$$3t u_t = x u_x$$

$$3t u_t - x u_x = 0 \qquad \begin{aligned} x &= x(s) \\ t &= t(s) \end{aligned}$$

$$u(t(s), x(s)) = 0 \qquad \dot{t} = 3t$$

$$u_t \cdot \dot{t} + u_x \cdot \dot{x} = 0 \qquad \dot{x} = -x$$

$$t = e^{3s} \cdot t_0 \quad \Rightarrow \quad \log t = 3s + \log t_0$$

$$x = e^{-s} \cdot x_0 \qquad \log\left(\frac{t}{t_0}\right) = 3s$$

$$s = \frac{\log\left(\frac{t}{t_0}\right)}{3}$$

$$x = e^{\frac{-\log\left(\frac{t}{t_0}\right)}{3}} \cdot x_0$$

$$= e^{\log\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{3}}} \cdot x_0 =$$

$$= \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot x_0 \;.$$

MATEMATIKA PRE OPTOMETROV

Príklad 1.) Určte maticu X, ktorá spĺňa rovnicu

$$B - XA = X,$$

kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$B - XA = X \quad / + XA$$

$$B = X + XA$$

$$B = X \cdot I + XA$$

$$B = X(I + A) \quad / \cdot (I + A)^{-1}$$

$$X = B \cdot (I + A)^{-1}$$

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matica $(I+A)$ je singulárna, nemá inverziu

$\Rightarrow$ úloha nemá riešenie

pozmenené zadanie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (I+A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = B \cdot (I+A)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

príklad 2.) Vypočítajte inverznú maticu k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad 3.) Spočítejte inverzní matici k

matici $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{3}{11} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{6}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{3}{11} \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

příklad 4.) Spočítejte inverzní matici k matici

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \quad \text{(samostatně)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -\frac{8}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{8}{3} & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

příklad 5.) Spočítejte inverzní matici k matici

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

matice D je singulární, nemá inverzní matici příklad 6.) Vypočítejte determinant matice $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 12 - 2 = 10$$

příklad 7.) Vypočítejte determinant matice $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Sarrusovo pravidlo

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{matrix} = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - (3 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 5)$$

$$= 18 + 60 + 2 - (9 + 16 + 15)$$

$$= 80 - 40 = 40$$

příklad 8.) Vypočítejte determinant matice $G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ (samostatně)

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= 168 + 40 - 16 - (-70 + 6 + 256) = 192 - 192 = 0$$

příklad 9.) Vypočítejte determinant matice $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- pripočítanie nejakého násobku riadku k inému riadku nemení hodnotu determinantu
- výmena dvoch riadkov mení znamienko determinantu

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

- determinant je lineárna funkcia riadkov => ak je nejaký riadok násobkom konštanty c, môžeme ju z tohto riadku vyňať pred determinant

$$= 4\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

- determinant hornej alebo dolnej trojuholníkovej matice sa rovná súčinu prvkov na hlavnej diagonále

$$= 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 8 = 32$$

príklad 10. Vypočítajte determinant matice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(samostatne)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Príklad 11.) Vypočítajte determinant matica

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 12 \\ -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Nech A je štvorcová matica $n \times n$

A_{ij} matica, kt. vznikne z A tak, že vynecháme i-ty riadok a j-ty stĺpec

Laplaceov rozvoj podľa i-teho riadku:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Laplaceov rozvoj podľa j-teho stĺpca

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 12 \\ -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{4+1}\cdot 0\cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 12 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} + (-1)^{4+2}\cdot 0\cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{4+3}\cdot 0\cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 12 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} + (-1)^{4+4}\cdot 4\cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 4\left((-1)^{1+3}\cdot 0\cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 0\cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + (-1)^{3+3}\cdot 1\cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 4 \det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 4\,(2\cdot(-1) - 0\cdot 5) = -8$$

příklad 12.) Vypočítejte determinant matice $L = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+3} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+3}\cdot(-3) \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1}\cdot 6 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot 1\cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$-3(-1)^{1+3}\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - 3\cdot(-1)^{2+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 6(5-2) - (10-4) + 3(2-6) + 3(3-6)$$

$$= 18 - 6 - 12 - 9 = -9$$

Příklad 13.) Vypočítejte determinant matice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+2}\cdot 7\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

Sarrusovo pravidlo

$$= -2\big(3+4-4-(-4+12+1)\big)$$

$$+7\big(2+16+6-(6+8+4)\big) =$$

$$= -2(3-9) + 7(24-18) = 12 + 42 = 54$$