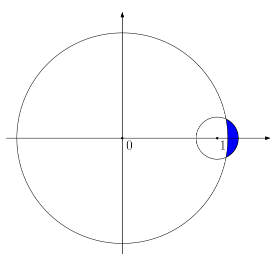
Užití kuželoseček a kvadrik.

Lenka Přibylová

25. listopadu 2010

Kružnice $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 0.9)^2 + y^2 = 0.04$ tvoří řez kulovými povrchy čočky. Určete její mohutnost. Můžeme ji považovat za tenkou čočku?

Polohy středů: $(x_1, y_1) = (0, 0)$ a $(x_2, y_2) = (0.9, 0)$ m, poloměry: $R_1 = 1$ m, $R_2 = 0.2$ m.



$y^2 = 1 - x^2$ dosadíme do $(x - 0.9)^2 + y^2 = 0.04$, odtud

$$(x - 0.9)^2 + 1 - x^2 = -1.8x + 0.81 + 1 = 0.04,$$

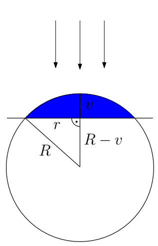
tj. $x = \frac{1.77}{1.8} = 0.98\bar{3}$ a $y^2 = 1 - (\frac{1.77}{1.8})^2 \doteq 0.033$, tj. $y = \pm\sqrt{1 - (\frac{1.77}{1.8})^2} \doteq 0.18$.

Jedná se o meniskus s průsečíky: $x = 0.98\bar{3}$ m, $y \doteq \pm 0.18$ m. Průměr čočky je $p \doteq 0.36$ m, tloušťka čočky je $d = 0.1$ m. Přilétá-li světlo zleva, jsou obě lámavé plochy duté a přísluší jim tedy podle znaménkové konvence záporná znaménka. Pro mohutnost prvního povrchu platí $D_1 = -\dfrac{n-1}{R_1}$ dpt, pro druhý $D_2 = -\dfrac{1-n}{R_2}$ dpt. Tedy pro index lomu $n = 1.5$ dostáváme $D_1 = -\dfrac{1.5-1}{1} = -0.5$ dpt a $D_2 = -\dfrac{1-1.5}{0.2} = 2.5$ dpt.
Celková mohutnost je $D = D_1 + D_2 - \dfrac{d}{n} D_1 D_2 = -0.5 + 2.5 - \dfrac{0.1}{1.5}(-0.5) \cdot 2.5 = 2.08\bar{3}$ dpt a odpovídající ohnisková vzdálenost potom $f = \frac{1}{D} = \frac{1}{2.08\bar{3}} = 0.48$ m.

Celková mohutnost čočky je kladná, takže se bude jednat o kladný meniskus.
V přiblížení tenké čočky by bylo $D = D_1 + D_2 = 2$ dpt. Jelikož bychom se tím dospustili chyby v určení celkové mohutnosti kolem pěti procent, lze říct, že z fyzikálního hlediska leží taková čočka na hranici tenkosti.

Z průměru a výšky vodní kapky na podložce spočtěte, jakou čočku vytváří.

Nejprve změříme výšku v a poloměr r vodní kapky (v metrech).



Z pravoúhlého trojúhelníku podle Pythagorovy věty dostáváme rovnost

$$R^2 = r^2 + (R - v)^2 = r^2 + R^2 - 2vR + v^2, \text{ tj.}$$

$$2vR = r^2 + v^2.$$

Poloměr povrchu kapky je $R = \frac{r^2+v^2}{2v}$ m.

Světlo přilétá shora, povrch je vypuklý a přísluší mu dle znaménkové konvence kladné znaménko. Pro mohutnost vrchního povrchu platí $D_1 = \dfrac{n-1}{R_1} = \dfrac{n-1}{R} = \dfrac{(n-1)}{\frac{r^2+v^2}{2v}} = \dfrac{2(n-1)v}{r^2+v^2}$ dpt. Povrch na podložce je plochý, proto $R = \infty$ a

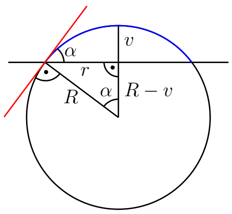
$D_2 = \dfrac{1-n}{R_2} = \dfrac{1-n}{\infty} = 0$ dpt. Celková mohutnost je

$$D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n} D_1 D_2 = D_1 + 0 - \frac{v}{n} D_1 \cdot 0 = D_1.$$

Kvůli ploché spodní stěně vzniklého kulového vrchlíku se bude vždy jednat o tenkou čočku.

Odpovídající ohnisková vzdálenost potom $f = \frac{1}{D} = \frac{1}{\frac{2(n-1)v}{r^2+v^2}} = \dfrac{r^2+v^2}{2(n-1)v}$ m.

Celková mohutnost čočky kladná, takže se bude jednat o tenkou spojku.
Pro kapku vody na skle je charakteristický tzv. smáčivý úhel $\alpha = 38.5°$.



