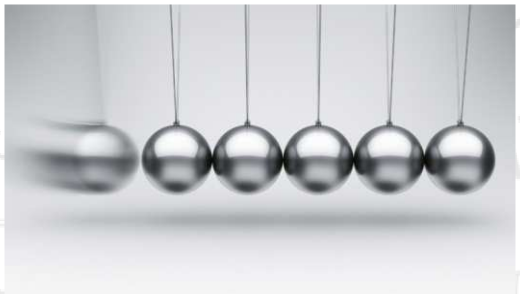
Radiologická fyzika I.
Zvuk a ultrazvuk

Co je vlnění?

- Kmitání částic prostředí, které se šíří prostorem.
- Kmitáním nedochází k přenosu hmoty, částice se pouze vychylují ze svých rovnovážných poloh a prostřednictvím vazeb předávají kmity dál.
- Vlna přenáší energii a hybnost (někdy i informaci).
- Energie a hybnost vlny se šíří srážkami mezi částicemi. Samotné částice se nepohybují.



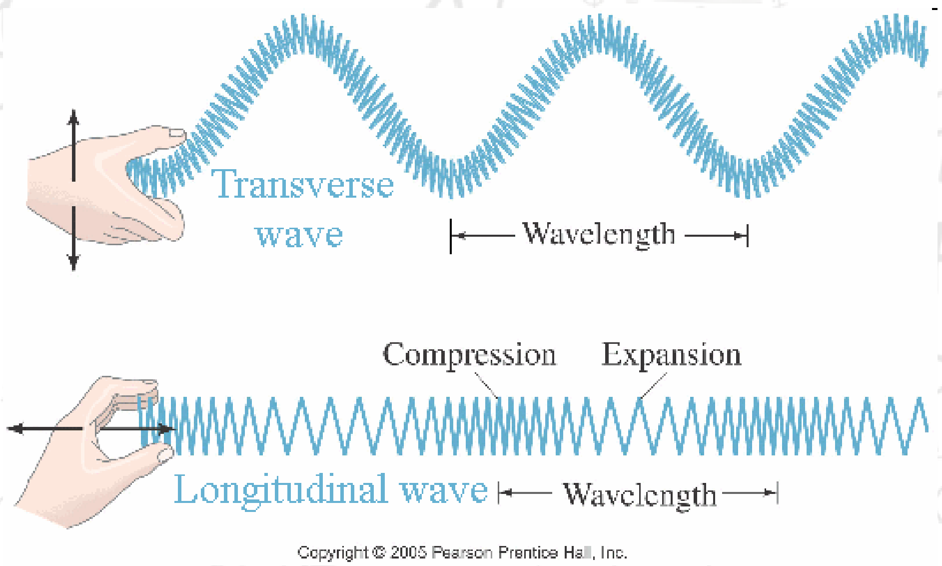
http://www.justjoy.cz

Druhy vln

- **Mechanické vlny**: Vznikají a šíří se pouze v hmotném prostředí. Jejich popis vychází z Newtonových zákonů mechaniky.
- **Elektromagnetické vlny**: Nejsou vázány pouze na hmotné prostředí. Mohou se šířit i ve vakuu.
- **de Broglieho vlny**: Částice hmoty se chovají jako vlny. K pochopení je nutná znalost kvantové fyziky.

Příčné a podélné vlny

- **Příčné vlny**: částice kmitají kolmo na směr šíření vlnění.
- **Podélné vlny**: částice kmitají ve směru šíření vlnění. Dochází ke střídavému zhušťování a zřeďování částic prostředí.



https://jmag0904.files.wordpress.com/2013/05/longvstransvwave.gif

Příčné a podélné vlny

- Příčné vlny se mohou šířit pouze prostředím, které odolává namáhání ve smyku, tj. v prostředí tuhém.
- V plynném a kapalném prostředí se může zvuk šířit pouze podélnými kmity, v pevných látkách se může šířit jak podélně tak příčně.
- Jedinou podmínkou pro šíření všech typů vln je, že prostředí musí mít dostatečně velké rozměry vzhledem k vlnové délce vlnění.

Postupná vlna

- Okamžitá příčná výchylka libovolné částice závisí nejen na čase t, ale také na vzdálenosti x částice od zdroje vlnění.

- Rovnice postupné vlny:

$$y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t)$$

$k = 2\pi/\lambda$ … úhlový vlnočet (vlnové číslo)

$(kx \pm \omega t)$ … fáze

- Odvození na cvičení

Vlnové číslo nebo také vlnočet je vlastnost vlny definovaná buď jako počet **vlnových** délek připadajících na jednotku délky (tedy $1/\lambda$, kde λ je **vlnová** délka), nebo jako $2\pi/\lambda$ (známé též jako úhlové **vlnové číslo**, úhlový vlnočet).

