Radiologická fyzika a radiobiologie

11. přednáška

Časová střední hodnota

- Z různých důvodů není zajímavá a mnohdy ani dobře měřitelná okamžitá hodnota fyzikální veličiny $F(t)$, ale její střední hodnota za dobu T, tj.

$$\langle F \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$$

Časová střední hodnota

- Tato doba bývá někdy velmi dlouhá (čekáme, až se nějaký jev ustálí a nezajímá nás přechodový jev). Pro veličinu s periodou $\omega=2\pi f$ je touto dobou perioda $T=1/f$

$$F\left(t+\frac{1}{f}\right)=F(t), \qquad \langle F\rangle = f\int_0^{1/f} F(t)ft$$

Časová střední hodnota

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\,dx &= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.
\end{aligned}$$

Akustická energie

- Dochází k přelévání energie mezi kinetickou a potenciální složkou. Platí zákon zachování energie.
- **Kinetická energie:**

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\boxed{\Delta m}\,\boxed{v_a^2} = \frac{1}{2}\boxed{\rho S \Delta x}\,\boxed{(\omega u_m)^2}$$

$$v_a = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega u_m \cos(kx - \omega t) \rightarrow \boxed{v_{am} = \omega u_m}$$

v_a akustická rychlost (rychlost výchylky částice)

u_m amplituda výchylky částice

Akustická energie

- **Potenciální energie** je rovna práci potřebné ke změně objemu elementu vzduchu:

$$\Delta E_p = -\int_0^{\varepsilon} \boxed{pS} \cdot \boxed{\Delta x d\varepsilon} = -S\Delta x \int_0^{\varepsilon} (p_0 + p_a) d\varepsilon$$

Síla F

$\Delta u = \Delta x \varepsilon$; ε ... deformace

- Vzhledem ke stavové rovnici a rovnici kontinuity je $p_a = c^2 \rho_a = -\rho_0 c^2 \varepsilon$, dostáváme:

viz odvození vlnové rovnice: $c^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0$ a $\rho_a \approx -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\Delta E_p = -S\Delta x \int_0^{\varepsilon} (p_0 - \rho_0 c^2 \varepsilon) d\varepsilon = S\Delta x \left(-p_0 \varepsilon + \frac{1}{2} \rho_0 c^2 \varepsilon^2\right)$$

Akustická energie

- Definujeme objemovou hustotu akustické energie:

Za předpokladu: $v_a = \mp c\varepsilon;\ \ \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ ... deformace

$$w_a = \frac{\Delta E_k + \Delta E_p}{\Delta V} = \frac{p_0 p_a}{Zc} + \frac{1}{2}\rho_0\left(v_a^2 + \frac{p_a^2}{Z^2}\right)$$

- Protože pro postupnou vlnu platí $\boxed{p_a = \pm Z v_a}$, dostáváme:

Ohmův zákon akustiky

$$w_a = \frac{p_0 p_a}{Zc} + \rho_0 v_a^2$$

- Bez odvození

Akustická energie

- První člen osciluje a má nulovou střední hodnotu $\langle p_a \rangle = 0$, proto je střední hodnota akustické energie rovna:

$$\langle w_a \rangle = \rho_0 \langle v_a^2 \rangle$$

- Výkon vlny:

$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v_a^2$ $\Delta x = c\Delta t$

$$\bar{P} = \frac{\boxed{\Delta E}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho S c (\omega u_m)^2$$

ρc=Z … akustická impedance

Akustická impedance

$$Z = \rho c \qquad p_a = \pm Z v_a$$

- Jednotkou akustické impedance je rayleigh: 1 Rayl = 1 kg.m^{-2}s^{-1}.

prostředí	$10^3 \rho$ [kg m^{-3}]	c [m s^{-1}]	10^6 [Rayl]
vzduch	0,0012	330	0,0004
voda	1	1430	1,43
měkká tkáň	1,1	1540	1,69
játra	1,05	1570	1,65
tuk	0,95	1450	1,38
kost	1,91	4080	7,8

Akustická intenzita

- Důležitější než energie je výkon a intenzita akustické vlny. **Akustický výkon** je definován jako množství akustické energie, která projde jednotkou plochy za jednotku času. **Akustická intenzita** je definována jako výkon vlny vztažený na jednotkovou plochu kolmou na směr šíření vlny:

$$I_a = \frac{P}{S_\perp} = \frac{P}{S\cos\theta} = \frac{1}{2}\underbrace{\boxed{\rho c}}_{Z}\overbrace{\boxed{(\omega u_m)^2}}^{v_a^2}$$

- Úhel θ je úhel mezi směrem šíření vlny a normálou plochy.

Akustická intenzita

- Výkon vlny je součin tlakové síly a akustické rychlosti:

$$P = pSv_a = (p_0 + p_a)Sv_a$$

$$v_a = \frac{\partial u}{\partial t}$$

- Dostáváme:

$$I_a = \frac{P}{S} = p_0 v_a + p_a v_a$$

Akustická intenzita

- Protože pro postupnou vlnu platí $p_a = \pm Z v_a$, dostáváme:

$$I_a = p_0 v_a \pm Z v_a^2 = p_0 v_a \pm \frac{p_a^2}{Z}$$

- Příspěvek prvního členu k průměrné intenzitě je prakticky nulový, protože akustická rychlost osciluje okolo nuly. Zůstává pouze druhý člen:

$$\langle I_a \rangle = \langle p_a v_a \rangle = \pm \langle Z v_a^2 \rangle = \pm \frac{\langle p_a^2 \rangle}{Z}$$

Akustická intenzita

- Speciálně pro harmonickou vlnu $u = A\cos(\omega t - kx)$ vychází:

$$\langle w_a \rangle = \frac{1}{2}\rho_0 v_{max}^2 \qquad \langle I_a \rangle = \frac{1}{2} Z v_{max}^2 = \frac{p_{max}^2}{2Z}$$

kde $v_{max} = \omega A$ a $p_{max} = Z v_{max} = \omega A Z.$

- Pokud zavedeme efektivní veličiny

$$p_{ef} = \frac{p_{max}}{\sqrt{2}} \qquad v_{ef} = \frac{v_{max}}{\sqrt{2}}$$

- Dostáváme $p_{ef} = Z v_{ef}$ a tedy:

$$\langle w_a \rangle = \rho_0 v^2 \ldots \qquad \langle I_a \rangle = \frac{p_{ef}^2}{\ldots}$$

Odraz a průchod zvuku rozhraním

- Vlna se na rozhraní dvou prostředí částečně odráží a částečně prochází do druhého prostředí.
- Musí platit zákon zachování energie.
- Zjednodušeně (v – akustická rychlost dopadající vlny, v_R – odražené vlny, v_T – prošlé vlny):

$$v_1 = v\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + v_R\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$$

$$v_2 = v_T\left(t - \frac{x}{c_2}\right)$$

Odraz a průchod zvuku rozhraním

- K řešení je nutné splnit podmínky spojitosti na rozhraní. Na obou stranách rozhraní musí být stejná akustická rychlost vlny a stejný tlak: $v_1 = v_2$ a $p_1 = p_2$ (plyne z rovnice kontinuity a pohybové rovnice):

$$v(t) + v_R(t) = v_T(t)$$

$$\underset{p}{\boxed{Z_1 v(t)}} - \underset{p_R}{\boxed{Z_1 v_R(t)}} = \underset{p_T}{\boxed{Z_2 v_T(t)}}$$

Odraz a průchod zvuku rozhraním

- Z předchozích rovnic snadno dostaneme:

$$v_R(t) = \boxed{r}\,v(t) \qquad v_T(t) = \boxed{t}\,v(t)$$

$$\boxed{r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}} \qquad \boxed{t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}}$$

- Koeficienty odrazivosti a propustnosti. Platí:

$$-1 \leq r \leq 1 \text{ a } 0 \leq t \leq 2$$

Odraz a průchod zvuku rozhraním

- Při odrazu zvuku na rozhraní látky s vyšší akustickou impedancí dochází ke změně polarity (fáze) vlny. Při odrazu na rozhraní látky s menší akustickou impedancí se fáze ani polarita odražené vlny nemění.
- Např. pro rozhraní vzduch/voda je r~-0,9995 a t~0,0005.

Odrazivost a průchodnost

- **Propustnost** (platí $v_T = tv$):

$$T = \frac{I_T}{I} = \frac{Z_2 v_T^2}{Z_1 v^2} = \frac{Z_2}{Z_1} t^2 = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

- **Odrazivost** (platí $v_R = rv$):

$$R = \frac{I_R}{I} = \frac{Z_1 v_R^2}{Z_1 v^2} = r^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$$

Odrazivost a průchodnost

- Platí $0 \leq R \leq 1$ a $0 \leq T \leq 1$ a také zákon zachování energie:

$$I_R + I_T = I \quad \rightarrow \quad R + T = 1$$

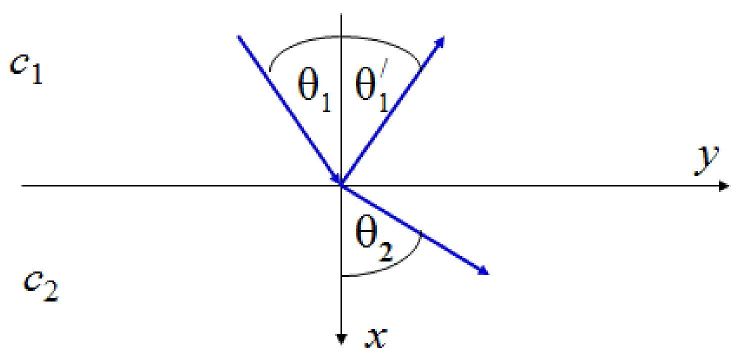
- Jsou-li akustické impedance příliš odlišné, většina energie se odrazí. Jsou-li podobné, většina energie prochází.

