MATEMATIKA PRE ~~EMBRYOLÓGOV~~ OPTOMETROV

cvičenie ~~X~~ 7.

riešenie sústav lineárnych rovníc – Gaussova eliminačná metóda

príklad 1) Rozhodnite, či nasledujúca sústava má riešenie. Ak áno, nájdite ho.

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$
$$2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2$$
$$3x_1 - x_3 + x_4 = -3$$
$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (\cdot 2) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 6 & 0 & -2 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot(-1) \\ \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array}$$

$h(A) = 4$, $h(A_r) = 4$ } sústava má riešenie

$n = 4 \Rightarrow$ sústava má práve jedno riešenie posledný riadok matice reprezentuje rovinu

$$3x_4 = -4 \Rightarrow x_4 = -\frac{4}{3}$$

3. riadok reprezentuje rovinu
$$-x_3 - 2x_4 = 1$$
$$-x_3 - 2\left(-\frac{4}{3}\right) = 1$$
$$x_3 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$$

2. riadok reprezentuje rovinu
$$3x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -7$$
$$3x_2 - 3\frac{5}{3} - 6\frac{4}{3} = -7$$
$$3x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 2$$

1. riadok reprezentuje rovinu
$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$$
$$2x_1 - 2 + \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 1$$
$$2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Riešenie sústavy je $\left(0, 2, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)^T$.

príklad 2) Rozhodnite, či nasledujúca sústava má riešenie. Ak áno, nájdite ho.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z + 2u &= 3 \\ 5x + 7y - 4z + 7u &= 8 \\ x + 2y + z - u &= 1 \\ 4x + 7y + z &= 5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & -4 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-5) \\ \cdot(-2) \\ \\ \cdot(-4) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -9 & 12 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -9 & 12 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-3) \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\left.\begin{array}{l} h(A) = 2 \\ h(A_r) = 2 \end{array}\right\}$ sústava má riešenie $\quad n = 4 \quad 4 - 2 = 2 \rightarrow$ riešenie je vyjadrené pomocou 2 parametrov

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z & u \end{array} \end{array}$$

premenné, ktoré prislúchajú stĺpcom, v ktorých sa nenachádza pivot - vedúci prvok (prvý nenulový prvok v danom riadku) si zvolíme ako parametre a tie ostatné pomocou nich vyjadríme

$\to$ pivoty

stĺpce v ktorých nie je pivot

$\Rightarrow$ z, u volíme ako parametre

$u = s$, $z = t$

$$-y - 3z + 4u = 1$$
$$-y - 3t + 4s = 1$$
$$y = -1 - 3t + 4s$$

$$x + 2y + z - u = 1$$
$$x + 2(-1 - 3t + 4s) + t - s = 1$$
$$x = 3 + 5t - 7s$$

Riešenie sústavy je $(3+5t-7s, -1-3t+4s, t, s) =$

$= (3, -1, 0, 0) + t(5, -3, 1, 0) + s(-7, 4, 0, 1).$

príklad 3.) Rozhodnite, či nasledujúca sústava má riešenie. Ak áno, nájdite ho.

$$3x - 2y + z = 11$$
$$x + y - 3z = 7$$
$$11x - 4y - 3z = 10$$
$$x - 2y + z = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \\ 11 & -4 & -3 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \\ 11 & -4 & -3 & 10 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-11) \\ \cdot(-3) \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 18 & -14 & 10 \\ 0 & 4 & -2 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot 3 \end{array} \sim$$

