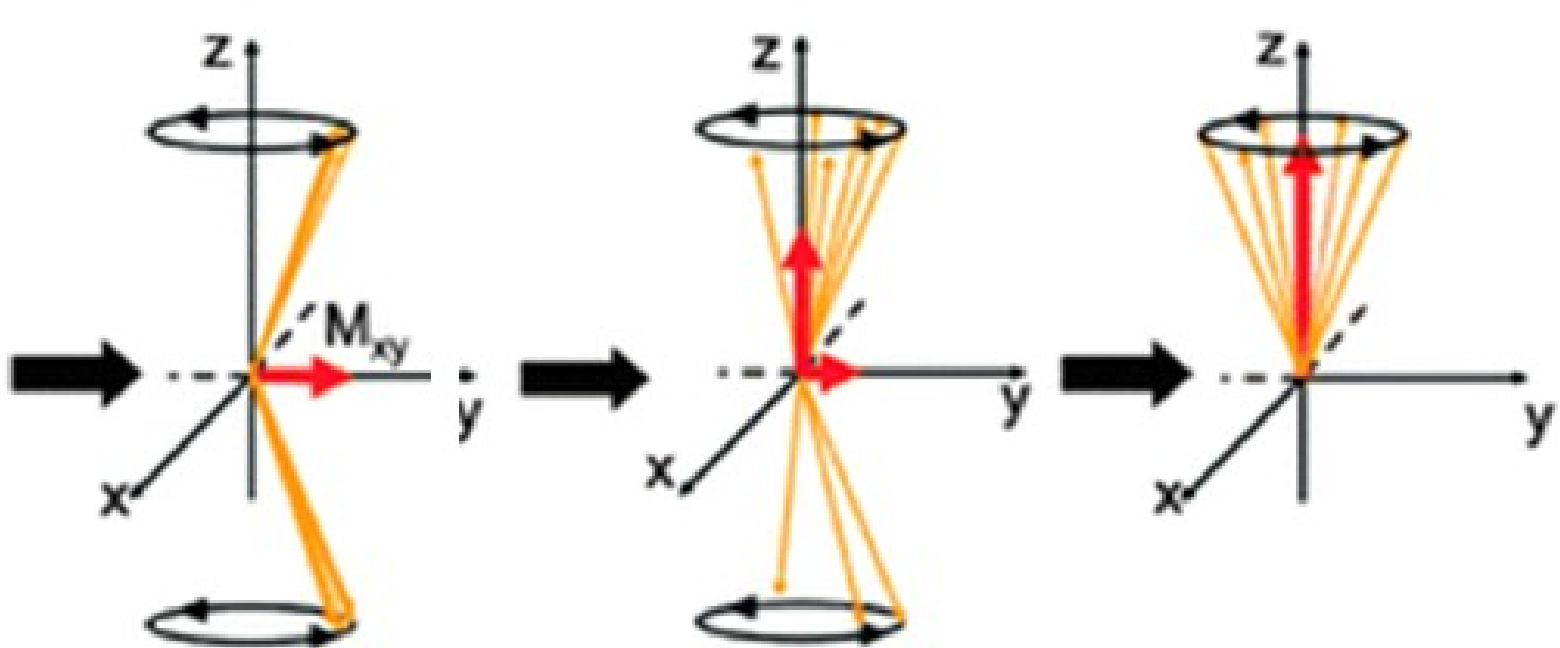
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{NI \sqrt{2}}{r}$$

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{m v}{\hbar} = \frac{m \lambda}{h}$$

$$\lambda = \frac{h}{m v}$$

$$v = \frac{\sqrt{2eU}}{m}$$

$$f_0 = \frac{1}{\lambda} = \frac{m v}{h}$$



$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$$

$$R = R_0 \sqrt[3]{A}$$

$$J = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{dS}{dt}$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar \omega}{c} = \frac{\hbar k}{c}$$

$$u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Relaxační doby

- Různá tkáň má různé relaxační doby:

Typ látky	T ₁ [ms]	T ₂ [ms]
tuk	250	60
sval	900	50
krev	1400	100-200
mozek		
šedá hmota (GM)	950	100
bílá hmota (WM)	600	80
cerebrospinální tekutina (CSF)	2000	250