Odrazivost a průchodnost

- Při šikmém dopadu na rozhraní platí zákony odrazu a lomu:

$$\alpha_1 = \alpha'_1 \quad \text{a} \quad \frac{\sin\alpha_1}{c_1} = \frac{\sin\alpha_2}{c_2}$$

- Podle těchto zákonů je možné zvuk fokusovat do jediného bodu podobně jako světlo.



Intenzita a hlasitost zvuku

- Intenzita vlny je dána její amplitudou. Vztah mezi amplitudou akustického tlaku a amplitudou rychlosti vlny je dán Ohmovým zákonem. Pro efektivní hodnoty platí:

$$p_{ef} = Zv_{ef} = \rho c v_{ef}$$

  – Hustota akustické energie: $w_a = \rho v_{ef}^2$ [J/m³]

  – Akustická intenzita: $I_a = Zv_{ef}^2 = \frac{p_{ef}^2}{Z} = w_a c$ [W/m²]

  (Pro běžné zvuky platí: $I_a \approx 10^{-12} - 10^2\ W/m^2$)

Intenzita a hlasitost zvuku

- Akustický výkon prošlý plochou S skloněnou o úhel θ vůči směru akustické vlny:

$$P = I_a S \cos\theta$$

- Celkový výkon je integrací přes plochu:

$$P = \oint I_a dS$$

- Pro kulovou plochu okolo bodového zářiče:

$$I_a = \frac{P}{4\pi r^2}$$

- Intenzita klesá se druhou mocninou vzdálenosti od zdroje

Hladina akustické intenzity

- Interval hodnot akustické intenzity je velmi široký, proto je pro její popis vhodné použít logaritmické měřítko. Lidské smysly reagují na podněty také logaritmicky. Tato zákonitost se označuje jako **Weber-Fechnerův zákon**.
- Psychofyziologickou mírou intenzity zvuku je hlasitost. Nejbližší veličinou k ní je **hladina akustické intenzity**.

Hladina akustické intenzity

- **Hladina akustické intenzity** se definuje:

$$L_a = 10 \log \frac{I_a}{I_0} \quad I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$$

- I_0 je prahová intenzita slyšení lidského ucha při 1 kHz. Odpovídající prahová hodnota akustického tlaku je $p_a = \sqrt{\rho c I_0} \approx 2 \cdot 10^{-5}$ Pa.

- Rozsah slyšení je 10^{-12} až 10^{2} W/m², tj. 0 až 140 dB. Lidského ucho dokáže rozlišit rozdíl hladiny asi 1 dB. V oblasti středních intenzit je ucho ještě citlivější. Celkově dokážeme rozpoznat až 325 stupňů intenzity zvuku.

Hladina akustické intenzity

- Zatímco akustická intenzita je objektivní hodnota, hlasitost je hodnota subjektivní. Zavádíme hladinu hlasitosti zvuku při dané frekvenci. Jednotkou je fón Ph:

$$L(f) = L_a\,(f = 1\,kHz)$$

- Hladina intenzity a hladina hlasitosti mají stejné hodnoty pro frekvenci f=1 kHz.
- Křivky stejné hlasitosti (L=konst.) označujeme jako izofóny.

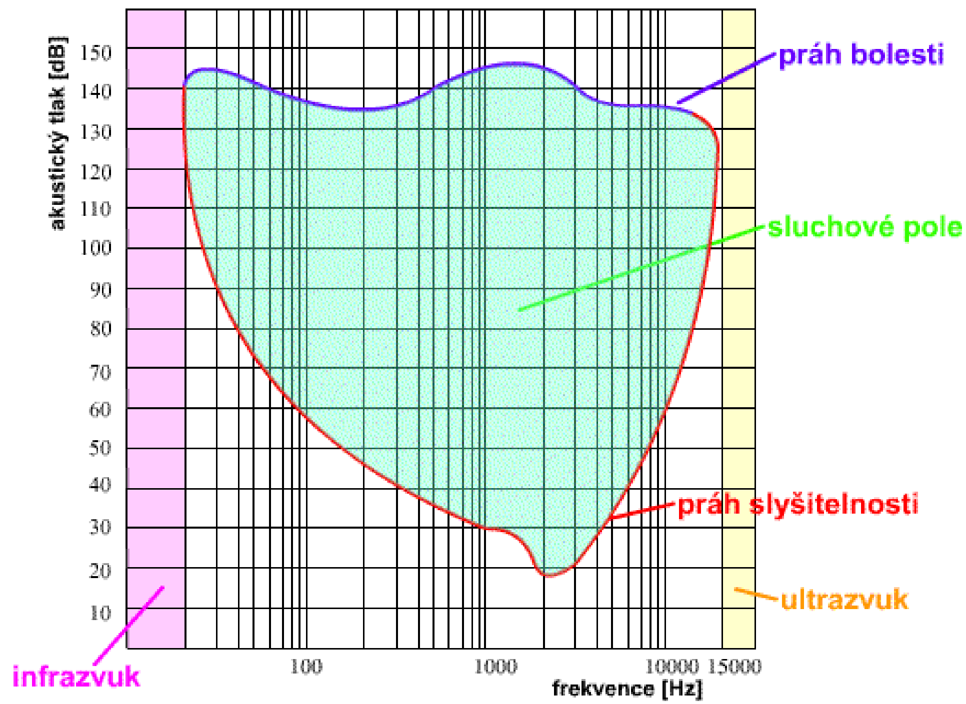
Hladina akustické intenzity

- Jednotka hlasitosti (N) son je definována jako hlasitost hladiny zvuku 40 Ph.
- Platí, že zvuk silnější o 10 Ph je 2x hlasitější:

$$N = 2^{(L-40)/10}$$

Citlivost lidského ucha

- **Sluchové pole** – je rozsah intenzit zvuků při různých frekvencích, které vnímá sluchem daná osoba. Zdola je sluchové pole omezeno prahem slyšení a shora prahem bolesti.



Absorpce

- Zvukové vlnění je při šíření prostředím částečně absorbováno. Pro pokles intenzity můžeme psát exponenciální zákon – pokles intenzity je úměrný dráze, kterou paprsek vlnění prochází

$$dI(x) = -\mu dx \quad \rightarrow \quad I(x) = I_0 e^{-\mu x}$$

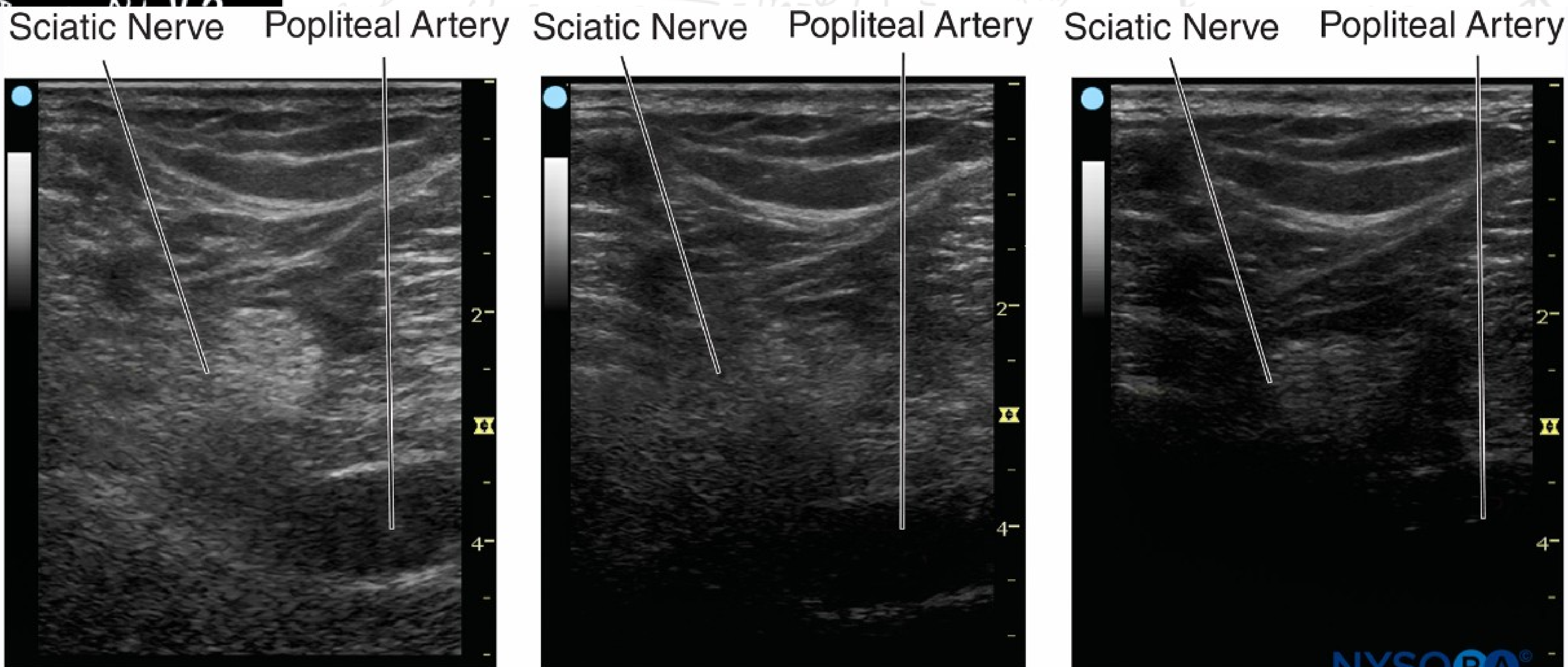
x je tloušťka prostředí, μ je koeficient absorpce