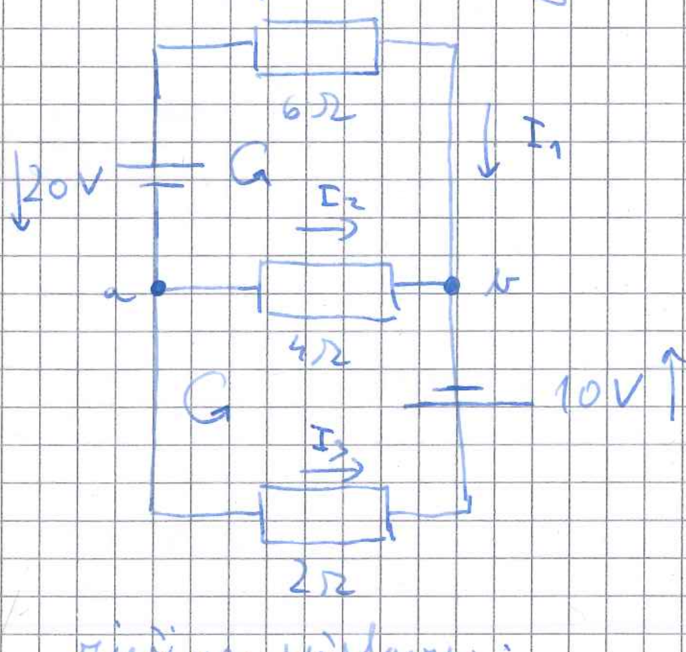
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 18 & -14 & 10 \\ 0 & 12 & -6 & 33 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-6) \\ \cdot(-4) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & -32 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 37 \end{array}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} h(A) = 3 \\ h(A_r) = 4 \end{array}\right\} \neq \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sústava nemá riešenie.

posledný riadok reprezentuje rovnicu $0 = 37$ – nech za premenné x, y, z dosadíme čokoľvek, táto rovnica nebude nikdy splnená

príklad 4.) Vypočítajte prúdy pretekajúce jednotlivými vetvami nasledujúceho elektrického obvodu. Použite Kirchhoffove zákony.



uzol a: $-I_1 - I_2 - I_3 = 0$

uzol b: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

horná slučka:

$$20 + 4I_2 - 6I_1 = 0$$

dolná slučka:

$$2I_3 + 10 - 4I_2 = 0$$

riešime sústavu:

$$\begin{aligned} -I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \\ -6I_1 + 4I_2 \quad &= -20 \\ -4I_2 + 2I_3 &= -10 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & -20 \\ 0 & -4 & 2 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & -20 \\ 0 & -4 & 2 & -10 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 10 & 6 & | & -20 \\ 0 & -4 & 2 & | & -10 \end{pmatrix} \cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 2 & | & -10 \\ 0 & 20 & 12 & | & -40 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \cdot 5$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 2 & | & -10 \\ 0 & 0 & 22 & | & -90 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{I_3 = -\frac{90}{22} = -\frac{45}{11}}$$

$$-4I_2 + 2I_3 = -10$$

$$-4I_2 - 2\,\frac{45}{11} = -10$$

$$-4I_2 = -10 + \frac{90}{11} = \frac{-20}{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{5}{11}}$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$I_1 + \frac{5}{11} - \frac{45}{11} = 0$$

$$\boxed{I_1 = \frac{40}{11}}$$

príklad 5.) zliatina A obsahuje
1,5 % Si, 1,4 % Mn, 0,4 % P, 0,3 % S
zliatina B obsahuje
0,5 % Si 1,6 % Mn, 0,2 % P, 0,2 % S
zliatina C obsahuje
3 % Si, 0,5 % Mn, 0,5 % P, 0,05 % S

Koľko z každej zliatiny A, B, C potrebujeme na výrobu 100 kg zliatiny D, ktorá by obsahovala
2 % Si, 1 % Mn, 0,4 % P, 0,15 % S ?