Z úhlů v trojúhelníku je vidět, že smáčivý úhel je také středovým úhlem.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{R-v} = \frac{r}{\frac{r^2+v^2}{2v} - v} = \frac{r}{\frac{r^2+v^2-2v^2}{2v}} = \frac{2vr}{r^2-v^2}.$$

Je tedy zřejmé, že výška kapky bude nutně záviset na jejím poloměru, můžeme ji vypočítat z kvadratické rovnice

$$0 = v^2 \operatorname{tg} \alpha + 2vr - r^2 \operatorname{tg} \alpha,$$

tj. $v_{1,2} = \dfrac{-2r \pm \sqrt{4r^2 + 4r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{2\operatorname{tg} \alpha} = \dfrac{-2r \pm 2r\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}{2\operatorname{tg} \alpha}$, kde $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, tj.
$v_{1,2} = \dfrac{-2r \pm 2r\frac{1}{\cos \alpha}}{2\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = r \cos \alpha \dfrac{-1 \pm \frac{1}{\cos \alpha}}{\sin \alpha}$. Samozřejmě hledáme kladné řešení $v > 0$, odtud $v = r\dfrac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha}$.
Dosadíme do vztahu pro mohutnost
$D = \dfrac{2(n-1)v}{r^2+v^2} = \dfrac{2(n-1)r\frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha}}{r^2 + r^2\frac{(1-\cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} = \dfrac{2(n-1)r\frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha}}{r^2 \frac{\sin^2 \alpha + 1 - 2\cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \dfrac{2(n-1)(1-\cos \alpha)}{r\frac{2-2\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \dfrac{2(n-1)(1-\cos \alpha)\sin \alpha}{2r(1-\cos \alpha)}$ dpt.

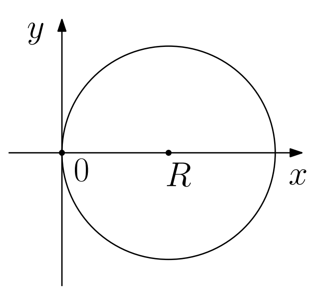
$$D = \frac{(n-1)\sin \alpha}{r} = 0.33 \sin 38.5° \frac{1}{r}$$

a

$$f = \frac{r}{(n-1)\sin \alpha} = \frac{1}{0.33 \sin 38.5°} r \doteq 4.87 \cdot r.$$

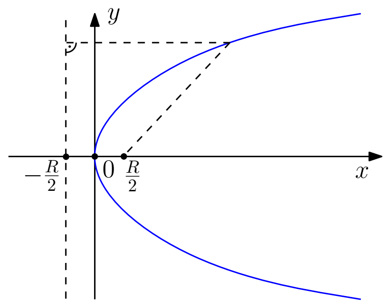
Nakreslete $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$ pro $k = 0$, $k = -1$ a $k = -2$.

$k = 0: \quad y^2 - 2Rx + x^2 = 0$
tj. $y^2 + (x-R)^2 = R^2$ je kružnice se středem $[R, 0]$ a poloměrem R.

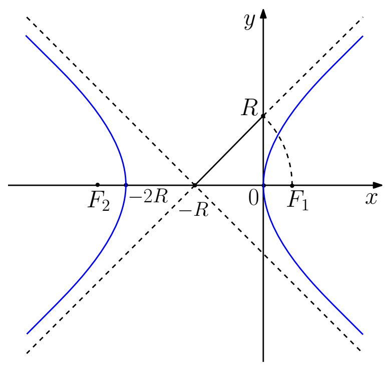


$k = -1: \quad y^2 - 2Rx = 0$
tj. $y^2 = 2Rx$ je parabola s řídící přímkou $x = -\frac{R}{2}$ a ohniskem $[\frac{R}{2}, 0]$.

©Lenka Přibylová, 2010



$k = -2: \quad y^2 - 2Rx - x^2 = 0$
tj. $(x+R)^2 - y^2 = R^2$ nebo $\frac{(x+R)^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} = 1$ je hyperbola s polosami délky R a středem $[-R, 0]$.



Ukažte, že $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$ je hyperbola, elipsa, kružnice a parabola a pro které hodnoty parametru k.

$k < -1$:

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

tj. $y^2 + (1+k)\left(x^2 - \frac{2R}{1+k}x\right) = 0$ a doplněním na čtverec tedy $y^2 + (1+k)\left(x - \frac{R}{1+k}\right)^2 = \frac{R^2}{1+k}$,

$$\frac{y^2}{\frac{R^2}{1+k}} + \frac{(x - \frac{R}{1+k})^2}{(\frac{R}{1+k})^2} = 1.$$

$\frac{R^2}{1+k} < 0$, jde tedy o hyperbolu s polosami $a = \frac{R}{1+k}$ a $b = \frac{R}{\sqrt{|1+k|}}$ a středem $S = [\frac{R}{1+k}, 0]$ vlevo od počátku.

