

# MATEMATIKA PRE OPTOMETROV

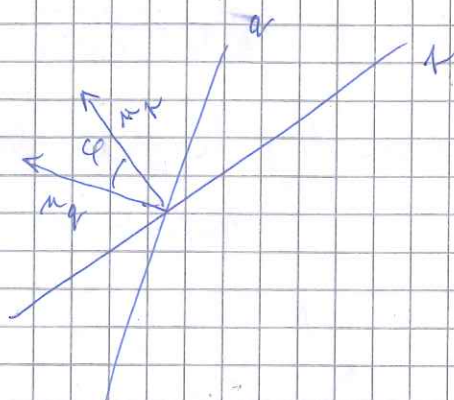
## účenie 8.

príklad 1.) Vypočítajte odchýlku (uhol) priamok

$$p: 5y - 2 = 0$$

$$q: -4x + 2y + 7 = 0$$

$$m_p = (0, 5) \quad m_q = (-4, 2)$$



$$\cos \varphi = \frac{m_p \cdot m_q}{\|m_p\| \cdot \|m_q\|} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{20}} = \frac{10}{5 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi \approx 63,43^\circ$$

príklad 2.) Nájdite rovnicu priamky p vreckovej bodnic P = [1, -4] a Q = [6, 8] od bodu A = [3, 6]

$$\Delta_p = \vec{PQ} = Q - P = (5, 12)$$

$$m_p = (12, -5)$$

$$p: 12x - 5y + c = 0$$

$$P \in p \Rightarrow 12 \cdot 1 - 5 \cdot (-4) + c = 0$$

$$\Rightarrow c = -32$$

rovnicu p a A  $d = \frac{|12 \cdot 3 - 5 \cdot 6 - 32|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{26}{13} = 2$

príklad 3.) Nájdite priesečník priamok AB a CD, kde A = [1, 0], B = [3, 2], C = [-1, 5], D = [3, 2]

$$p = AB \quad \Delta_p = \vec{AB} = B - A = (2, 2) \Rightarrow m_p = (2, -2)$$

$$q = CD \quad \Delta_q = \vec{CD} = D - C = (4, -3) \Rightarrow m_q = (3, 4)$$

$$p: 2x - 2y + c = 0, \quad A \in p \Rightarrow 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -2$$

$$q: 3x + 4y + d = 0 \quad (C \in q) \Rightarrow -3 + 20 + d = 0 \Rightarrow d = -17$$

priesečník je riešenie systému

$$\begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ 3x + 4y = 17 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 17 \\ 3 & 4 & 17 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 17 \\ 0 & 7 & 17 \end{array} \right) \Rightarrow y = \frac{17}{7} = 2$$

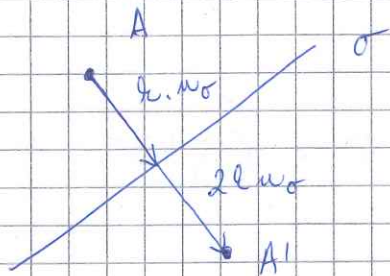
~~$$x = 1 + y = 3$$~~

$$x = 1 + y = 3$$

~~$$L \cap q = \left\{ \left[ \frac{17}{7}, \frac{17}{7} \right] \right\}$$~~

$$\left\{ \left[ 3, 2 \right] \right\}$$

príklad 4.) Najdite bod súmerne odrážajúci bodu  $A = [1, 0]$  podľa osi  $\sigma: x - 2y + 4 = 0$



$$\nu_\sigma = (1, -2)$$

$$A + \lambda \nu_\sigma \in \sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + \lambda \cdot 1) - 2 \cdot (0 - 2 \cdot \lambda) + 4 = 0$$

$$5\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\Rightarrow A' = A + 2\lambda \nu_\sigma = [1, 0] - 2(1, -2) = [-1, 4]$$

príklad 5.) Rôzhodnite o vzájomnej polohe priamok:

a)  $f: x = 3 + t$   
 $y = 1 + 4t, t \in \mathbb{R}$

b)  $-2x + 2y + 3 = 0$   
 $x - y + 6 = 0$

$$g: -x - 4y + 11 = 0$$

a)  $\Delta_f = (1, 4) \Rightarrow \nu_f = (4, -1)$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -16 - 1 = -17 \neq 0$$