Postupná vlna

- **Vlnová délka λ**: Je nejmenší vzdálenost dvou bodů, které kmitají se stejnou fází.
- **Perioda vlny *T***: Je nejkratší doba, po které se výchylka částice opakuje: $T = \omega/2\pi$.
- **Frekvence *f***: Je definována jako převrácená hodnota periody a vyjadřuje počet kmitů za jednotku času: $f = 1/T$.
- **Rychlost šíření** vlny prostorem:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \lambda f = \frac{\lambda}{T}$$

Vlastnost prostředí   Vlastnosti zdroje

Postupná vlna

- Zápis pomocí komplexních čísel přináší velké zjednodušení. Platí totiž:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad , \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

- Pro zjednodušení zápisu vln je důležité, že nedochází při derivování (a integrování) k „přecházení“ od sinu ke kosinu

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x \quad , \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x \quad , \quad \frac{de^{ix}}{dx} = i e^{ix}$$

$$y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t) = y_m \exp(ikx \pm \omega t)$$

Skládání vln

- Šíří-li se prostorem více vln, dochází k jejich skládání.
- Platí **princip superpozice**: U překrývajících se vln se výchylky algebraicky sčítají a vytvářejí jednu výslednou vlnu.

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$y(x,t) = y_{m1}\sin(kx \pm \omega t) + y_{m2}\sin(kx \pm \omega t)$$

Interference vln

- Je vzájemné zesilování nebo zeslabování vln.
- Setkává-li se v jednom místě více vln různých amplitud, frekvencí a fází, vzniká podle principu superpozice nová vlna odlišného tvaru.
- O výsledku interference rozhoduje fázový rozdíl obou vln nebo jejich dráhový rozdíl, který je funkcí fázového rozdílu.

Interference vln

- **Konstruktivní interference** – vlny se setkávají ve fázi:

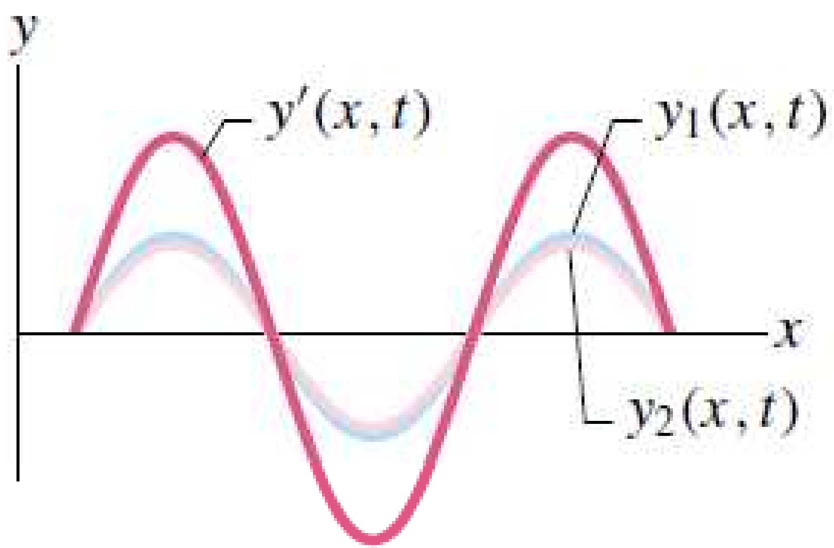
$$\varphi = n2\pi; \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\Delta x = n\lambda; \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

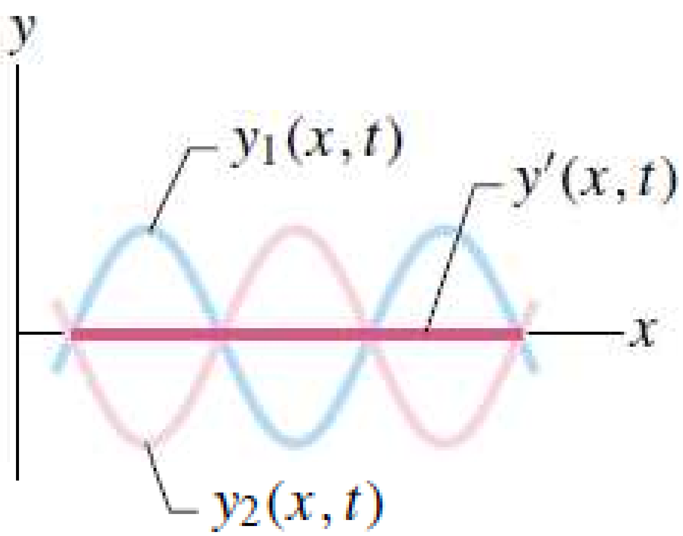
- **Destruktivní interference** – vlny se setkávají v protifázi:

$$\varphi = \left(n + \frac{1}{2}\right)2\pi; \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\Delta x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda; \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