Relaxační doby

- Bližší pohled:

- Relaxace po 90° pulzu (Video7_9)

- <https://www.youtube.com/watch?v=lKp67IqQjH4>

- Rozfázování koherence (Video7_10/11)

- <https://www.youtube.com/watch?v=7oZMA0OuK4>

- <https://www.youtube.com/watch?v=is8TscwFOvM>

- 180° pulz (Video7_12)

- https://www.youtube.com/watch?v=GDEIT6Tz7_Q

Relaxační doby

- V praxi není vše tak jednoduché:
 - Statické magnetické pole není dokonale homogenní v celé délce tubusu.
 - Při sklápění magnetizace není výsledný úhel pro všechna jádra vždy stejný.
 - Tkáně mají různou magnetickou susceptibilitu.
 - Časový průběh magnetizace je popsán Blochovými rovnicemi.

Blochovy rovnice

- V praxi není vše tak jednoduché:

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= \gamma(\vec{M} \times \vec{B})_x - \frac{M_x}{T_2} \\ \frac{dM_y}{dt} &= \gamma(\vec{M} \times \vec{B})_y - \frac{M_y}{T_2} \\ \frac{dM_z}{dt} &= \gamma(\vec{M} \times \vec{B})_z - \frac{M_z - M_0}{T_1}\end{aligned}$$

Kontraindikace

- Kardiostimulátory
- Kovová tělesa
- První trimestr těhotenství
- Ušní implantáty, naslouchadla
- Velká tetování ve vyšetřované oblasti
- Klaustrofobie

Shrnutí

- Máme představu o historii MRI
- Víme co je to magnetický moment a jak můžeme vytvořit mag. pole.
- Umíme popsat vnitřní moment hybnosti.
- Známe a umíme interpretovat a vypočítat jaderný magnetický moment hybnosti. Umíme operovat s gyromagnetickým poměrem.

Shrnutí

- Víme, co je magnetizace a jak se jmenují její složky.
- Perfektně víme, jak vzniká a co je to Larmorova precese.
- Umíme vysvětlit vznik relaxačních časů a jejich důležitost pro MRI.
- Známe kontraindikace MRI.

Konec

WOO
HOO!



$E_k = \frac{1}{2} m v^2$
 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi$
 $U_{ef} = \frac{U_m}{2}$
 $\vec{B} = \mu_0 \frac{NI \sqrt{2}}{2\pi r}$
 $k = \frac{p^2}{2m} = \frac{M_r \cdot 10^{-3}}{N_A}$
 $\lambda = \frac{h}{p}$
 $\sqrt{2eUm_e}$
 $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$
 $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} d\vec{S}$
 $v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kTN_A}{M_r \cdot 10^{-3}}}$
 $\lambda = \frac{h \ln 2}{T}$
 $\left(\frac{E_t}{E_0}\right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$
 $E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$
 $S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$

$2 \tan \vartheta_B = \frac{m_2}{m_1} = m_{21}$
 $\rho V = n R T$
 $\vec{\Psi} = \iint \vec{D} d\vec{S} = A D$
 $H_{\lambda} = \frac{\Delta M_e}{\Delta \lambda}$
 $V = c/\lambda$
 $\Phi = NBS$
 $\vec{F}_m = \vec{B} I l = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d} l$
 $\mu_1 \mu_2$
 $\frac{C}{T} k = \pm \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)}$
 $\omega = 2\pi f$
 $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$
 $F_x = \frac{1}{2} C_x \rho \omega^2$
 $\frac{\omega_1}{x} + \frac{\omega_2}{x'} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{v}$
 $\vec{D} d\vec{S} = Q^*$
 $U_{\frac{1}{2}} = U_e I t$
 $\vec{F}_v = \int \frac{F_n}{R}$
 $\cos \alpha$
 $\lambda^* T = b$
 $S I_m^2 = U_m^2 \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{x_c} - \frac{1}{x_L} \right)^2 \right]$
 $\int \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$
 $p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$
 $u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

Dodatky 1

- Faradayův zákon elektromagnetické indukce (1831):

$$U_i = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

- Velikost indukovaného napětí v proudové smyčce je úměrné záporně vzaté změně magnetického indukčního toku za čas.
- Co to znamená v lidské řeči?