$\Rightarrow$  rovnobežne

preveril:  $-(3+t) - 4(1+4t) + 11 = 0$

$$4 - 17t = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{4}{17}$$

$$L \cap g = \left\{ \left[ \frac{55}{17}, \frac{33}{17} \right] \right\}$$

b)  $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$

$\Rightarrow$  rovnobežne

$$\left( \begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 15 \end{array} \right)$$

hodnota = 2

$\Rightarrow$  rovnobežne rôzne

příklad 6.) Určete všeobecnou a parametrickou rovnici roviny  $\rho$ ,  
která je dána bodmi  $A = [2, 1, 3]$ ,  $B = [-1, 2, -1]$

$$C = [3, 4, 2]$$

parametričká:  $\Delta_1 = \vec{AB} = B - A = (-3, 1, -4)$

$$\Delta_2 = \vec{AC} = C - A = (1, 3, -1)$$

$$\rho: \begin{cases} x = 2 + (-3)\Delta + k \\ y = 1 + \Delta + 3k \\ z = 3 + (-4)\Delta - k \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

všeobecná:  $n_{\rho} = \Delta_1 \times \Delta_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= \left( \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (11, -7, -10)$$

$$11x - 7y - 10z + d = 0$$

$$A \in \rho \Rightarrow 2 \cdot 11 - 7 \cdot 1 - 10 \cdot 3 + d = 0 \Rightarrow d = 15$$

$$\boxed{11x - 7y - 10z + 15 = 0}$$

příklad 7.) Určete vzdálenost bodu  $B = [-6, -9, 5]$  od  
roviny  $\rho: -7x + 3y + 3z + 8 = 0$

$$d = \frac{|-7 \cdot (-6) + 3 \cdot (-9) + 3 \cdot 5 + 8|}{\sqrt{(-7)^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{38}{\sqrt{67}}$$

příklad 8.) Vypočítejte odchýlku rovin  $\rho: 6x - y + z - 9 = 0$

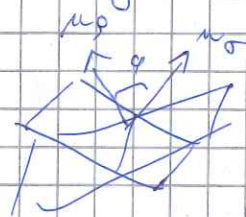
$$\sigma: -9x + 5y - 6z + 9 = 0$$

$$n_{\rho} = (6, -1, 1) \quad n_{\sigma} = (-9, 5, -6)$$

$$\cos \varphi = \frac{n_{\rho} \cdot n_{\sigma}}{\|n_{\rho}\| \cdot \|n_{\sigma}\|} =$$

$$= \frac{-54 - 5 - 6}{\sqrt{38} \sqrt{112}} = \frac{-65}{\sqrt{38} \sqrt{112}} \Rightarrow \varphi \approx 152,2^{\circ}$$

ODCHÝLKA ...  $27,8^{\circ}$



príklad 9.) Write vzdialenosť bodu  $B = [-3, 4, -3]$  od  
 priamky  $p: A + \lambda u$ , kde  $A = [-2, 1, -2]$ ,  $u = (2, 1, 1)$

Konštruujeme rovinu  $P$ , v ktorej leží  $B$  a je kolmá na  $p$ .  
 V priesečníku  $P$  a  $p$  sa realizuje vzdialenosť  $B$  od  $p$ .