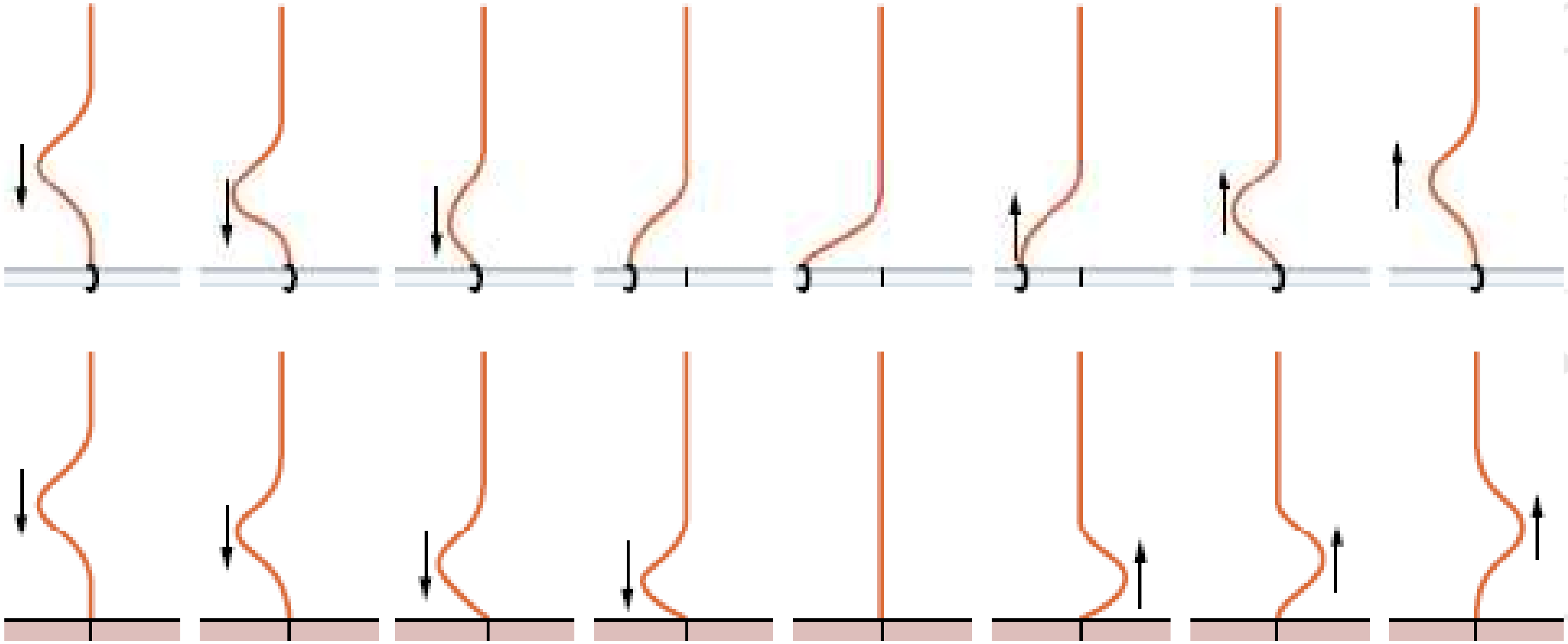
$$\left(n + \frac{1}{2}\right)2\pi = (2n + 1)\pi \qquad \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$$

