Hodnost matice

Hodnost matice je číslo, které udává maximální počet jejích lineárně nezávislých řádků (sloupců).

Má-li matice M hodnost h, píšeme $h(M) = h$.

Určování hodnosti matice podle uvedené definice je pracné, proto se používá jiný způsob – ekvivalentních úprav na matici v tzv. *schodovitém tvaru*:

Říkáme, že matice A typu $(m,\ n)$ má **schodovitý tvar**, právě když každý nenulový řádek matice začíná větším počtem nul než řádek předcházející.

Příklad:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Ekvivalentní úpravy matice – hodnost matice se nezmění těmito úpravami:

1. Záměna pořadí řádků matice.
2. Libovolný řádek matice se vynásobí nenulovým číslem.
3. K libovolnému řádku matice se přičte lineární kombinace jiných řádků.
4. Vynechá se nebo připojí řádek, který je lineární kombinací jiných řádků.

Hodnost matice se nezmění ani analogickými úpravami se sloupci matice.

Příklad 1: Určete hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 25 \end{pmatrix}$$

Závěr: Hodnost matice $h(A) = 4$ (výsledkem jsou 4 lineárně nezávislé řádky).

Příklad 2: Určete hodnost matice B.

$$\begin{pmatrix} 9 & -14 & 28 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & -14 & 28 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 33 & -39 & -3 \\ 0 & 22 & -26 & -2 \\ 0 & 11 & -13 & -1 \end{pmatrix}$$

Vynecháním 2. i 3. řádku (každý je násobkem 4. řádku) získáme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 11 & -13 & -1 \end{pmatrix}$$

o dvou lineárně nezávislých řádcích. Závěr: Hodnost matice $h(B) = 2$.

Úlohy – hodnost matice

1. Bez výpočtu určete hodnost matic:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Určete hodnost matic:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Určete hodnost matic:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -7 & 8 & 14 \\ 4 & 3 & -2 & -6 \\ -3 & -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Čtvercová matice A_n se nazývá **regulární**, jestliže má hodnost $h(A_n) = n$. Není-li čtvercová matice A_n regulární, nazývá se **singulární**. Určete, které z následujících matic jsou regulární a které singulární.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sazba v $\LaTeX\ 2_\varepsilon$