- Koeficient absorpce je úměrný frekvenci vlnění: $\mu \sim f^2$.
- Příčinou absorpce je přeměna energie

Absorpce

- U zvuku je obvyklé charakterizovat útlum nikoliv lineárním koeficientem útlumu s rozměrem [m^{-1}], ale koeficientem s rozměrem [dB.m^{-1}]. Logaritmováním zákona absorpce dostáváme:

Absorpce

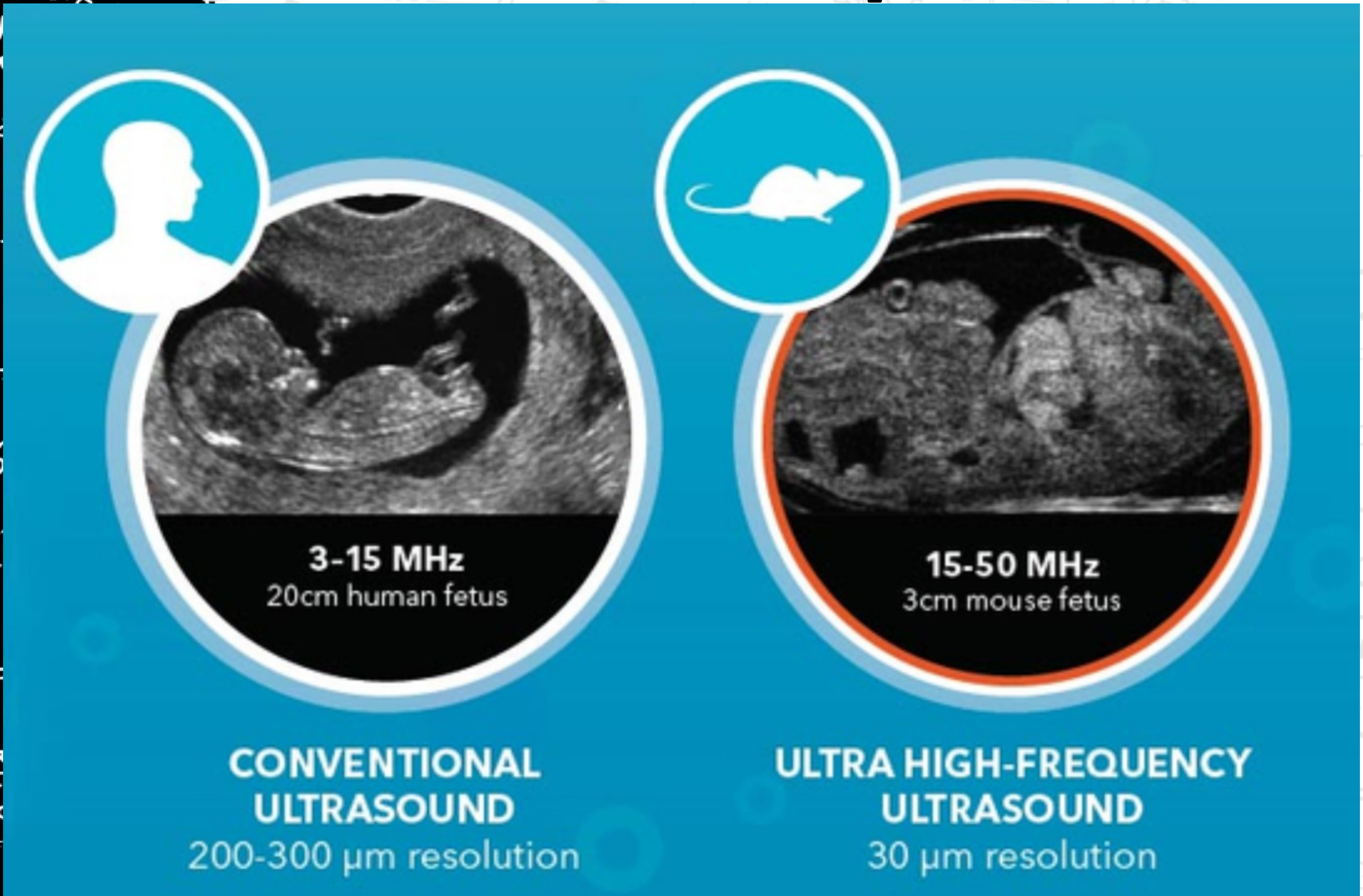


8 HMz

10 HMz

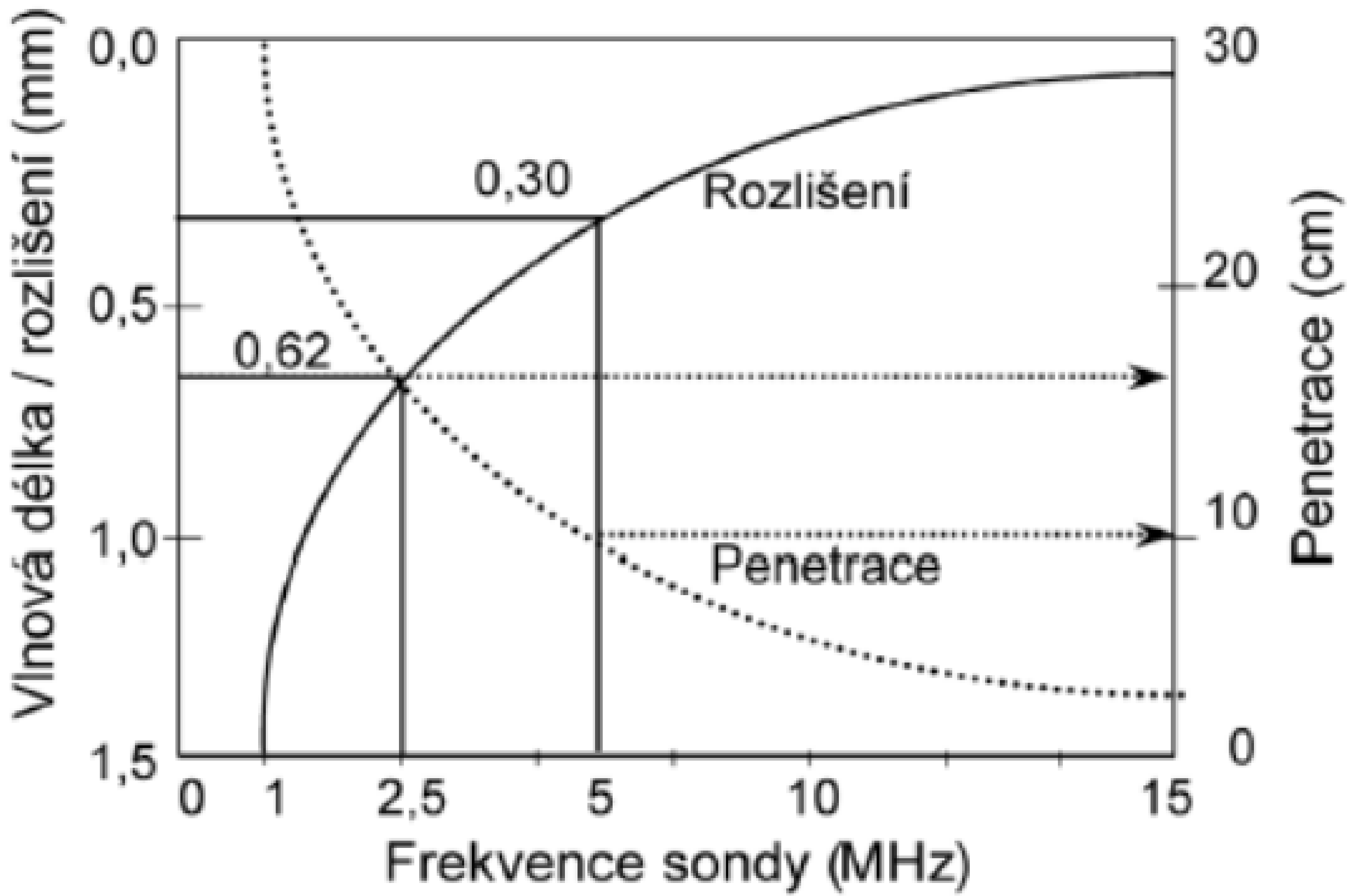
12 MHz

Absorpce



3-15 MHz
20cm human fetus
15-50 MHz
3cm mouse fetus
CONVENTIONAL ULTRASOUND
200-300 µm resolution
ULTRA HIGH-FREQUENCY ULTRASOUND
30 µm resolution