Interference vln





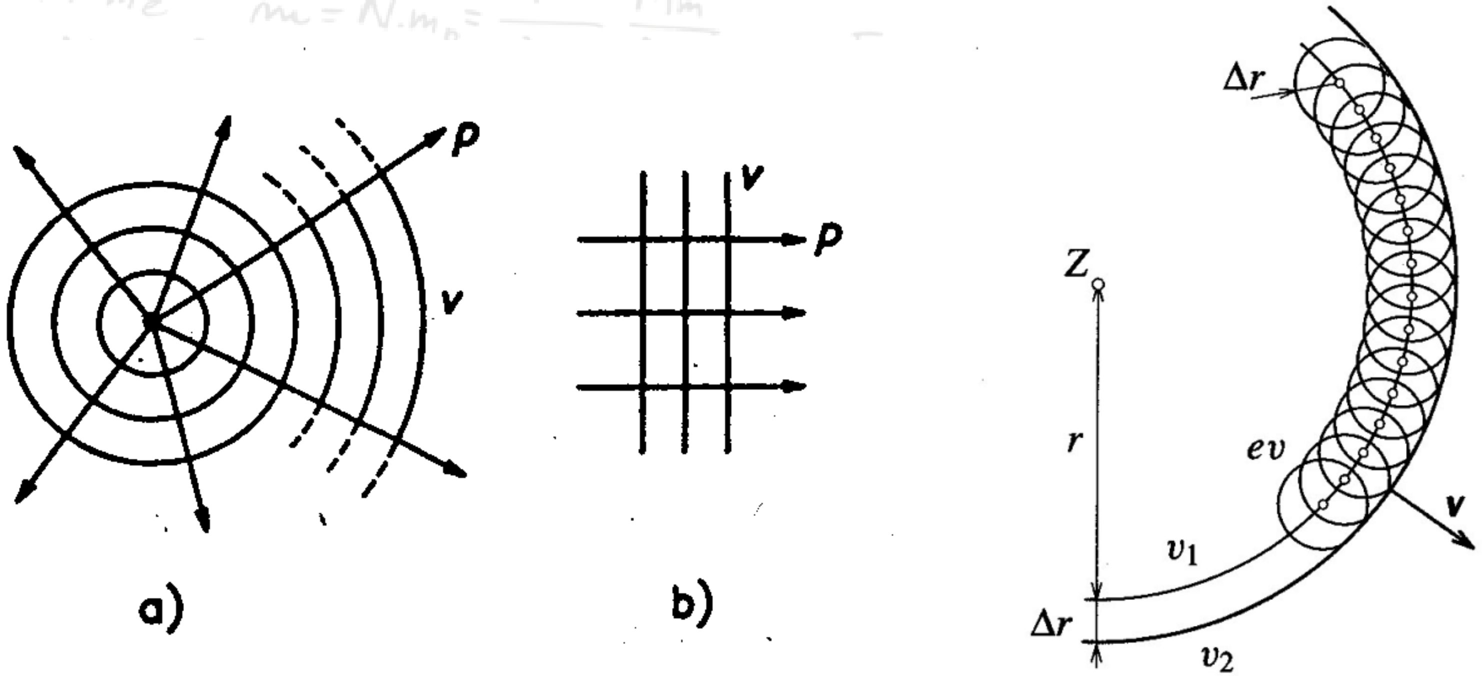
Odraz vln



Huygensův princip

- Každý bod vlnoplochy, do kterého dospělo vlnění v určitém okamžiku, můžeme považovat za zdroj elementárního vlnění, které se z něj šíří v elementárních vlnoplochách. Vlnoplocha v dalším časovém okamžiku je vnější obalová plocha všech elementárních vlnoploch.
  - **Vlnoplocha**: Je plocha, na níž mají částice stejnou amplitudu výchylky, tj. kmitají se stejnou fází. Může být kulová nebo rovinná.
  - **Paprsky**: Jsou přímky kolmé k vlnoplochám. Určují směr šíření vlny.

Huygensův princip



Huygensův princip

- **Rovinná vlna**:

$$y(x,t) = y_m \sin(\omega t - kx)$$

- **Kulová vlna**:

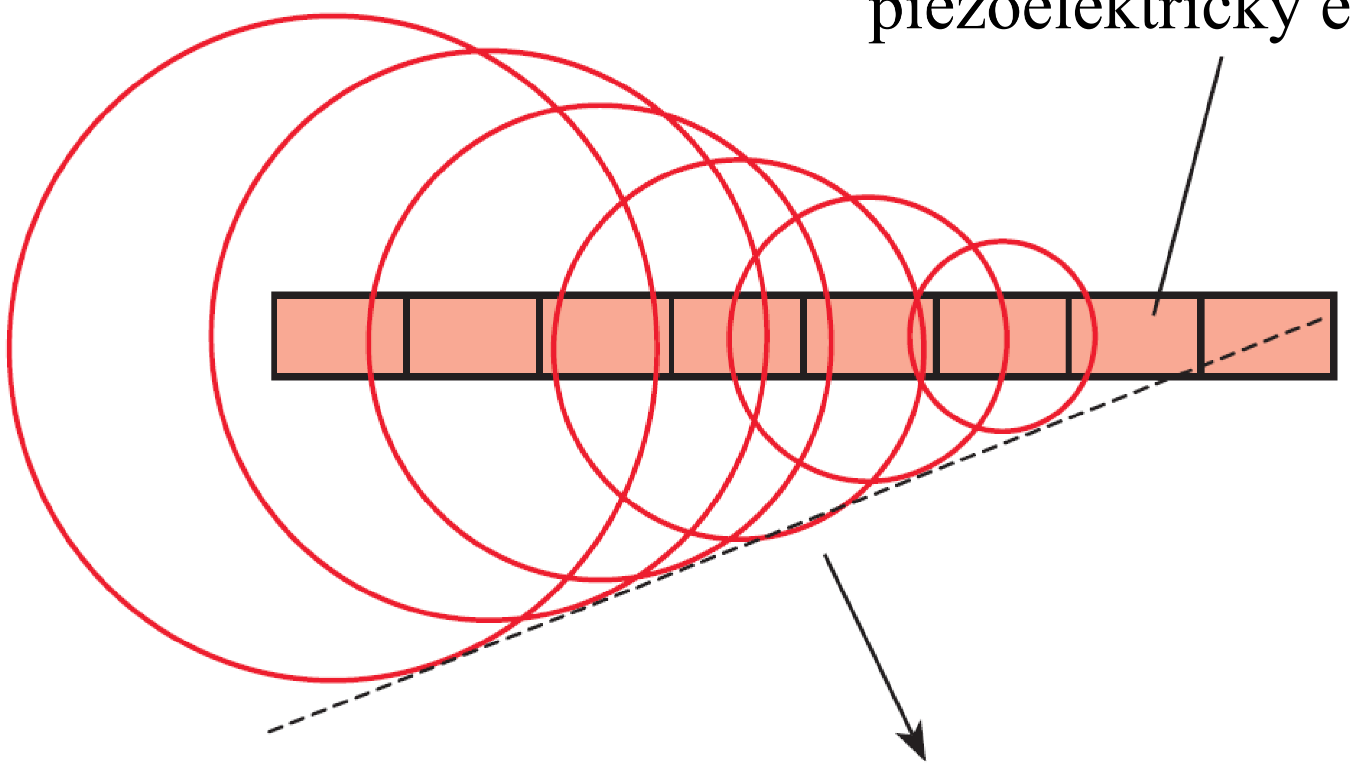
$$y(x,t) = \frac{y_m}{r} \sin(\omega t - kr)$$

r … vzdálenost vlny od zdroje

- S rostoucím poloměrem kulové vlny *r* úměrně klesá výchylka vlny. Při dostatečně velkých poloměrech přecházejí kulové vlny ve vlny rovinné.

Huygensův princip

- Řada zdrojů kmitajících ve fázi vytváří šířící se vlnu

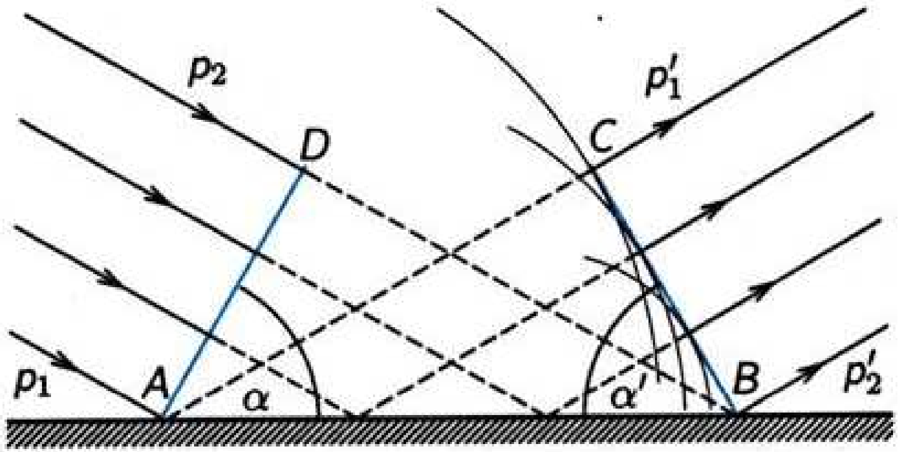


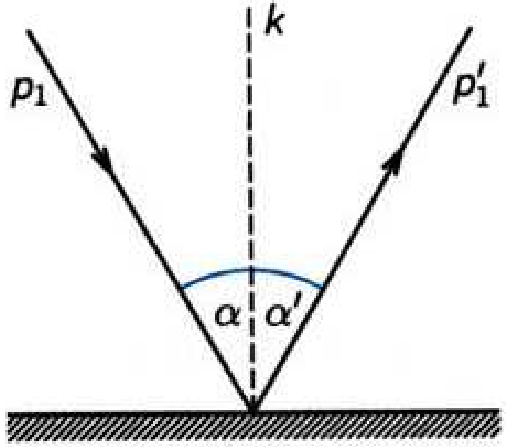
postupující vlnoplocha – postupná aktivace elementů umožňuje směrování