Dodatky 1

- Změna magnetického indukčního toku:
 - Přibližujeme-li se s magnetem k cívce mění se magnetický tok plochou cívky.
 - Neboli cívku „prochází více“ siločar.
 - Pokud se oddalujeme tak magnetický tok klesá (cívku „prochází méně“ siločar).
- Změna za čas:
 - Čím rychleji se přibližujeme, tím rychleji se mění magnetický indukční tok.

Dodatky 1

- Co z toho prakticky plyne?
 - Čím rychleji se mění magnetické pole uvnitř smyčky, tím větší U se indukuje.
 - Čím větší pole a větší průřez smyčky, tím větší U se indukuje.
- Setkali jste se s tím někdy?
- K čemu je to dobré?

Dodatky 1

- Pohybuje-li se zdroj magnetického pole (permanентní magnet, proudová smyčka, atom s nenulovým dipólovým momentem, elektron...) indukuje ve své blízkosti elektromagnetické pole.

Dodatky 1

- Důkaz místo slibů: Video7_3

https://www.youtube.com/watch?v=UyqLpbg_HvY

- Jezdíte trolejbusem/tramvají? Video7_4

<https://www.youtube.com/watch?v=WKklyuzghQg>

- Jak se může tavit kov: Video7_5

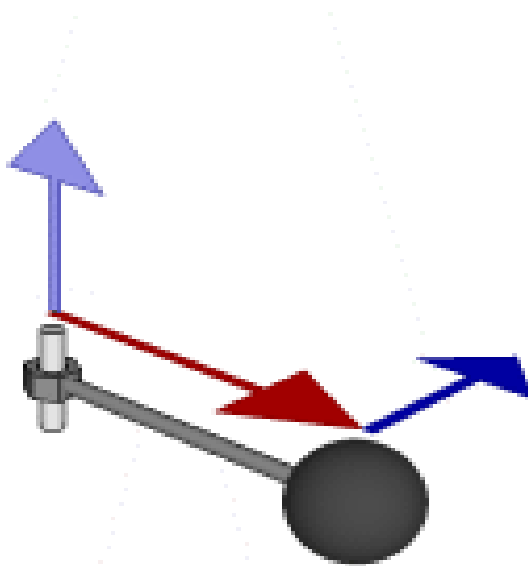
<https://www.youtube.com/watch?v=k4xsqw463Hs>

Konec 1. dodatku

[zpět](#)

Dodatky 2

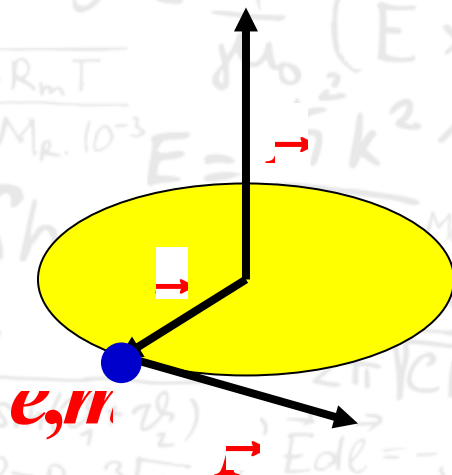
- Moment hybnosti ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$)
- V klasické mechanice popisuje rotační pohyb tělesa.



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Dodatky 2

- Spojitost momentu hybnosti a magnetického momentu.
- Pro moment hybnosti částice o hmotnosti m s nábojem e pohybující se po kružnici o poloměru r platí:

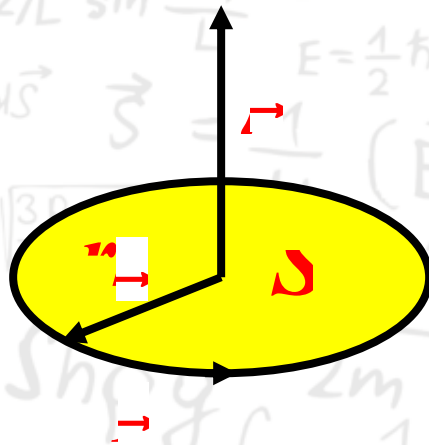


$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

$$\frac{\vec{L}}{mr} = \vec{n} \times \vec{v}$$

Dodatky 2

- Pro magnetický moment proudové smyčky o poloměru r , směrovém vektoru \vec{n} a s proudem I platí:



$$\vec{\mu} = S \vec{n} \times \vec{I}$$

$$\vec{\mu} = \pi r^2 \frac{e}{2\pi r} \vec{n} \times \vec{v}$$

$$\frac{2\vec{\mu}}{er} = \vec{n} \times \vec{v}$$

Dodatky 2

- Dostáváme vztah mezi momentem hybnosti a magnetickým momentem:

$$\frac{\vec{L}}{m r} = \vec{n} \times \vec{v}$$

$$\frac{2\vec{\mu}}{e r} = \vec{n} \times \vec{v}$$

$$\frac{\vec{L}}{m r} = \frac{2\vec{\mu}}{e r}$$

$$\frac{e}{2m} \vec{L} = \vec{\mu}$$

Dodatky 2

- Moment hybnosti se zachovává!!!
- Proto pokud se zmenší poloměr, tak se musí zvětšit hybnost (hmotnost je konstantní, takže se zvětší rychlost).
- Krasobruslení a další viz Videá 7_6-8
<https://www.youtube.com/watch?v=0k276y9kuQQ>
<https://www.youtube.com/watch?v=p9zhP9Bnx-k>
<https://www.youtube.com/watch?v=mrGfc-3uv7o>

Konec 2. dodatku

[zpět](#)

Dodatky 3

- Je vhodné ujasnit si názvosloví, které se používá okolo spinů.
- Každá částice má spinové kvantové číslo (značíme s), které je pro ni charakteristické obdobně jako el. náboj.
- Toto číslo je vždy nezáporným násobkem $1/2$ (tzn. $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \dots$)
- Když mluvíme o spinu, máme většinou na mysli toto číslo.

[zpět](#)

Dodatky 3

- Celková velikost vektoru spinového momentu hybnosti \vec{S} je závislá na spinovém kvantovém čísle s :
$$|\vec{S}| = \hbar\sqrt{s(s+1)}$$
- Ze vzorce je vidět, že velikost spinu, stejně jako spinové číslo s , jsou kvantovány a mohou nabývat pouze diskrétních hodnot.

Dodatky 3

- Kvantován je také průmět vektoru spinového momentu hybnosti do libovolné osy (např. osa z)
$$S_z = \hbar m_z$$
- Kde m_z je spinové magnetické číslo. Jedná se o obdobu magnetického kvantového čísla u elektronu.
- Může nabývat hodnot daných spinovým kvantovým číslem:

$$m_z = (-s, -s+1, \dots, s-1, s)$$

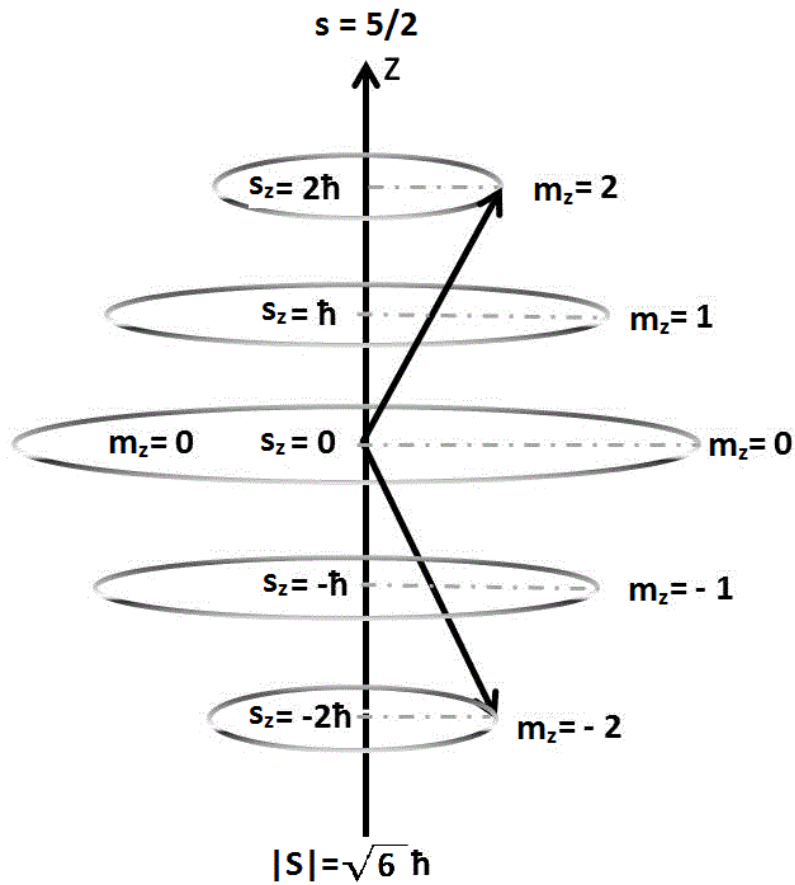
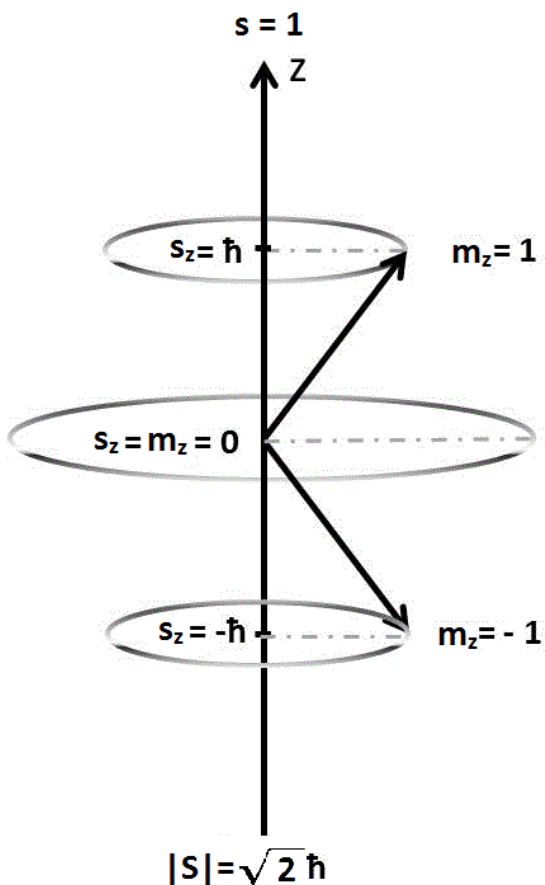
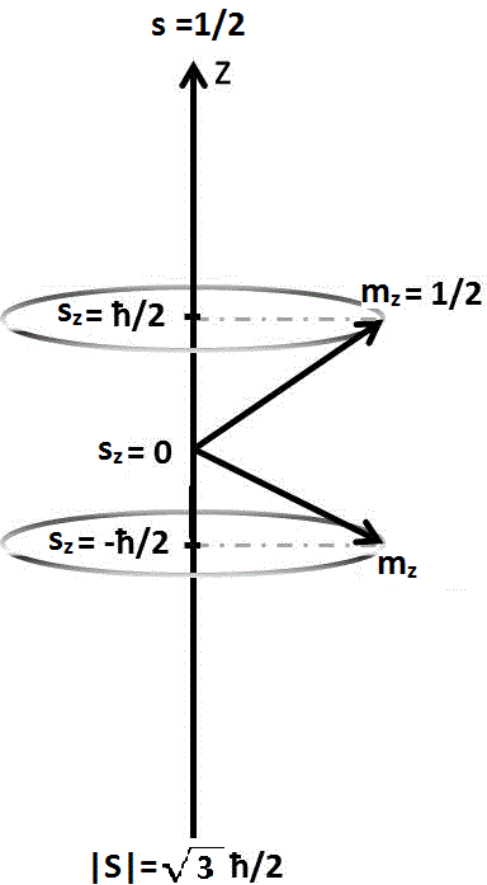
[zpět](#)

Dodatky 3

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi$$

$$U = U_0 \quad E = \hbar \omega$$



$$\langle E_0 \rangle_{\parallel} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$E_y = E_0 \sin(k_x - \omega t)$$

$$S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$$

Konec 3. dodatku

[zpět](#)

Děkuji za pozornost

**Konec
7. přednášky**

**Prezentace vznikla v rámci projektu
fondu rozvoje MU 1515/2014**