Absorpce



Vlnová délka / rozlišení (mm)
0,0
0,5
1,0
1,5
0,30
0,62
Rozlišení
Penetrace
30
20
10
0
Penetrace (cm)
0
1
2,5
5
10
15
Frekvence sondy (MHz)

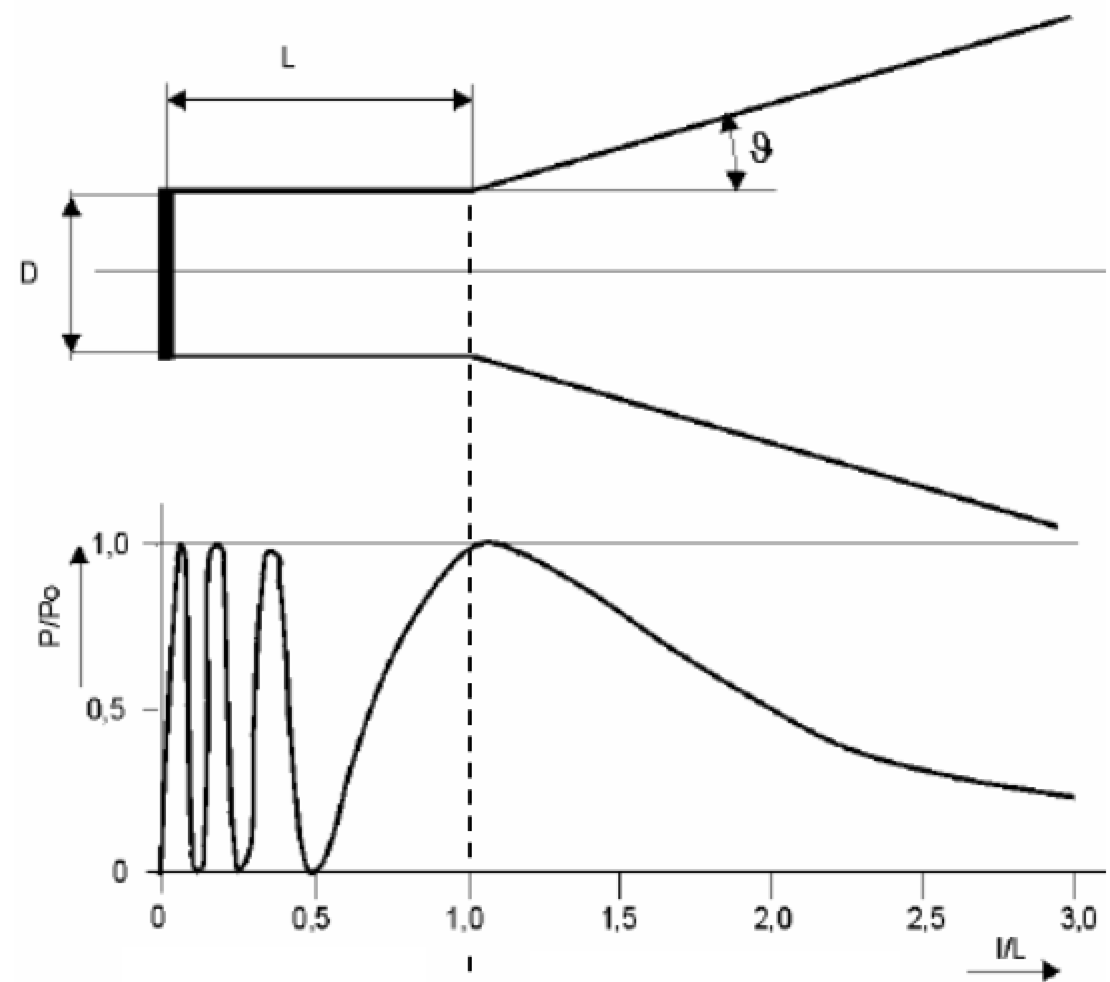
Ultrazvuk

- Ultrazvuk je zvukové vlnění s frekvencí vyšší jak 15 kHz. Tato hranice je dána hranicí slyšitelnosti zvuku u průměrného lidského ucha. Pro ultrazvukovou diagnostiku v medicíně (velmi rozšířená je také ultrazvuková diagnostika v různých inženýrských aplikacích) se používají frekvence řádu jednotek až desítek MHz.

Ultrazvuk

- Ultrazvuk se šíří spíše jako světlo než zvuk. Platí zákony odrazu, lomu a možnost fokusace. Odlišné vlastnosti souvisí s krátkou vlnovou délkou.
- Zvukové vlny o frekvenci >10^{13} Hz se již běžnými látkami nešíří, protože vlnová délka takové vlny je již menší než vzdálenost atomů.

Ultrazvukové pole



Blízké pole
(Fresnelova oblast)

Vzdálené pole
(Fraunhoferova oblast)

Ultrazvukové pole

- **Blízké pole (Fresnelova oblast)**: Vyznačuje se vznikem minim a maxim akustického tlaku. V celém blízkém poli jsou proto typické složité amplitudové i fázové poměry. Příčný řez blízkého pole má přibližně stejný tvar jako je tvar zdroje kmitů, tzn. že v něm nedochází k rozbíhání ultrazvukového svazku.
- Délka blízkého pole:

$$l_0 = \frac{D^2 - \lambda^2}{4\lambda} \doteq \frac{D^2}{4\lambda}$$

Ultrazvukové pole

- **Vzdálené pole (Fraunhoferova oblast):** Vyznačuje se rovnoměrným poklesem akustického tlaku na ose se vzdáleností od zdroje ultrazvuku, bez minim a maxim akustického tlaku. Typická je také rozbíhavost ultrazvukového svazku.

Absorpce ultrazvuku

- Ve vzduchu je ultrazvuk silně absorbován (pro 1 MHz se intenzita UZ zeslabí na polovinu průchodem 22 mm vrstvy vzduchu, ve vodě je to 10 m).
- Útlum UZ je dán koeficientem absorpce $\kappa \approx af^2$, kde a je součinitel absorpce charakteristický pro danou látku.
- Důležitá je závislost útlumu na druhé mocnině frekvence.

Absorpce ultrazvuku

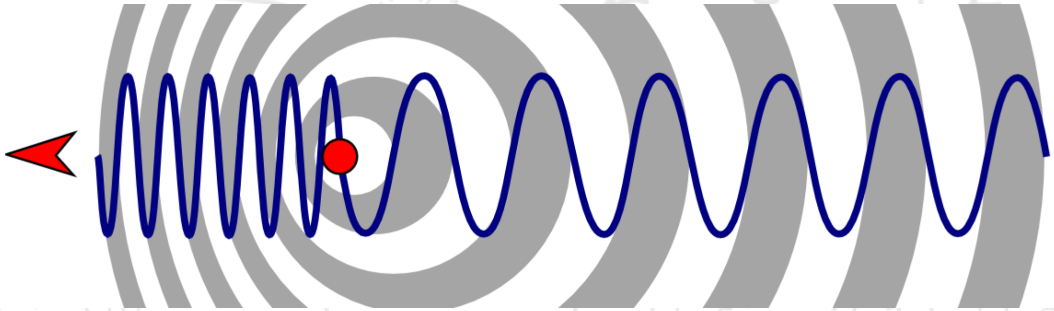
prostředí	μ [dB cm^{-1}] pro f=1 Mhz
vzduch	1,61
voda	0,0025
měkká tkáň	0,5 – 1,0
játra	1,1
tuk	0,6
kost	10,0

Dopplerův jev

- Pohybuje-li se zdroj nebo přijímač zvuku, dochází ke změně přijímačem vnímané výšky tónu (frekvence) oproti stavu, kdy byli zdroj i přijímač v klidu.
- Objeven Ch. Dopplerem v r. 1842. Platí pro všechny druhy vlnění (světlo, zvuk, rádiové vlny, aj.).