Zákon odrazu

- Úhel odrazu vlnění se rovná úhlu dopadu. Odražený paprsek leží v rovině dopadu.

$$\theta = \theta'$$

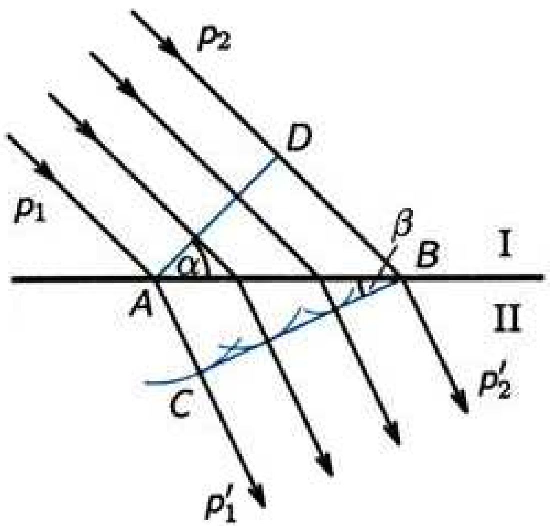


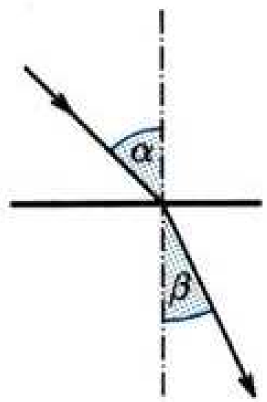


Zákon lomu

- Poměr sinu úhlu dopadu k sinu úhlu lomu je pro daná dvě prostředí stálá veličina, která se rovná poměru rychlostí vlnění v obou prostředí. Označuje se index lomu *n*.
- Lomený paprsek leží v rovině dopadu.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n$$





Difrakce (ohyb)

- Vlnění se odchyluje od původního směru a šíří se i za překážku. Míru ohybu ovlivňuje vztah mezi rozměrem překážky a vlnovou délkou vlnění. Ohyb je tím větší, čím větší je vlnová délka vlny.

Vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = c^2 \nabla^2 u = c^2 \Delta u$$

- c je rychlost šíření vlny (závisí pouze na parametrech prostředí, kterým se vlna šíří).

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

- Laplaceův operátor: $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$
- Gradient (operátor Nabla): $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$
- Odvození na cvičení

u je např. výchylka nebo rychlost kmitajícího bodu, vždy funkce polohy a času

Vlnová rovnice

- Vlnová rovnice pro **rovinnou vlnu**:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

- Řešením je rovnice:

$$u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

$$u(x,t) = u_m \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \varphi\right]$$

Pro rovinnou vlnu si vystačíme s jedinou prostorovou souřadnicí x

Vlnová rovnice

- Vlnová rovnice pro **kulovou vlnu**:

$$\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right)$$

- Řešením je rovnice:

$$u(r,t) = \frac{F(r-ct)}{r} + \frac{G(r+ct)}{r}$$

$$u(r,t) = \frac{u_m}{r}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r-ct)+\varphi\right]$$

