MATEMATIKA PRE OPTOMETROV

cvičenie 4

príklad 1. Vypočítajte súčet, rozdiel a súčin nasledujúcich polynómov:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = -2x^4 + 3x^2 + 2$$

$$f(x) + g(x) = -2x^4 + x^3 + 5x^2 + 1$$

$$f(x) - g(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 - 3$$

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) &= (x^3 + 2x^2 - 1)(-2x^4 + 3x^2 + 2) = \\ &= -2x^7 + 3x^5 + 2x^3 - 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 2x^4 - 3x^2 - 2 \\ &= -2x^7 - 4x^6 + 3x^5 + 8x^4 + 2x^3 + x^2 - 2 \end{aligned}$$

príklad 2. Vydeľte polynóm f polynómom g so zvyškom.

a) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x + 2, \quad g(x) = x^2 + x - 2$

b) $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x + 4, \quad g(x) = x^3 + x + 1$

a)
$$\begin{aligned} &(x^4 + 3x^3 - 4x + 2) : (x^2 + x - 2) = x^2 + 2x \\ &-(x^4 + x^3 - 2x^2) \\ &\quad 2x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \qquad st = 3 \geq 2 \\ &\quad -(2x^3 + 2x^2 - 4x) \\ &\qquad 2 \qquad st = 0 < 2 \Rightarrow \text{KONIEC} \end{aligned}$$

$$f(x) = \underbrace{(x^2 + 2x)}_{\text{PODIEL}} \cdot g(x) \underbrace{+2}_{\text{ZVYŠOK}}$$

b)
$$\begin{aligned} &(x^5 + 2x^3 + 3x + 4) : (x^3 + x + 1) = x^2 + 1 \\ &-(x^5 + x^3 + x^2) \\ &\quad x^3 - x^2 + 3x + 4 \qquad st = 3 \geq 3 \\ &\quad -(x^3 + x + 1) \\ &\quad -x^2 + 2x + 3 \qquad st = 2 < 3 \Rightarrow \text{KONIEC} \end{aligned}$$

$$f(x) = \underbrace{(x^2 + 1)}_{\text{PODIEL}} \cdot g(x) \underbrace{- x^2 + 2x + 3}_{\text{ZVYŠOK}}$$

príklad 3. Pomocou Hornerovej schémy rozložte polynóm f(x) na koreňové činitele.

a) $f(x) = x^8 - 6x^7 + 10x^6 + x^5 - 17x^4 + 16x^3 - 11x + 6,$

b) $f(x) = x^7 - 2x^6 - 5x^5 + 6x^4 + x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$

koreňový činiteľ = buď lineárny polynóm, alebo kvadratický polynóm s komplexnými koreňmi.

rozklad na koreňové činitele = vyjadrenie polynómu v tvare súčinu koreňových činiteľov

a) potenciálne celočíselné korene sú: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

	1	-6	10	1	-17	16	0	-11	6
1	1	-5	5	6	-11	5	5	-6	0
1	1	-4	1	7	-4	1	6	0	
~~1~~	~~1~~	~~-3~~	~~-2~~	~~5~~	~~1~~	~~2~~	~~$8 \neq 0$~~		
-1	1	-5	6	1	-5	6	0		
-1	1	-6	12	-11	6	0			
~~-1~~	~~1~~	~~-7~~	~~19~~	~~-30~~	~~$36 \neq 0$~~				
2	1	-4	4	-3	0		(2 už nie je koreň)		
3	1	-1	1	0					

KVADRATICKÝ POLYNÓM SO ZÁPORNÝM DISKRIMINANTOM

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)(x^7-5x^6+5x^5+6x^4-11x^3+5x^2+5x-6)\\
&= (x-1)^2(x^6-4x^5+x^4+7x^3-4x^2+x+6)\\
&= (x-1)^2(x+1)(x^5-5x^4+6x^3+x^2-5x+6)\\
&= (x-1)^2(x+1)^2(x^4-6x^3+12x^2-11x+6)\\
&= (x-1)^2(x+1)^2(x-2)(x^3-4x^2+4x-3)\\
&= (x-1)^2(x+1)^2(x-2)(x-3)(x^2-x+1)
\end{aligned}
$$

b) potenciálne celočíselné korene sú: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

