MATEMATIKA PRE OPTOMETROV

cvičenie 5

príklad 1.) $A = [2,3,4]$ $B = [-5,7,1]$ $C = [1,7,5]$

$u = \overrightarrow{AB}$ $v = \overrightarrow{AC}$

Vypočítajte $u+v$, $u-v$, $|u|$, $|v|$

$u = \overrightarrow{AB} = [-5,7,1] - [2,3,4] = (-7,4,-3)$

$v = \overrightarrow{AC} = [1,7,5] - [2,3,4] = (-1,4,1)$

$u+v = (-7,4,-3) + (-1,4,1) = (-8,8,-2)$

$u-v = (-7,4,-3) - (-1,4,1) = (-6,0,-4)$

$|u| = \sqrt{49+16+9} = \sqrt{74}$

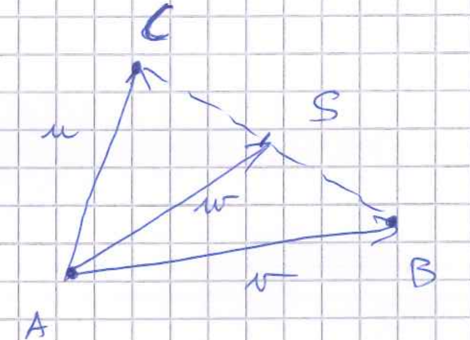
$|v| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

príklad 2.) $A = [3,2,0]$ $B = [1,-2,4]$ $C = [1,1,1]$

Vypočítajte súradnice ťažiska $\triangle ABC$.

$u = \overrightarrow{AB} = (-2,-4,4)$

$v = \overrightarrow{AC} = (-2,-1,1)$



Ťažnica z vrcholu A ide do stredu S strany BC.

$$S = \frac{B+C}{2} = \left[1, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

$w = \overrightarrow{AS} = \left(-2, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ $\left(-2, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

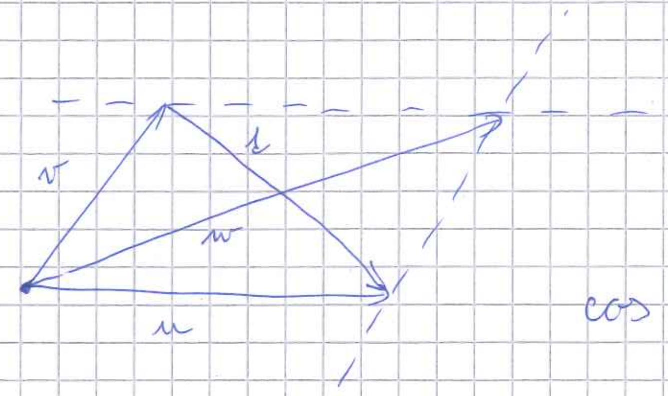
Ťažisko T: $T = A + \frac{2}{3} w = [3,2,0] + \frac{2}{3}$

$= \left[\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$.

Jednoduchšie riešenie: $T = \frac{A+B+C}{3}$.

príklad 3.) Nájdite uhol φ, ktorý zvierajú uhlopriečky rovnobežníka zostrojeného z vektorov

$u = (2,1,0)$ a $v = (0,-2,1)$.



$w = u+v = (2,-1,1)$

$s = u-v = (2,3,-1)$

$$\cos\varphi = \frac{w \cdot s}{|w| \cdot |s|}$$

$w \cdot s = 4 - 3 - 1 = 0$

$|w| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

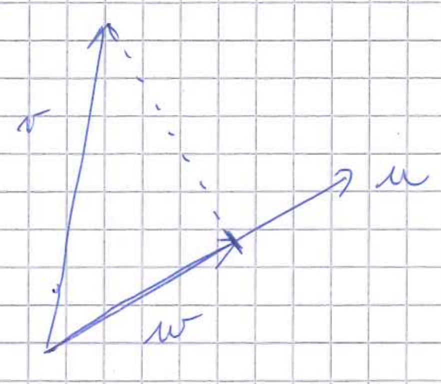
$|s| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{0}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = 0$