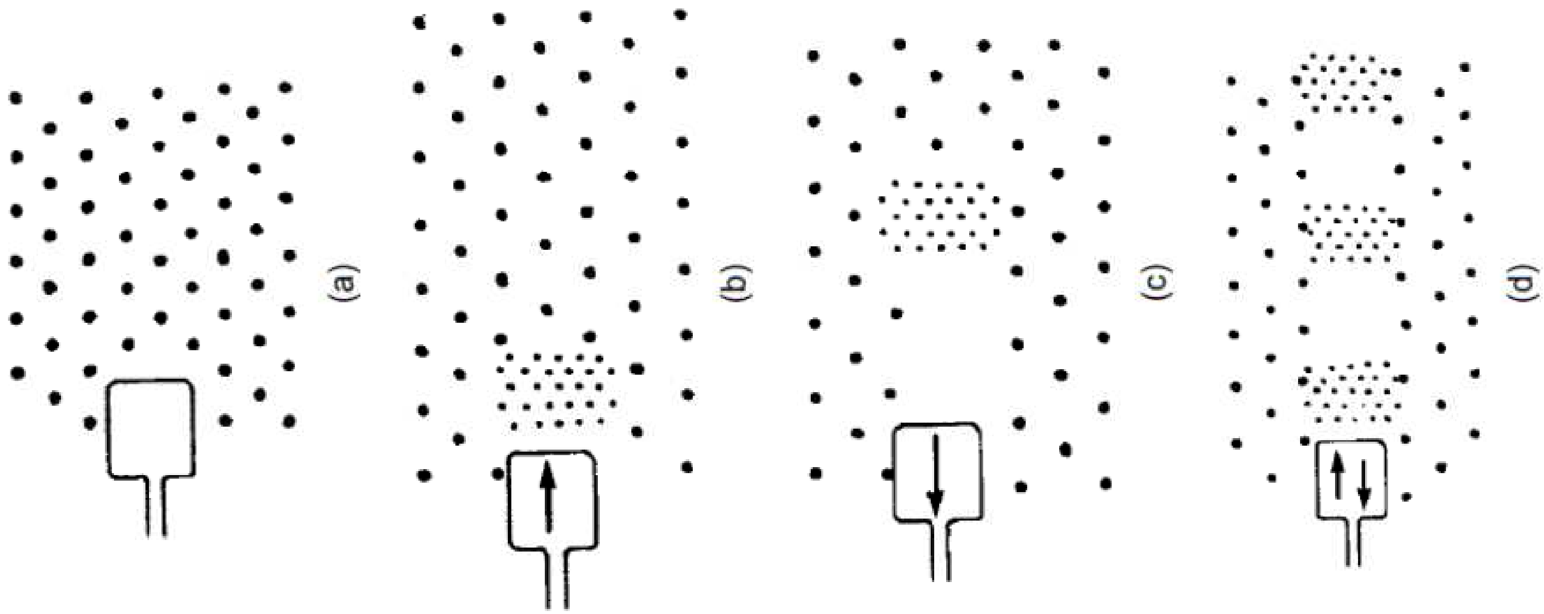
Zde je odpovídající souřadnicí poloměr kulové vlny r

Zvukové vlny

- Zvukové vlny představují střídavé zhušťování a zřeďování částic látkového prostředí, které lze popsat např. časovou změnou tlaku (příp. hustoty, objemu).

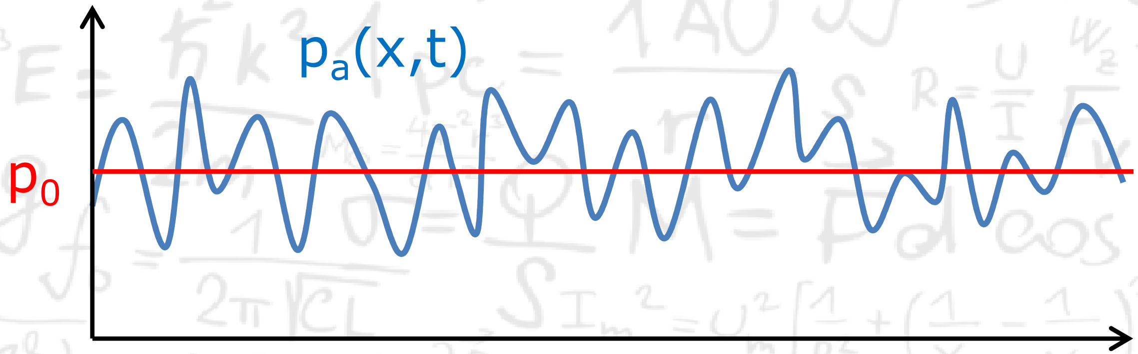
Zvukové vlny

- Píst (a) při pohybu vzhůru stlačuje vzduch (b) a posouvá jej dopředu. Při zpětném pohybu dolů zůstává na jeho místě zředění (c). Periodické opakování (d) vede ke vzniku postupující vlny zhuštění a zředění.



Zvukové vlny

- Tlak obsahuje dvě složky:
  - Atmosférický tlak (p_0~10^5 Pa): Je téměř nezávislý na čase. Mění se s nadmořskou výškou nebo při změně počasí.
  - Akustický tlak (p_a~10^{-5}-10^2 Pa): Představuje časově proměnnou složku, která popisuje zvukové vlny.



Rychlost šíření zvuku

- Z fyzikálního hlediska mohou mechanické kmity vznikat pouze v prostředích, která vykazují setrvačnost (přenos kinetické energie = šíření vlny prostorem) a pružnost – elasticitu (přenos potenciální energie = kmitání vlny).
- Obě vlastnosti prostředí určují rychlost šíření vlnění.

$$c = \sqrt{\frac{pružnost}{setrvačnost}}$$

Dále bude objasněno, co se tímto „vzorcem“ myslí – je to různé pro různé fáze látek

Rychlost šíření zvuku

- Setrvačnost prostředí je spjata s hmotností, tj. s délkovou (dráty, struny), plošnou (membrány, desky) nebo objemovou hustotou prostředí. Pružnost prostředí souvisí s možností vytvořit v něm působením nějaké síly napětí.
- Obecně platí, že čím silnější jsou vzájemné vazby mezi částicemi prostředí (tj. čím je prostředí pevnější a hustější), tím vyšší je v něm rychlost šíření (ultra)zvuku.