	1	-2	-5	6	1	-2	-5	6
1	1	-1	-6	0	1	-1	-6	0
1	1	0	-6	-6	-5	-6	-12	≠0
-1	1	-2	-4	4	-3	2	-8	≠0
2	1	1	-4	-8	-15	-31	-68	≠0
-2	1	-3	0	0	1	-3	0	
-2	1	-5	10	-20	41	-85	≠0	
3	1	0	0	0	1	0		

$= x^4+1$ NEMÁ REÁLNE KORENE

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)(x^6-x^5-6x^4+x^2-x-6)\\
&= (x-1)(x+2)(x^5-3x^4+x-3)\\
&= (x-1)(x+2)(x-3)(x^4+1)
\end{aligned}
$$

NÁJDEME KORENE x^4+1 (4 KOMPLEXNÉ KORENE)

ZAVEDIEME SUBSTITÚCIU $y=x^2 \Rightarrow x^4+1 \rightsquigarrow y^2+1$

$$y^2+1=0 \Leftrightarrow y=\pm i$$

$$\Rightarrow x^2=\pm i$$

I. $x^2 = i \Rightarrow$ $x_1 = \frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}$

II. $x^2 = -i \Rightarrow$ $x_3 = -\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$, $x_4 = \frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}$

$$\left(x-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right) = x^2-\sqrt2 x+1$$

$$\left(x+\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right) = x^2+\sqrt2 x+1$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)(x^2-\sqrt2x+1)(x^2+\sqrt2x+1)$$

INÝ SPÔSOB: ~~ROZKLAD NA ŠTVORCE~~ TRIK:

$$
\begin{aligned}
(x^4+1) &= (x^2+1)^2-2x^2 \quad \text{(VZOREC)}\\
&= (x^2+1-\sqrt2x)(x^2+1+\sqrt2x)\\
&= (x^2-\sqrt2x+1)(x^2+\sqrt2x+1)
\end{aligned}
$$

DOPLNOK:

MAJME POLYNÓM $f(x)$ S REÁLNYMI KOEFICIENTAMI, TEDA $f(x)\in\mathbb{R}[x]$. AK JE KOMPLEXNÉ ČÍSLO r KOREŇ f, POTOM JE AJ $\bar r$ KOREŇ f.

DÔKAZ: PRE AKÉKOĽVEK KOMPLEXNÉ ČÍSLA r_1, r_2, r PLATÍ: $\overline{r_1+r_2} = \overline{r_1}+\overline{r_2}$, $\overline{r_1\cdot r_2} = \overline{r_1}\cdot\overline{r_2} \Rightarrow \overline{r^n} = (\bar r)^n$

NECH TEDA PLATÍ

$$f(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1}+\dots+a_1 r+a_0 = 0$$

APLIKUJEME KOMPLEXNÚ KONJUGÁCIU NA OBIDVE STRANY ROVNICE:

$$\overline{a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1}+\dots+a_1r+a_0} = \bar 0$$

$$\Rightarrow \overline{a_n r^n}+\overline{a_{n-1}r^{n-1}}+\dots+\overline{a_1 r}+\overline{a_0} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{a_n}\cdot\overline{r^n}+\overline{a_{n-1}}\cdot\overline{r^{n-1}}+\dots+\overline{a_1}\cdot\bar r+\overline{a_0} = 0$$

$$\Rightarrow a_n \bar{r}^n + a_{n-1}\bar{r}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{r} + a_0 = 0$$