Dopplerův jev

- Ve směru pohybu dochází ke zhušťování vlnoploch
  - doba mezi jednotlivými vlnoplochami se zkracuje
  - zvyšuje se frekvence
- Proti směru pohybu dochází ke zřeďování vlnoploch
  - doba mezi vlnoplochami se prodlužuje
  - snižuje se frekvence



Dopplerův jev

- Obecný zápis

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v \mp v_Z}$$

f … frekvence vlnění vytvořeného zdrojem

f‘ … detekovaná frekvence

v … rychlost šíření vlnění prostředím

v_D … rychlost pohybu detektoru

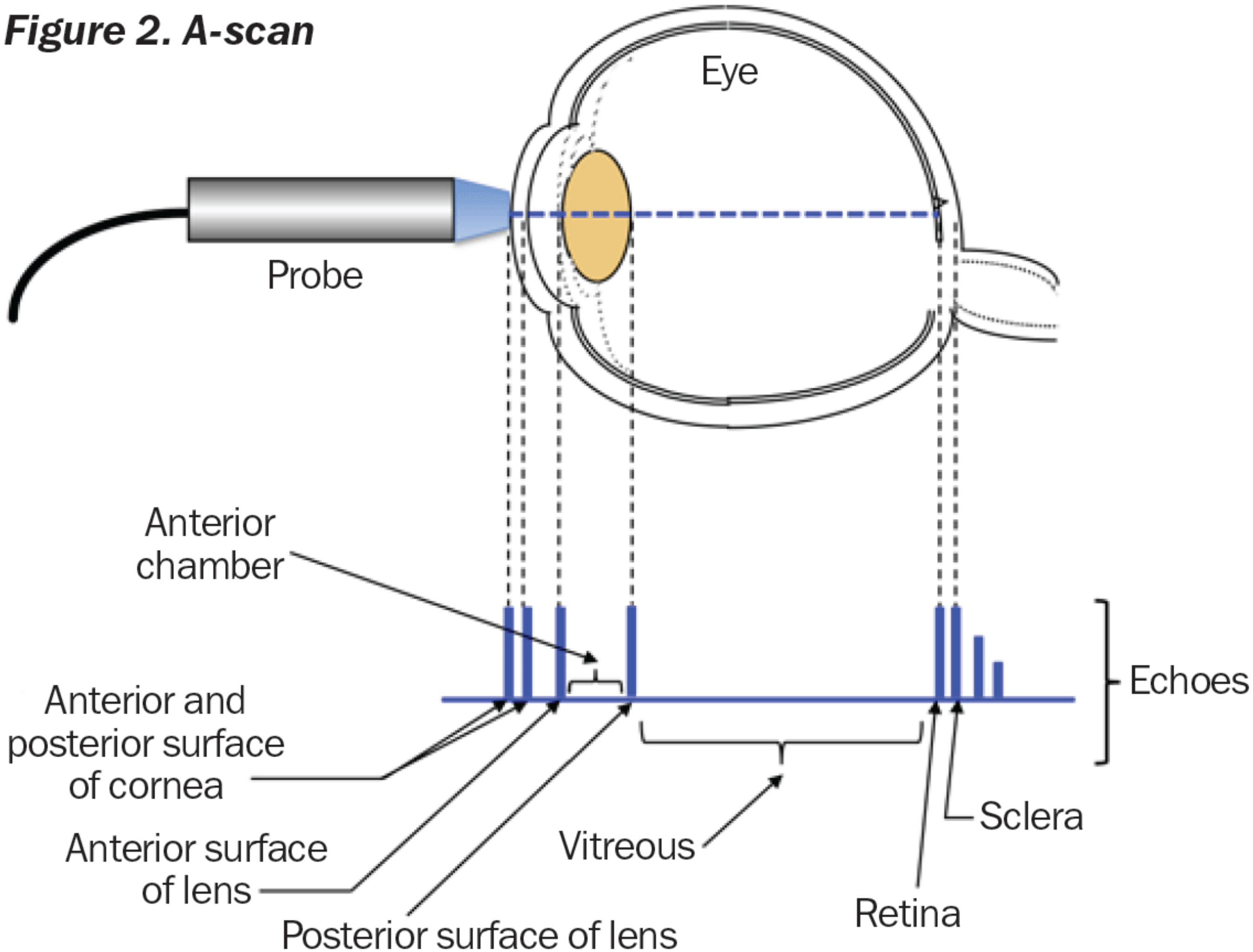
v_Z … rychlost pohybu zdroje

- Znaménka v rovnici se určují podle pravidla:

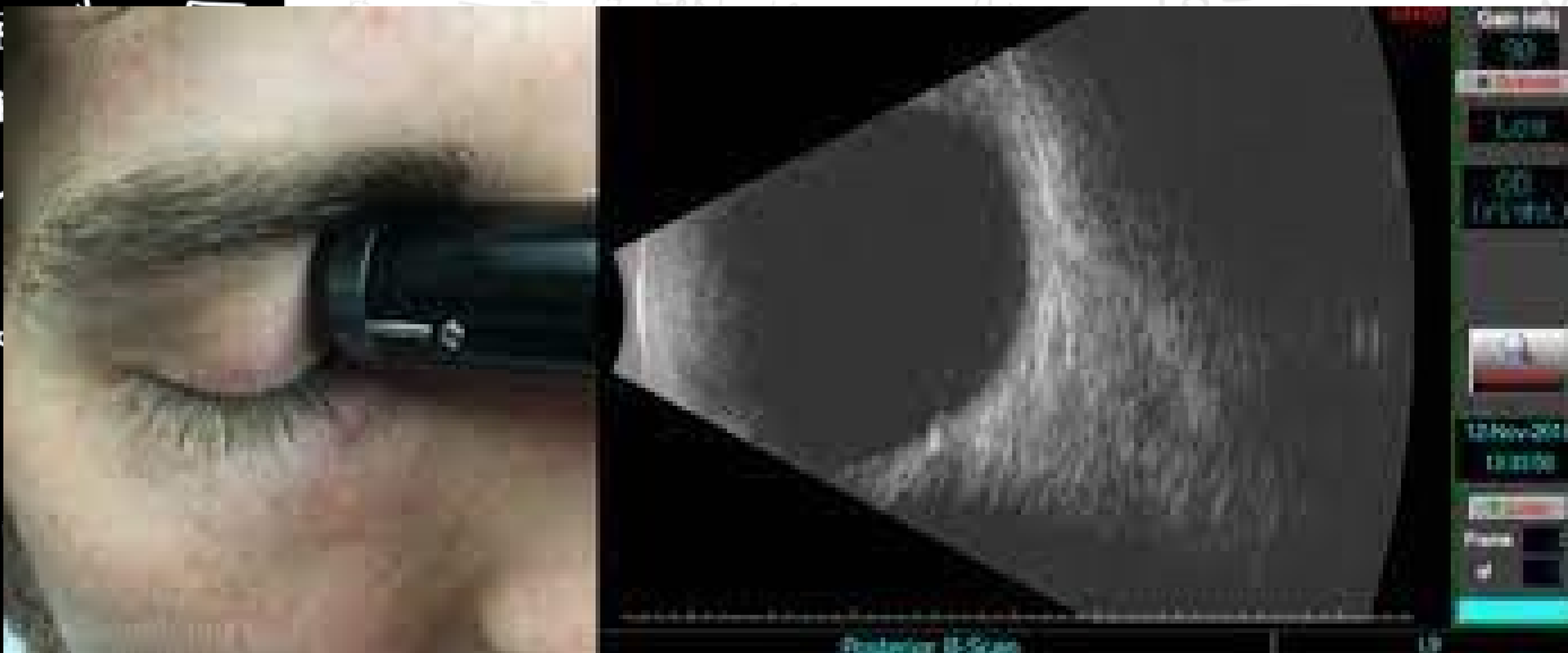
Pohyb směrem k sobě = vyšší detekovaná frekvence