Rychlost šíření zvuku

- Hustota vody je až 1000x větší než vzduchu. Kdyby o rychlosti zvuku rozhodovala jen hustota, šířil by se zvuk ve vodě asi 30x pomaleji než ve vzduchu. Ve skutečnosti je ve vodě zvuk 4x rychlejší než ve vzduchu, proto by měl být modul pružnosti vody více než 10000x větší než vzduchu. Tak tomu skutečně je – voda je mnohem hůř stlačitelná než vzduch.

PROSTŘEDÍ	$\frac{v}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$	PROSTŘEDÍ	$\frac{v}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$	PROSTŘEDÍ	$\frac{v}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$
Plyny[a]		*Pevné látky*[a]		*Kapaliny*[a]	
Vzduch (0 °C)	331	Hliník	6 420	Voda (0 °C)	1 402
Vzduch (20 °C)	343	Ocel	5 941	Voda (20 °C)	1 482
Helium	965	Žula	6 000	Mořská voda[b]	1 522
Vodík	1 284				

[a] 0 °C a tlak 1 atm, pokud neuvedeno jinak.
[b] Při 20 °C a salinitě 3,5 %.

Šíření zvuku v plynech

- Při rychlém zhušťování a zřeďování vzduchu nedochází k výměně tepelné energie s okolními vrstvami vzduchu. Akustické stlačování vzduchu je tedy adiabatický děj popsaný stavovou rovnicí:

$$pV^{\kappa} = konst. \rightarrow p\left(\frac{m}{\rho}\right)^{\kappa} = p_0\left(\frac{m}{\rho_0}\right)^{\kappa} \rightarrow p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa}$$

- κ je Poissonova konstanta, která má pro běžné plyny hodnotu $\kappa \approx 7/5 \approx 1{,}4$.

Šíření zvuku v plynech

- Pro rychlost zvuku v plynech potom platí:

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}}$$

- Protože platí také $pV = nRT \quad \rightarrow \quad p = \frac{RT}{M}\rho$, dostáváme pro rychlost zvuku:

$$c = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}}$$

Šíření zvuku v plynech

- Rychlost zvuku v plynech je závislá hlavně na molární hmotnosti plynu a termodynamické teplotě.
- Při teplotě 0 °C je rychlost zvuku ve vzduchu asi 330 m/s; při teplotě 30 °C asi 350 m/s.
- V lehkých plynech je pak rychlost zvuku vyšší než ve vzduchu (např. H 1300 m/s, He 1000 m/s). Protože je $f = c/\lambda$ má každý tón v héliu skoro 3x vyšší frekvenci než ve vzduchu.

Jak rozumět správně poslední větě?

Šíření zvuku v kapalinách

- Parametr, který popisuje pružnost kapalin je objemový modul pružnosti:

$$K = -V\frac{dp}{dV}$$

- Vzhledem k malé stlačitelnosti kapalin platí: $V \approx V_0(1 - p/K)$. Pro hustotu $\rho = m/V$ platí podobně: $\rho \approx \rho_0(1 - p/K)$.

Šíření zvuku v kapalinách

- Potom:

$$\frac{d\rho}{dp} \approx \frac{\rho_0}{K} \approx \frac{\rho}{K}$$

- Nakonec vychází:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

- Pro vodu je K~2x10^9 Pa, a proto c~1500 m/s.

Šíření zvuku v pevných látkách

- Parametr, který popisuje délkovou deformaci pevné látky je podle Hookeova zákona Youngův modul pružnosti:

$$F = E\varepsilon = E\frac{du}{dx}$$

- Dosazením za F v pohybové rovnici a po srovnání s vlnovou rovnicí dostáváme:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Šíření zvuku v pevných látkách

- V pevných látkách se mohou šířit podélné i příčné vlny. Jejich rychlosti jsou odlišné:

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E^*}{\rho}}$$

- G je modul pružnosti ve smyku a E* je modul pružnosti v tahu bez příčného zkrácení materiálu.
- Rychlost podélných vln je vždy větší než příčných vln. Pro obvyklé materiály platí:

$$c \sim 2c$$

Konec 1. přednášky