$\Rightarrow f(\bar{r}) = 0 \Rightarrow \bar{r}$ JE ~~TA~~ TIEŽ KOREŇ f

- DÁ SA UKÁZAŤ AJ TO, ŽE r a $\bar{r}$ MAJÚ ROVNAKÚ NÁSOBNOSŤ AKO KORENE POLYNÓMU f

- OZNAČME $r = \alpha + i\beta \Rightarrow \bar{r} = \alpha - i\beta$

AK $f(r) = 0 \Rightarrow f(\bar{r}) = 0$

$$\Rightarrow (x-r) \mid f \ \wedge \ (x-\bar{r}) \mid f$$

$$\Rightarrow (x-r)(x-\bar{r}) \mid f$$

$$\parallel$$

$$(x-(\alpha+i\beta))(x-(\alpha-i\beta)) =$$

$$= (x - 2\alpha x + |r|^2) \mid f$$

... TAKTO SME SA V MINULOM PRÍKLADE DOPRACOVALI K POLYNÓMOM $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ a $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

- PRETO SA V ROZKLADE NA PARCIÁLNE ZLOMKY HOVORÍ O DVOJICI KOMPLEXNE ZDRUŽENÝCH KOREŇOV NÁSOBNOSTI k = JE TO ~~T~~ TO ISTÉ AKO HOVORIŤ O KVADRATICKOM KOREŇOVOM ČINITELI, KTORÝ SA V ROZKLADE NACHÁDZA k-KRÁT (JE V k-TEJ MOCNINE).

---

príklad 4. Rozložte na parciálne zlomky

$$\frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2}.$$

Riešenie. Je to rýdzo lomená funkcia. Nájdeme korene (koreňové činitele) menovateľa.

POTENCIÁLNE KORENE: $\pm 1, \pm 2$

	1	−2	1	−2	
1	1	−1	0	−2	$\neq 0$
−1	1	−3	4	−6	$\neq 0$
2	1	0	1	0	

$\Rightarrow x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)$

$\underbrace{1 \quad 0 \quad 1}_{= x^2+1}$ NEMÁ REÁLNE KORENE

$$\Rightarrow \frac{3x^2-5x+8}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad \Big/ \cdot (x-2)(x^2+1)$$

$$3x^2 - 5x + 8 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-2)$$

$$= (A+B)x^2 + (C-2B)x + A - 2C$$

I. x^2: $\quad 3 = A + B$

II. x^1: $\quad -5 = C - 2B$

III. x^0: $\quad 8 = A - 2C \Rightarrow A = 8 + 2C$

$2\,\mathrm{I} + \mathrm{II}$: $\quad 6 - 5 = 2A + C$

$$1 = 2A + C$$

$$1 = 2(8+2C) + C \Rightarrow 15 = -5C$$

$$\Rightarrow C = -3$$

$$\Rightarrow A = 8 + 2(-3) = 2 \overset{\mathrm{I.}}{\Rightarrow} B = 3 - A = 1$$

$$\frac{3x^2-5x+8}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{2}{x-2} + \frac{x-3}{x^2+1}$$

príklad 5. Rozložte na parciálne zlomky

$$\frac{2x-1}{2x^4+x^3+x^2}$$

Riešenie. Je to rýdzo lomená funkcia.

$$2x^4+x^3+x^2 = x^2(\underbrace{2x^2+x+1}_{\text{ZÁPORNÝ DISKRIMINANT}})$$

$$\frac{2x-1}{2x^4+x^3+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{2x^2+x+1} \quad / \cdot\, x^2(2x^2+x+1)$$

$$2x-1 = Ax(2x^2+x+1) + B(2x^2+x+1) + x^2(Cx+D)$$

AK ZA x DOSADÍME 0 DOSTANEME

$$-1 = B$$

... ZJEDNODUŠÍME SI TO

$$2x-1 = Ax(2x^2+x+1) - (2x^2+x+1) + x^2(Cx+D)$$

$$2x^2+3x = Ax(2x^2+x+1) + x^2(Cx+D) \quad / : x$$

$$2x+3 = A(2x^2+x+1) + x(Cx+D)$$

$$= (2A+C)x^2 + (A+D)x + A$$

I. $x^2: \; 0 = 2A+C \Rightarrow C = -6$

II. $x^1: \; 2 = A+D \Rightarrow D = -1$

III. $x^0: \; 3 = A$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{2x^4+x^3+x^2} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{-6x-1}{2x^2+x+1}$$

príklad 6. Rozložte na parciálne zlomky

$$\frac{x^2-x+10}{(x^2-3x+10)^2}$$

Riešenie. Je to rýdzo lomená funkcia.
Keďže diskriminant $x^2-3x+10$ je záporný, je menovateľ už rozložený na koreňové činitele.