$k = -1$:

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

tj. $y^2 = 2Rx$ je parabola s řídící přímkou $x = -\frac{R}{2}$ a ohniskem $[\frac{R}{2}, 0]$.

$-1 < k$:

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

tj. $y^2 + (1+k)\left(x^2 - \frac{2R}{1+k}x\right) = 0$ a doplněním na čtverec tedy $y^2 + (1+k)\left(x - \frac{R}{1+k}\right)^2 = \frac{R^2}{1+k}$,

$$\frac{y^2}{\frac{R^2}{1+k}} + \frac{(x - \frac{R}{1+k})^2}{(\frac{R}{1+k})^2} = 1.$$

$\frac{R^2}{1+k} > 0$, jde tedy o elipsu s polosami $a = \frac{R}{1+k}$ a $b = \frac{R}{\sqrt{1+k}}$ a středem $S = [\frac{R}{1+k}, 0]$ vpravo od počátku.

$k = 0$:

$$y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$$

tj. $y^2 - 2Rx + x^2 = y^2 + (x-R)^2 - R^2 = 0$, tj.

$$y^2 + (x-R)^2 = R^2$$

je kružnice se středem $[R, 0]$ a poloměrem R.

©Lenka Přibylová, 2010

Nalezněte průsečíky s osami kuželosečky $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$.

$k \neq -1$:
osa $x : y = 0$

$$2Rx + (1+k)x^2 = 0,$$
$$x(2R + (1+k)x) = 0.$$

Průsečíky jsou $x = 0$ a $x = \frac{2R}{1+k}$.
osa $y : x = 0$ $y^2 = 0$, průsečíky je $y = 0$. Dostáváme tedy dva průsečíky $[0, 0]$ a $[\frac{2R}{1+k}, 0]$.

$k = -1$:
$y^2 - 2Rx = 0$ parabola má jediný průsečík $[0, 0]$.

Ukažte, že R je vrcholová křivost profilu $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$.

Kuželosečka $y^2 - 2Rx + (1+k)x^2 = 0$ je v počátku tečná k ose y, protože $y = \pm\sqrt{2Rx - (1+k)x^2}$ a
$y' = \pm\frac{1}{2}(2Rx - (1+k)x^2)^{-\frac{1}{2}}(2R - 2(1+k)x) \to \pm\infty$ pro $x \to 0^+$. Stejně tak je to vidět i z předchozích grafů. Křivka není v okolí počátku funkcí.
Pro výpočet křivosti bude proto vhodné otočit grafy, tj. zaměnit x a y:

$$x^2 - 2Ry + (1+k)y^2 = 0.$$

$k = -1$:

$$y = \tfrac{x^2}{2R}, \quad \Rightarrow \quad y' = \tfrac{x}{R}, \quad y'' = \tfrac{1}{R}.$$
$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = \tfrac{1}{R}.$$

Křivost je dána vztahem

$$k = \frac{y''(0)}{(1 + (y'(0))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{R}}{1} = \frac{1}{R}.$$

Poloměr křivosti je R.
$k \neq -1$:
Doplněním na čtverec dostáváme podobně jako dříve

$$x^2 + (1+k)\left(y - \tfrac{R}{1+k}\right)^2 = \tfrac{R^2}{1+k}.$$

Odtud $\left(y - \frac{R}{1+k}\right)^2 = \frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}$ a

$$y = \tfrac{R}{1+k} \pm \sqrt{\tfrac{R^2}{(1+k)^2} - \tfrac{x^2}{1+k}}.$$

Pro hyperbolu je $k < -1$ a v okolí počátku prochází větev $y = \frac{R}{1+k} + \sqrt{\frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}}$, pro elipsu je $k > -1$ a v okolí počátku prochází větev $y = \frac{R}{1+k} - \sqrt{\frac{R^2}{(1+k)^2} - \frac{x^2}{1+k}}$.
$k \neq -1$:

$$y = \tfrac{R}{1+k} \pm \sqrt{\tfrac{R^2}{(1+k)^2} - \tfrac{x^2}{1+k}} \Rightarrow$$
$$y' = \pm\frac{1}{2}\left(\tfrac{R^2}{(1+k)^2} - \tfrac{x^2}{1+k}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2x}{1+k}\right),$$

©Lenka Přibylová, 2010

$$y'' = \mp\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{R^2}{(1+k)^2} - \tfrac{x^2}{1+k}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\tfrac{2x}{1+k}\right)^2 \pm \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{R^2}{(1+k)^2} - \tfrac{x^2}{1+k}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\tfrac{2}{1+k}\right)$$

$y'(0) = 0$ a $y''(0) = \mp\dfrac{1}{1+k} \cdot \dfrac{1+k}{R} = \mp\dfrac{1}{R}$. Křivost je dána vztahem

$$k = \frac{y''(0)}{(1+(y'(0))^2)^{\frac{3}{2}}} = \mp\frac{\frac{1}{R}}{1} = \mp\frac{1}{R}.$$

Poloměr křivosti je R.

©Lenka Přibylová, 2010 ×