A mód

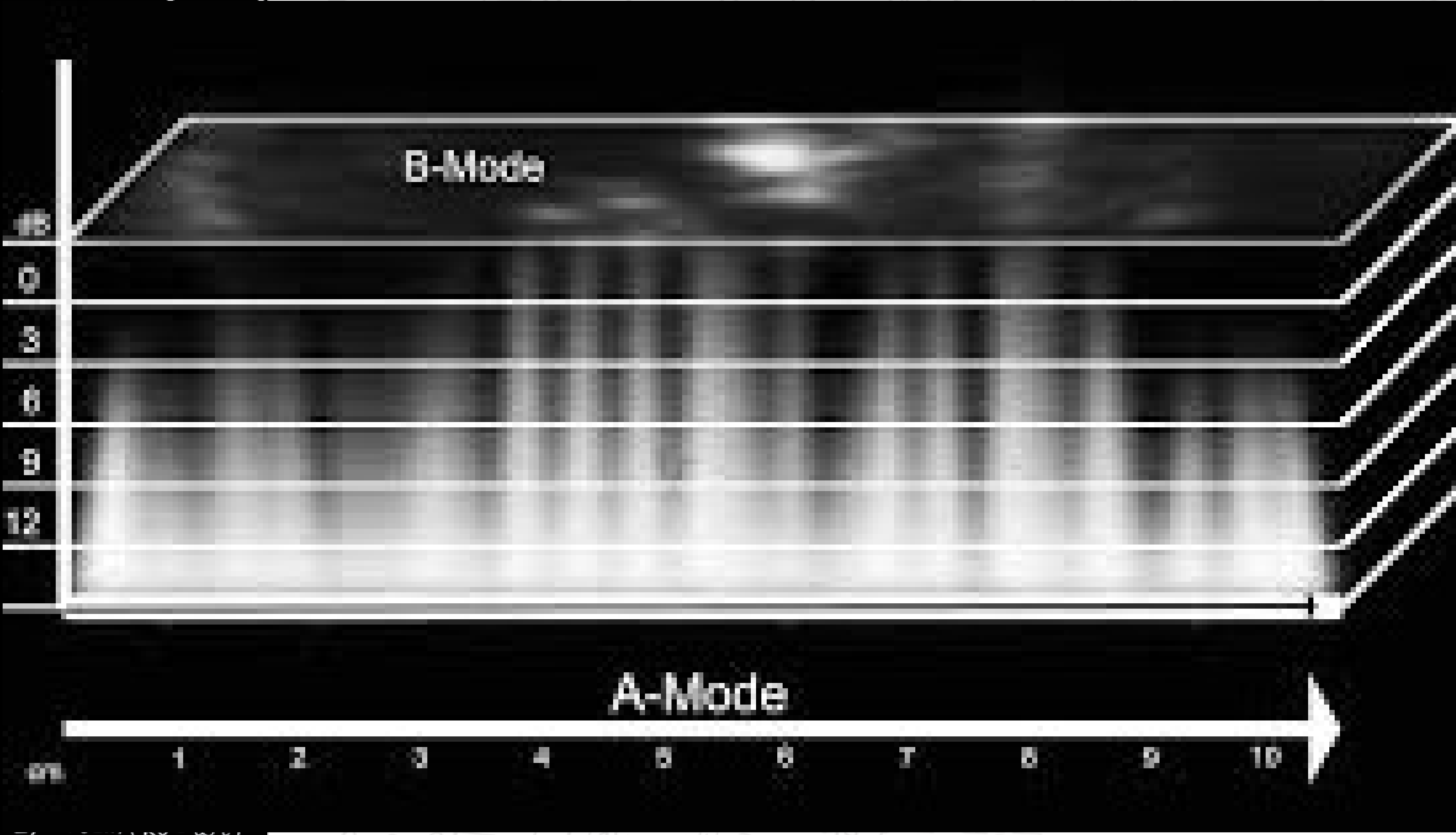
Figure 2. A-scan



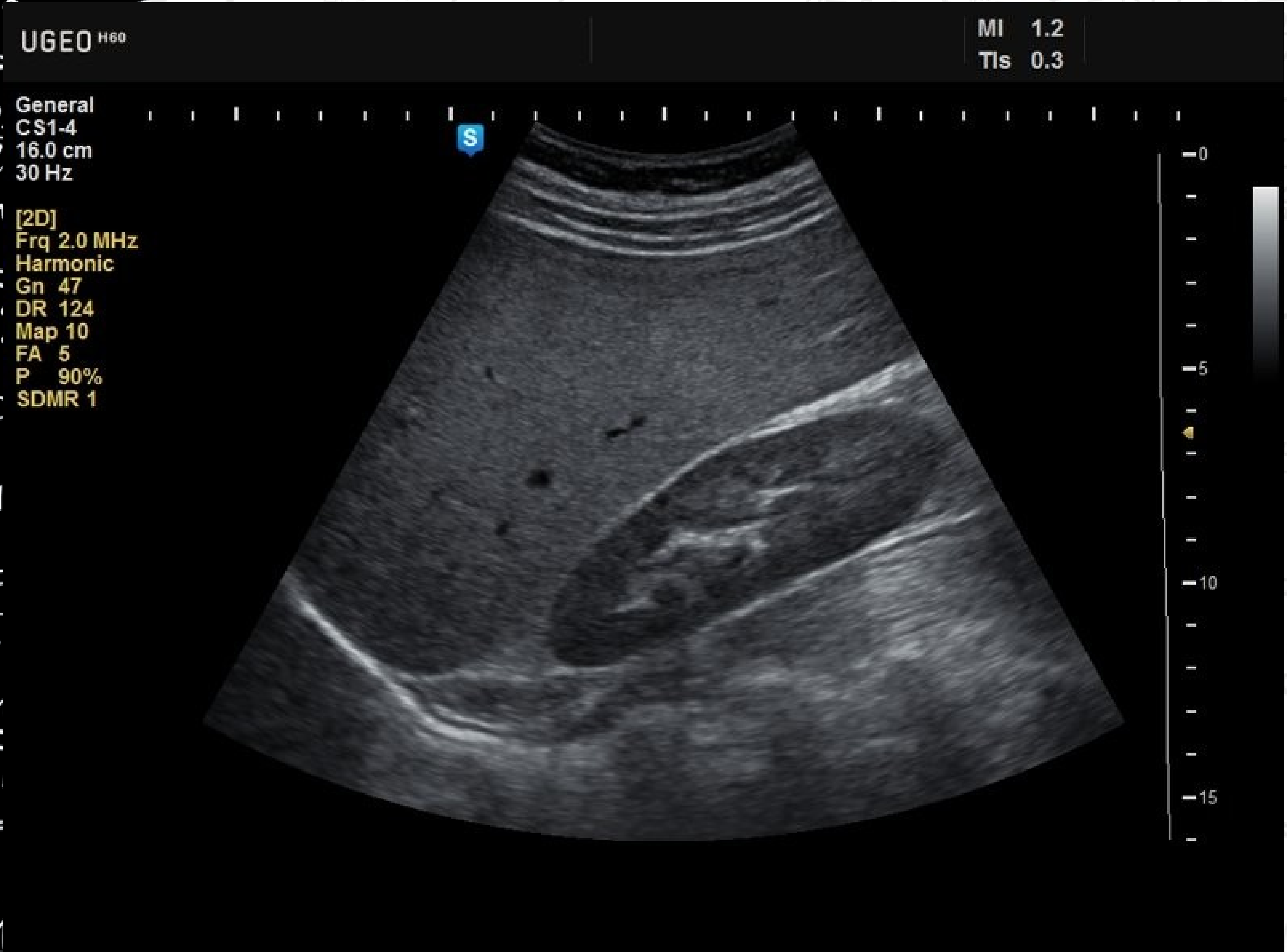
A mód



B mód

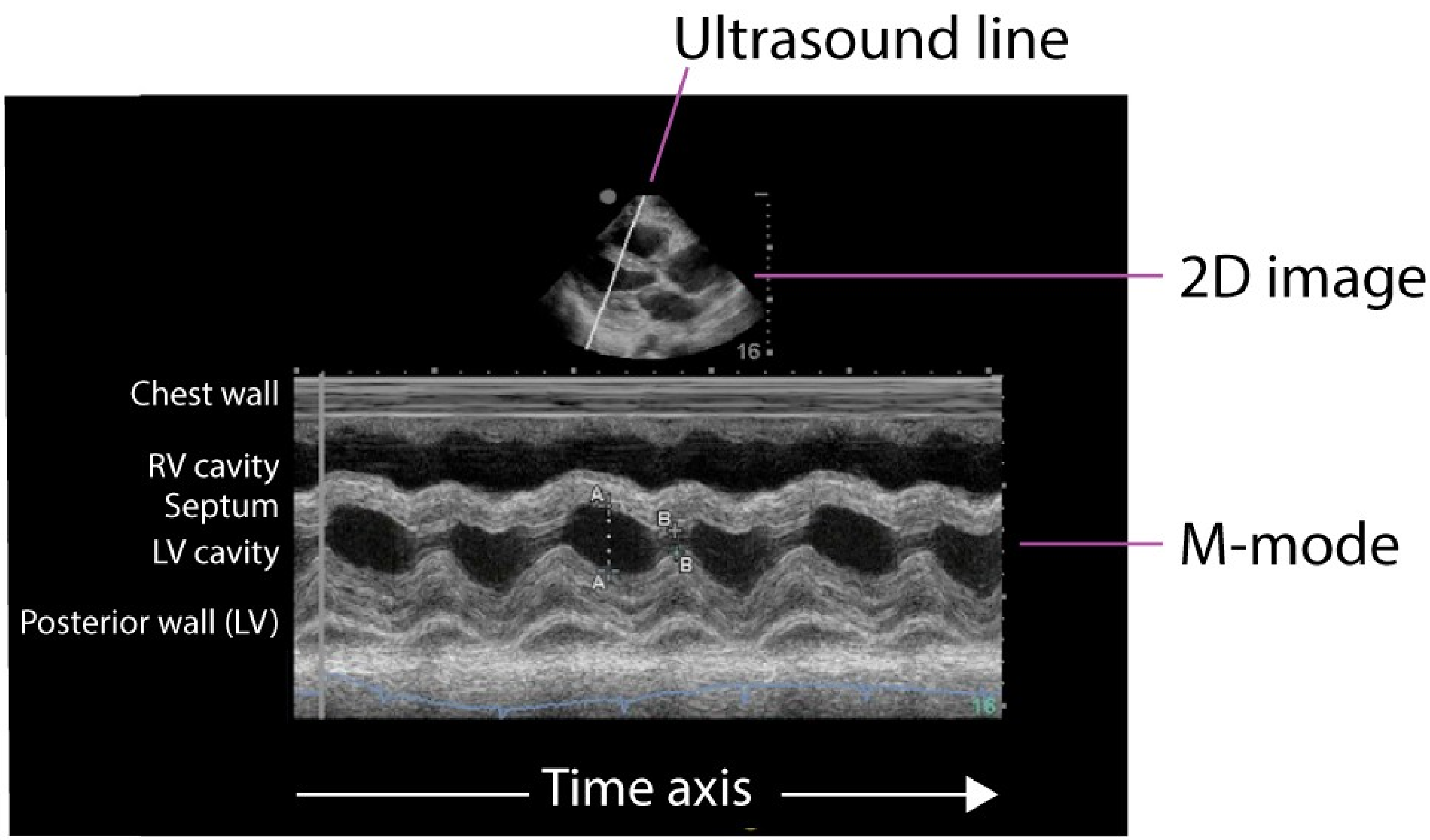


B mód

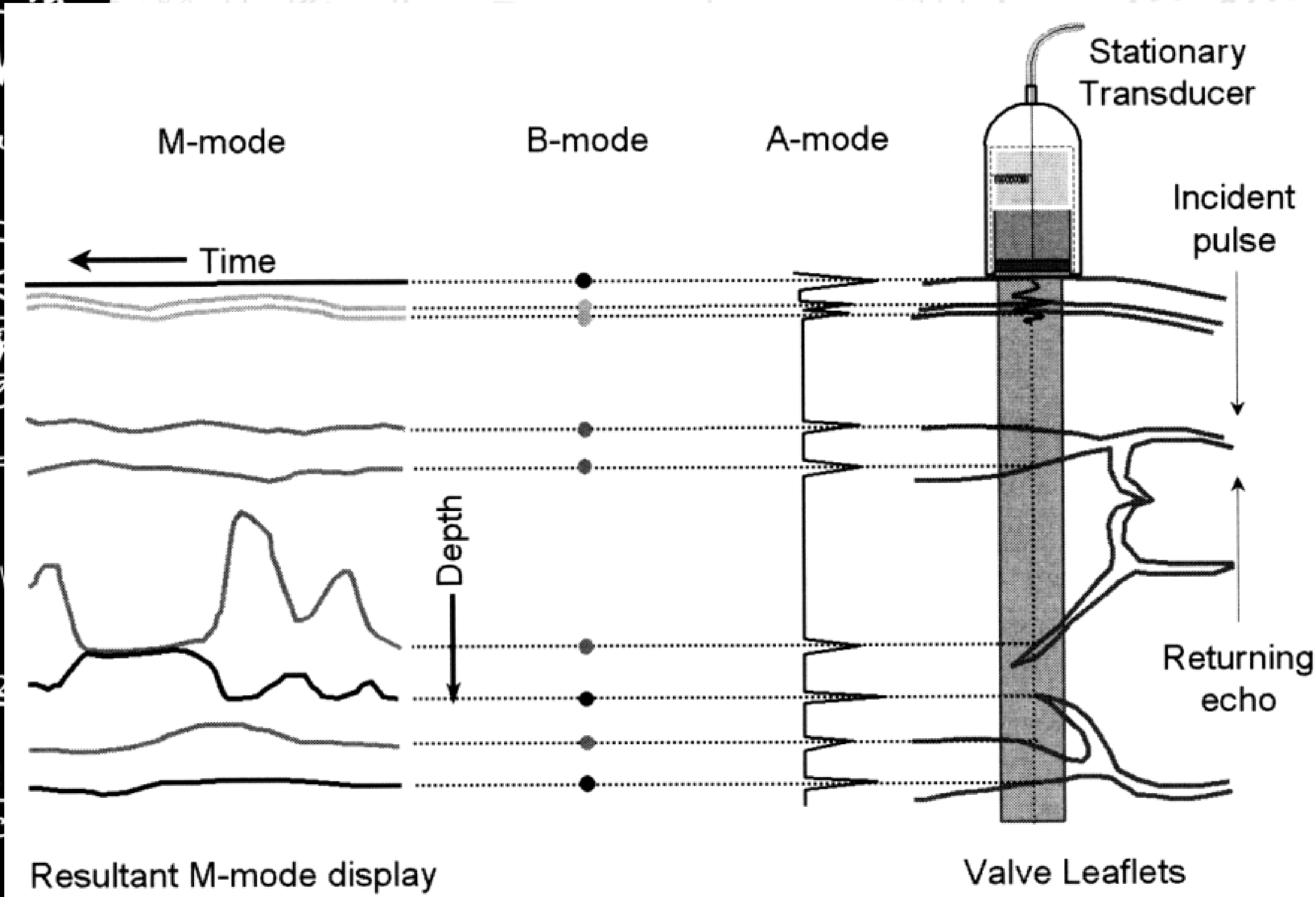