$$\frac{x^2-x+10}{(x^2-3x+10)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-3x+10} + \frac{Cx+D}{(x^2-3x+10)^2} \quad / \cdot\, (x^2-3x+10)^2$$

$$x^2-x+10 = (Ax+B)(x^2-3x+10) + Cx+D$$

$$= Ax^3 + (-3A+B)x^2 + (10A-3B+C)x + 10B+D$$

I. $x^3: \; 0 = A$

II. $x^2: \; 1 = -3A+B \Rightarrow B = 1$

III. $x^1: \; -1 = 10A-3B+C \Rightarrow C = 2$

IV. $x^0: \; 10 = 10B+D \Rightarrow D = 0$

$$\frac{x^2-x+10}{(x^2-3x+10)^2} = \frac{1}{x^2-3x+10} + \frac{2x}{(x^2-3x+10)^2}$$

príklad 7. Rozložte na parciálne zlomky.

$$\frac{2x^4-x^3+x^2+3x+3}{x^2-1}$$

Riešenie. Nie je rýdzo lomená $\Rightarrow$ musíme najprv deliť.

$$(2x^4-x^3+x^2+3x+3) : (x^2-1) = 2x^2-x+3$$

$-(2x^4-2x^2)$

$-x^3+3x^2+3x+3 \qquad st = 3 \geq 2$

$-(-x^3+x)$

$3x^2+2x+3 \qquad st = 2 \geq 2$

$-(3x^2-3)$

$2x+6 \qquad st = 1 < 2 \Rightarrow$ KONIEC

$$\frac{2x^4-x^3+x^2+3x+3}{x^2-1} = 2x^2-x+3 + \frac{2x+6}{x^2-1}$$

KEĎŽE $x^2-1 = (x+1)(x-1) \Rightarrow \dfrac{2x+6}{x^2-1} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1}$

$$\frac{2x+6}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \qquad / \cdot (x^2-1)$$

$$2x+6 = A(x-1) + B(x+1) = (A+B)x - A + B$$

I. $x^1: \ 2 = A+B$

II. $x^0: \ 6 = -A+B$

I + II : $8 = 2B \Rightarrow B = 4$

$\Rightarrow A = -2$

$$\frac{2x+6}{x^2-1} = \frac{-2}{x+1} + \frac{4}{x-1}$$

príklad 8. Rozložte na parciálne zlomky

$$\frac{x^3+3x^2+4}{x^3+x-2}.$$

Riešenie: Nie je rýdzo lomená $\Rightarrow$ musíme deliť.

$$\frac{x^3+3x^2+4}{x^3+x-2} = \frac{x^3+x-2+3x^2-x+6}{x^3+x-2} = 1 + \frac{3x^2-x+6}{x^3+x-2}$$

x^3+x-2 MÁ EVIDENTNE KOREŇ 1

	1	0	1	-2
1	1	1	2	0

$$\Rightarrow x^3+x-2 = (x-1)\underbrace{(x^2+x+2)}_{\text{ZÁPORNÝ DISKRIMINANT}}$$

$$\frac{3x^2-x+6}{x^3+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+2} \qquad / \cdot (x^3+x-2)$$

$$3x^2-x+6 = A(x^2+x+2) + (Bx+C)(x-1)$$
$$= (A+B)x^2 + (A-B+C)x + 2A - C$$

I. $x^2: \ 3 = A+B$

II. $x^1: \ -1 = A-B+C$

III. $x^0: \ 6 = 2A-C$

I + II + III.: $8 = 4A \Rightarrow A = 2$

I. $\Rightarrow B = 1$

III. $\Rightarrow C = -2$

$$\frac{3x^2-x+6}{x^3+x-2} = \frac{2}{x-1} + \frac{x-2}{x^2+x+2}$$