$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

príklad 4.) Nájdite kolmý priemet vektora $(3,1,1)$ na vektor $(2,2,5)$

$u = (2,2,5)$ $v = (3,1,1)$



$$w = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} \cdot u$$

$u \cdot v = 6 + 2 + 5 = 13$

$u \cdot u = 4 + 4 + 25 = 33$

$\Rightarrow w = \frac{13}{33}(2,2,5) = \left(\frac{26}{33}, \frac{26}{33}, \frac{65}{33}\right)$

príklad 5.) Riešte maticové rovnice

a) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$

a) Matica X musí mať toľko stĺpcov, koľko má $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ riadkov a toľko riadkov, koľko má $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ riadkov. $\Rightarrow$ X je typu 2×2

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y & 5x+3y \\ 2r+s & 5r+3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

I. $2x + y = 4$ \
II. $5x + 3y = -6$ $\Big\} \cdot(-3) \Rightarrow -x = -18 \Rightarrow x = 18$ \
$\Rightarrow y = -32$

III. $2r + s = 2$ \
IV. $5r + 3s = 1$ $\Big\} \cdot(-3) \Rightarrow -r = -5 \Rightarrow r = 5$ \
$\Rightarrow s = -8$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 18 & -32 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$$

b) Podobne ako v predošlej podúlohe ... X je typu 2×2.

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2r & y+2s \\ 3x+6r & 3y+6s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$$

I. $x + 2r = 1$ \
II. $3x + 6r = 3$ $\Big\}$ TIE ISTÉ ROVNICE

III. $y + 2s = -4$ \
IV. $3y + 6s = -12$ $\Big\}$ TIE ISTÉ ROVNICE

Premenné r a s zvolíme ako parametre:

$r = r, \; s = s$

$\Rightarrow x = 1 - 2r$

$\Rightarrow y = -4 - 2s$

Riešenie je $X = \begin{pmatrix} 1-2r & -4-2s \\ r & s \end{pmatrix}$, kde $r, s \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné.

MATEMATIKA PRE EMBRYOLÓGOV

cvičenie 3)

lineárne kombinácie a (ne) závislosť vektorov

príklad 1)

a) nájdite lineárnu kombináciu vektorov $u = 3a + 5b - c$, kde $a = (4, 1, 3, -2)$, $b = (1, 2, -3, 2)$, $c = (16, 9, 1, -3)$.

b) nájdite lineárnu kombináciu vektorov $u = -a + 4b - 6c + 2d$, kde $a = (1, 1, -1, -1)$, $b = (0, 0, 0, 0)$, $c = (1/2, 0, 1, 4)$, $d = (-1, -1, 1, 1)$.

príklad 2) určte čísla k_1, k_2, k_3 v lineárnej kombinácii

a) $(2, 3, 0) = k_1(5, 5, 1) + k_2(7, -11, -2) + k_3(1, 1, 1)$

b) $(2, 3, 0) = k_1(5, 5, 1) + k_2(7, -11, -2)$

riešenie:

1 a) $3(4, 1, 3, -2) + 5(1, 2, -3, 2) - (16, 9, 1, -3) =$
$= (12 + 5 - 16, 3 + 10 - 9, 9 - 15 - 1, -6 + 10 + 3) =$
$= (1, 4, -7, 7)$

b) $-(1, 1, -1, -1) + 4(0, 0, 0, 0) - 6(1/2, 0, 1, 4) + 2(-1, -1, 1, 1) =$
$= (-1 - 3 - 2, -1 - 2, 1 - 6 + 2, 1 - 24 + 2) = (-6, -3, -3, -21)$