UGEO H60
MI 1.2
TIs 0.3
General
CS1-4
16.0 cm
30 Hz
[2D]
Frq 2.0 MHz
Harmonic
Gn 47
DR 124
Map 10
FA 5
P 90%
SDMR 1
S
0
5
10
15

M mód

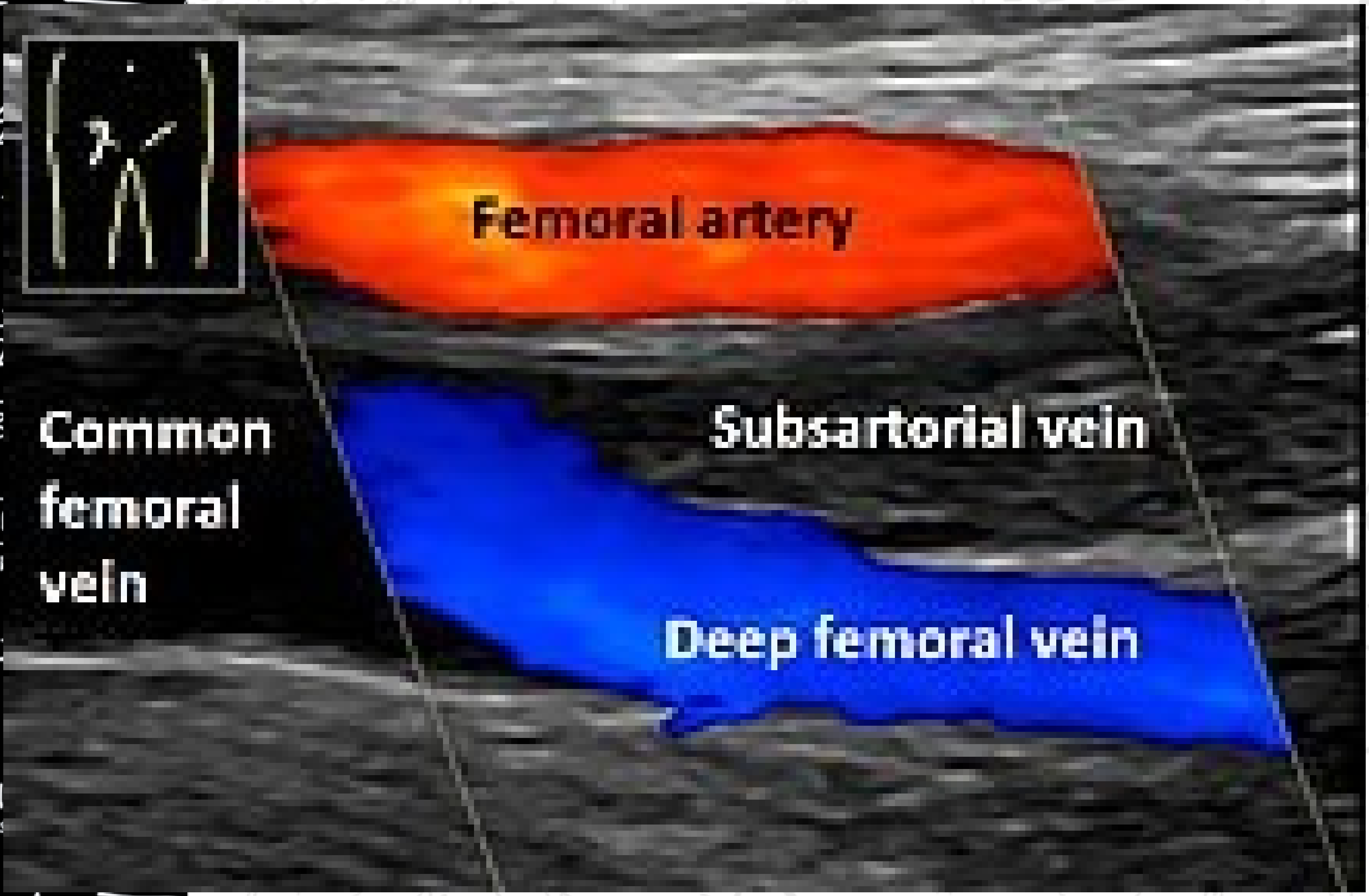
M-mode (Motion mode)