~~Skr~~

množstvo zliatiny A ... x kg
—||— B ... y kg
—||— C ... z kg

$\cancel{Si: \frac{1,5}{100}x + \frac{1,4}{100}y}$

V zliatine D má byť:
2 kg Si, 1 kg Mn,
0,4 kg P, 0,15 kg S

$$\text{Si}: \quad \frac{1,5}{100}x + \frac{0,5}{100}y + \frac{3}{100}z = 2$$

$$\text{Mn}: \quad \frac{1,4}{100}x + \frac{1,6}{100}y + \frac{0,5}{100}z = 1$$

$$\text{P}: \quad \frac{0,4}{100}x + \frac{0,2}{100}y + \frac{0,5}{100}z = 0,4$$

$$\text{S}: \quad \frac{0,3}{100}x + \frac{0,2}{100}y + \frac{0,05}{100}z = 0,15$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1,5}{100} & \frac{0,5}{100} & \frac{3}{100} & 2 \\ \frac{1,4}{100} & \frac{1,6}{100} & \frac{0,5}{100} & 1 \\ \frac{0,4}{100} & \frac{0,2}{100} & \frac{0,5}{100} & 0,4 \\ \frac{0,3}{100} & \frac{0,2}{100} & \frac{0,05}{100} & 0,15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 5 & 30 & 2000 \\ 14 & 16 & 5 & 1000 \\ 4 & 2 & 5 & 400 \\ \cancel{20}\,30 & 20 & 5 & 1500 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 400 \\ 14 & 16 & 5 & 1000 \\ 4 & 2 & 5 & 400 \\ 6 & 4 & 1 & 300 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot 3 \\ \cdot 3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 400 \\ 42 & 48 & 15 & 3000 \\ 12 & 6 & 15 & 1200 \\ 6 & 4 & 1 & 300 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 400 \\ 0 & 34 & -69 & -\cancel{3400}\ 2600 \\ 0 & 2 & -9 & -400 \\ 0 & 2 & -11 & -500 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 400 \\ 0 & 2 & -11 & -500 \\ 0 & 2 & -9 & -400 \\ 0 & 34 & -69 & -2600 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 400 \\ 0 & 2 & -11 & -500 \\ 0 & 0 & 2 & 100 \\ 0 & 0 & 118 & 5900 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 400 \\ 0 & 2 & -11 & -500 \\ 0 & 0 & 2 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{z = 50}$$

$$2y - 11z = -500$$
$$2y - 550 = -500$$
$$\boxed{y = 25}$$

$$3x + y + 6z = 400$$
$$3x + \cancel{\ldots}\ 325 = 400$$
$$\boxed{x = 25}$$

príklad 6.) Vypočítajte stechiometrické koeficienty pre nasledujúce reakcie:

a) $a_1\, NH_3 + a_2\, O_2 \rightarrow a_3\, N_2 + a_4\, H_2O$

b) $a_1\, C_2H_4O + a_2\, O_2 \rightarrow a_3\, CO + a_4\, H_2O$

c) $a_1\, KMnO_4 + a_2\, HCl \rightarrow a_3\, MnCl + a_4\, Cl_2 + a_5\, KCl + a_6\, H_2O$

a) N: $a_1 - 2a_3 = 0$

H: $3a_1 - 2a_4 = 0$

O: $2a_2 - a_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \updownarrow \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

pivoty

premennú a_4 volíme ako parameter

$a_4 = k$

$6a_3 - 2a_4 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{k}{3}$

$2a_2 - a_4 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{k}{2}$

$a_1 - 2a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3}k$

Všeobecné riešenie je $\left(\frac{2}{3}k, \frac{1}{2}k, \frac{1}{3}k, k\right)$

Ak zvolíme $k = 6$, dostaneme celočíselné stechiometrické koeficienty:

$a_4 = 6$

$a_3 = 2$

$a_2 = 3$

$a_1 = 4$

b) a c) je na domácu úlohu

príklad 7.) K matici C nájdite inverznú maticu C^{-1}.

$$C = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) - \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) + \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) :(-4) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \cdot(2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \cdot 6 \; + \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & -2 & \frac{11}{4} & -\frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot(-3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 & -8 \\ 7 & 8 & -11 & 13 \\ -6 & 0 & 6 & -6 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

DOMÁCA ÚLOHA:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$