2 a) $(2, 3, 0) = (5k_1 + 7k_2 + k_3, 5k_1 - 11k_2 + k_3, k_1 - 2k_2 + k_3)$

I. $5k_1 + 7k_2 + k_3 = 2$

II. $5k_1 - 11k_2 + k_3 = 3$

III. $k_1 - 2k_2 + k_3 = 0 \Rightarrow k_3 = 2k_2 - k_1$

I. $5k_1 + 7k_2 + 2k_2 - k_1 = 2$
$4k_1 + 9k_2 = 2$

II. $5k_1 - 11k_2 + \cancel{k_3}\ 2k_2 - k_1 = 3$
$4k_1 - 9k_2 = 3$

$\mathrm{I.} + \mathrm{II.}: \quad 8k_1 = 5 \Rightarrow k_1 = \frac{5}{8}$

dosadíme do I. $\quad 4k_1 + 9k_2 = 2$

$4 \cdot \frac{5}{8} + 9k_2 = 2$

k_1, k_2 dosadíme

$\frac{5}{2} + 9k_2 = 2 \quad / \cdot 2$

do $k_3 = 2k_2 - k_1$

$5 + 18k_2 = 4 \quad / -5$

$= -\frac{2}{18} - \frac{5}{8}$

$18k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{18}$

$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{8}$

$= \frac{-8-45}{72} = -\frac{53}{72}$

hľadaná lineárna kombinácia má tvar

$(2,3,0) = \frac{5}{8}(5,5,1) - \frac{1}{18}(7,-11,-2) - \frac{53}{72}(1,1,1)$

2 b) $(2,3,0) = (5k_1 + 7k_2, 5k_1 - 11k_2, k_1 - 2k_2)$

I. $5k_1 + 7k_2 = 2$

II. $5k_1 - 11k_2 = 3$

III. $k_1 - 2k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = 2k_2$

I. $\cancel{5k_1}$ $\quad 5 \cdot 2k_2 + 7k_2 = 2$

$17k_2 = 2 \Rightarrow k_2 = \frac{2}{17}$

II. $5 \cdot 2k_2 - 11k_2 = 3$

$-k_2 = 3 \Rightarrow k_2 = -3$

spor

úloha nemá riešenie

vektor (2,3,0) sa nedá vyjadriť ako lineárna kombinácia vektorov (5,5,1) a (7,-11,-2) – nleží v rovine generovanej týmito vektormi

príklad 3) riešte, či sú nasledujúce trojice vektorov lineárne (ne)závislé:

a) $a = (1,0,1)$, $b = (1,1,1)$, $c = (1,1,0)$

b) $u = (2,0,1)$, $v = (1,-1,0)$, $w = (3,-1,1)$

riešenie:

3 a) hľadáme všetky lin. kombinácie $c_1 a + c_2 b + c_3 c = 0$

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\
&\text{II.} \quad c_2 + c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = -c_2 \\
&\text{III.} \quad c_1 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_2
\end{aligned}$$

$$\text{I.} \quad -c_2 + c_2 - c_2 = 0$$

$$-c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$ dosadíme do II a III.

$$\Rightarrow c_3 = 0, \quad c_1 = 0$$

rovnosť $c_1 a + c_2 b + c_3 c = 0$ platí len pre $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, teda vektory a, b, c sú lin. nezávislé

3 b) hľadáme všetky lin. kombinácie $c_1 u + c_2 v + c_3 w = 0$

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad 2c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \\
&\text{II.} \quad -c_2 - c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -c_3 \\
&\text{III.} \quad c_1 + c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_3
\end{aligned}$$

$$\text{I.} \quad 2(-c_3) - c_3 + 3c_3 = 0$$

$$-3c_3 + 3c_3 = 0$$

$$0 = 0$$

$\Rightarrow$ ak platia rovnice II a III, potom je rovnica I splnená automaticky

$\Rightarrow$ zvolíme napríklad $c_3 = 1$,
potom $c_1 = -1$, $c_2 = -1$

čiže existuje netriviálne (nenulové) riešenie
$c_1 = -1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$ rovnice $c_1 u + c_2 v + c_3 w = 0$

$\Rightarrow$ vektory u, v, w sú lineárne závislé

platí napríklad $u = w - v$

$$(2,0,1) = (3,-1,1) - (1,-1,0)$$

matice

príklad 4) Nech $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&-4&8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&4\\2&-1&1\end{pmatrix}$ a

$C=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&4&5\end{pmatrix}$. Vypočítajte $2A-3B+4C$.

$$2A-3B+4C=\begin{pmatrix}6-4 & 4+4 & 2-12+4\\ -6 & -8+3+16 & 16-3+20\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&8&-6\\-6&11&33\end{pmatrix}$$

príklad 5)

Vypočítajte súčin matíc: $\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&1&-1&-7\\-8&0&0&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\-4&1\\1&0\\-2&-3\end{pmatrix}$

Vo výslednej matici dostaneme prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci tak, že i-ty riadok prvej matice vynásobíme j-tym stĺpcom druhej matice rovnako ako keď počítame skalárny súčin dvoch vektorov. Aby sme mohli matice násobiť, musí mať prvá matica toľko stĺpcov, koľko má druhá riadkov.

$$\begin{pmatrix}3&2\\-4&1\\1&0\\-2&-3\end{pmatrix} \to \text{2. stĺpec}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&1&-1&-7\\-8&0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ & \\ & -1\end{pmatrix}$$