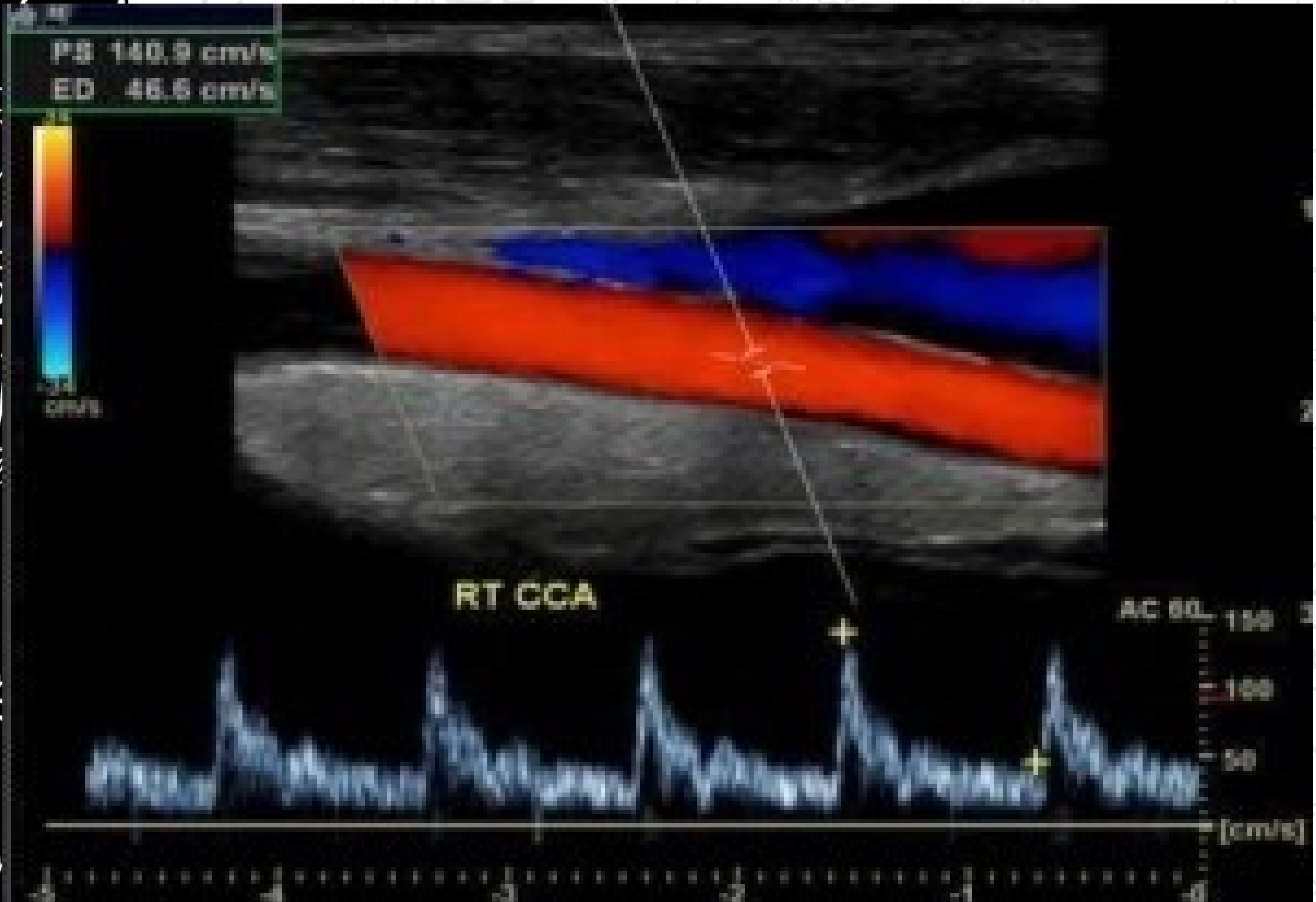
Shrnutí UZ módů



Duplexní UZ


Femoral artery
Common
femoral
vein
Subsartorial vein
Deep femoral vein

Triplexní UZ



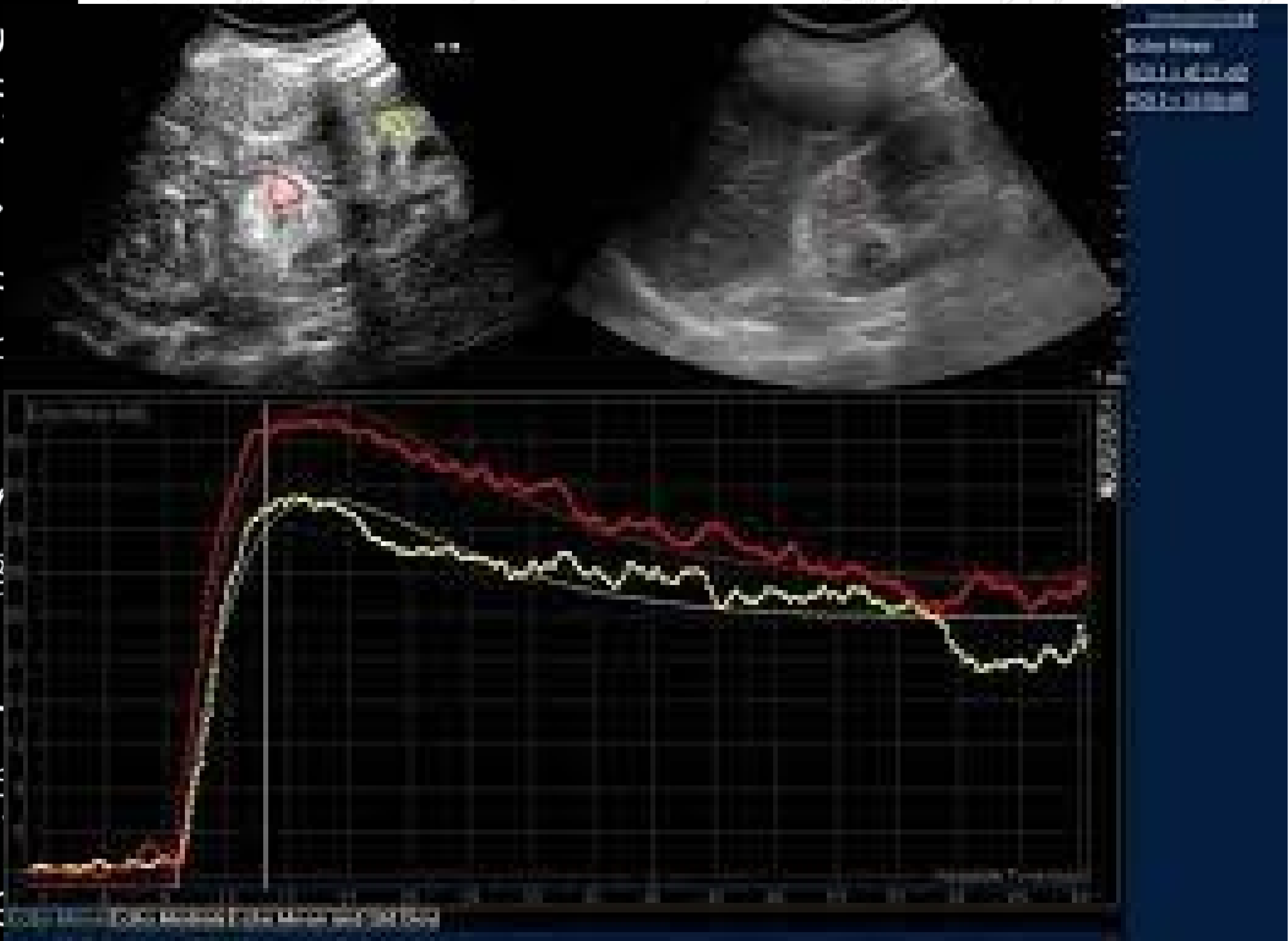
Kontrastní UZ

Table 7.1 Ultrasound contrast agents: overview of products

Name	Manufacturer	Shell	Gas	Approved
Echovist[a]	Bayer Schering Pharma	Galactose	Air	1991
Albunex[b]	Molecular Biosystems	Albumin	Air	1993
Levovist	Bayer Schering Pharma	Galactose	Air	1995
Optison	GE Healthcare	Albumin	Perfluoropropane	1998
SonoVue	Bracco	Phospholipids	Sulfur hexafluoride	2001
Luminity[c]	Lantheus Medical Imaging	Phospholipids	Perfluoropropane	2001
Sonazoid[d]	Daiichi Sankyo	Phosphatidylserine	Perfluorobutane	2006

[a] Does not pass pulmonary circulation.
[b] No longer marketed.
[c] Marketed in U.S. as Definity.
[d] Marketed only in Japan.

Kontrastní UZ



Shrnutí

- Akustická energie, akustický výkon a akustická intenzita zvukové vlny
- Akustická impedance
- Odraz a průchod zvuku rozhraním – koeficienty odrazivosti a propustnosti
- Hladina akustické intenzity, sluchové pole
- Absorpce zvuku a ultrazvuku
- Co je Dopplerův jev, rovnice Dopplerova jevu
- Využití v praxi (A,B,M-mód, duplexní...)
- Kontrastní látky v UZ diagnostice

Děkuji za pozornost

Konec 11. přednášky

Prezentace vznikla v rámci projektu fondu rozvoje MU 1515/2014