3. riadok

prvok na pozícii 3,2

$$-8\cdot2+0\cdot1+0\cdot0+(-5)\cdot(-3)=-1$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&1&-1&-7\\-8&0&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\-4&1\\1&0\\-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&4\\9&22\\-14&-1\end{pmatrix}$$

príklad 6)

nech $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Rozhodnite, ktoré dvojice sa dajú vynásobiť a v akom poradí.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

AC sa nedá BA sa nedá

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

súčiny BC a CB ilustrujú skutočnosť, že násobenie matíc nie je komutatívne – dokonca výsledné matice nemajú ani rovnaké rozmery.

príklad 7) matica rotácie

nech $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$

nech $v = (x, y)$. Spočítajme uhol vektorov v a Rv.

označme $u = Rv$ a spočítajme jeho zložky:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

veľkosť vektora u je:

$$\|u\| = \sqrt{(x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2\cos^2\alpha - 2xy\cos\alpha\cdot\sin\alpha + y^2\sin^2\alpha + x^2\sin^2\alpha + 2xy\sin\alpha\cdot\cos\alpha + y^2\cos^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{x^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + y^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\|v\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

skalárny súčin vektorov u a v je:

$$u\cdot v = (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha)\cdot(x, y) =$$

$$= x^2\cos\alpha - xy\sin\alpha + xy\sin\alpha + y^2\cos\alpha =$$

$$= \cos\alpha\cdot(x^2+y^2)$$

pre uhol φ vektorov u a v platí

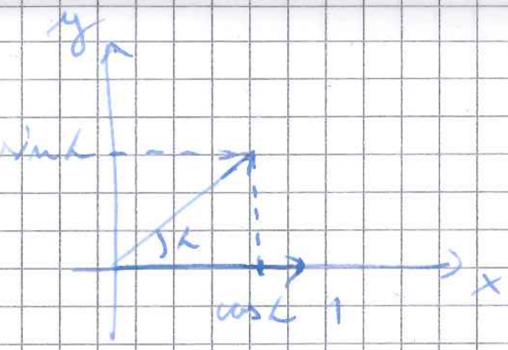
$$\cos\varphi = \frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|} = \frac{\cos\alpha\cdot(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\alpha$$

to znamená, že vektory u a v zvierajú uhol α z definície matice R

navyše vektor $u = Rv$ má rovnakú veľkosť ako v

$\Rightarrow$ násobenie vektora maticou R spôsobí jeho otočenie o uhol α (proti smeru hodinových ručičiek)

$$R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$



príklad 8) Vypočítajte A^5, kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n\text{-krát}}$$

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zdá sa, že vo všeobecnosti platí $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde $n \in \mathbb{N}$

dokážeme matematickou indukciou:

1) tvrdenie platí pre $n = 1$ (priamo z definície matice A)

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) predpokladáme, že tvrdenie platí pre $n = k \geq 1$ a na základe tohto predpokladu dokážeme tvrdenie pre $n = k+1$:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A^1 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dokázali sme $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ takže špeciálne platí →

$\searrow \quad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

príklad 9) nech $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Vypočítajte R^n.

Rv je v otočený o uhol α

$R(Rv) = R^2 v$ je v otočený $2\times$ o uhol α, teda o uhol 2α

$\vdots$

$R(R(\cdots(Rv)\cdots)) = R^n v$ je v otočený ~~ozn~~ $n\times$ o uhol α teda o uhol $n\alpha$

ukážeme, že platí $R^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

1) tvrdenie platí pre $n = 1$

2) nech tvrdenie platí pre $n = k \geq 1$

$$R^{k+1} = R^k \cdot R = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos k\alpha - \sin\alpha \sin k\alpha & -\sin\alpha \cos k\alpha - \cos\alpha \sin k\alpha \\ \cos\alpha \sin k\alpha + \sin\alpha \cos k\alpha & -\sin\alpha \sin k\alpha + \cos\alpha \cos k\alpha \end{pmatrix}$$

použijeme súčtové vzorce

$$= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\alpha & -\sin(k+1)\alpha \\ \sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha \end{pmatrix}$$

príklady na precvičenie (na domácu úlohu)

spočítajte súčiny matíc:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

hodnosť matice

príklad 10, Zistite hodnosť matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-4) \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -15 & -15 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je v schodovitom tvare $\Rightarrow$ jej hodnosť sa rovná počtu nenulových riadkov $\Rightarrow h(A) = 3$