$$n_P = u = (2, 1, 1) \quad P: 2x + y + z + d = 0$$

$$B \in P \Rightarrow 2 \cdot (-3) + 4 - 3 + d = 0 \Rightarrow d = -7$$

$$P: 2x + y + z - 7 = 0$$

$$p \cap P: 2(-2 + 2\lambda) + (1 + 1 \cdot \lambda) + (-2 + 1 \cdot \lambda) - 7 = 0$$

$$6\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$A + 2u = [-2, 1, -2] + 2(2, 1, 1) = [2, 3, 0] = X$$

vzdialenosť  $B$  od  $p$  je veľkosť vektora  $\vec{BX}$

$$\vec{BX} = X - B = (-1, -1, 3)$$

$$|\vec{BX}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

príklad 10.) Vypočítajte vzdialenosť priamok

$p: A + \lambda u$ ,  $q: B + \mu v$ , kde

$$A = [2, -1, -1], B = [5, 1, 3], u = (2, 0, 1), v = (4, 0, 2)$$

$v = 2u \Rightarrow$  priamky sú rovnobežné

$\Rightarrow$  stačí vypočítať vzdialenosť  $A$  od  $q$   
 alebo  $B$  od  $p$

alebo  $v$  predloženou príkladu

príklad 11.) Vypočítajte vzdialenosť priamok

$p: A + \lambda m$ ,  $q: B + \mu v$ , kde

$$A = [2, 2, 0], B = [9, -1, 3], m = (-2, 3, 1), v = (-1, 2, 1)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{bodnosť 2}$$

$\Rightarrow$  priamky nie sú rovnobežné

$\Rightarrow$  sú buď rovnoberné (majú priesek) alebo  
 mimoberné (nemajú priesek a majú rovnú  
 vzdialenosť)

$$\begin{aligned}
 p \cap q: \quad 2 - 2\lambda &= 4 - \lambda & -2\lambda + \lambda &= 2 \\
 2 + 3\lambda &= -1 + 2\lambda & \Leftrightarrow 3\lambda - 2\lambda &= -3 \\
 0 + \lambda &= 3 + \lambda & \lambda - \lambda &= 3
 \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

nemať riešenie  $\Rightarrow$  sú mimoberné

vzdialenosť  $p$  od  $q$  = vzdialenosť  $q$  od roviny  
 $P$ , v ktorej leží  $p$  a jej normálny vektor je  
 kolmý na smeroví vektory  $p$  a  $q$

$$\begin{aligned}
 n_p &= \Delta_p \times \Delta_q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\
 &= (1, 1, -1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P: x + y - z + d &= 0 & A \in P &\Rightarrow 2 + 2 - 0 + d = 0 \\
 & & &\Rightarrow d = -4
 \end{aligned}$$

$$P: x + y - z - 4 = 0$$

vzdialenosť  $P$  od  $q$  je vzdialenosť ľub. bodu  $q$  od  $P$   
 (napr.  $B$ )

$$d = \frac{|4 - 1 - 3 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

príklad 12.) Určte vzájomnú polohu priamky a roviny, vypočítajte odchýľku a nájdite ich priesečník.

$$a) \quad \begin{aligned} \rho &= \{x=1, y=2+x, z=0\} & b) \quad \rho &= AB, \quad A=[3, -1, 4] \\ & \rho: -2x + 2y - z = 0 & & \quad B=[4, -1, 2] \\ & & & \quad \rho: 2x - y + 3z - 7 = 0 \end{aligned}$$

$$a) \quad \begin{aligned} \Delta_{\rho} &= (1, 1, 0) \\ \mu_{\rho} &= (-2, 2, -1) \end{aligned} \quad \Delta_{\rho} \cdot \mu_{\rho} = -2 + 2 + 0 = 0$$

$\Rightarrow \rho \parallel \rho$

$$-2 \cdot 1 + 2(2+1) - 0 = 0 \Leftrightarrow 4 = 0 \Rightarrow \rho \cap \rho = \emptyset$$

$$b) \quad \begin{aligned} \Delta_{\rho} &= \vec{AB} = B - A = (1, 0, -2) \\ \mu_{\rho} &= (2, -1, 3) \end{aligned} \quad \Delta_{\rho} \cdot \mu_{\rho} = 2 - 6 = -4 \neq 0$$

$\rho, \rho$  nie sú rovnobežné

$$\rho \cap \rho: \quad \begin{aligned} 2(3+x) - (-1+0 \cdot x) + 3(4-2x) - 7 &= 0 \\ 12 - 4x &= 0 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \cap \rho &= \{ \vec{A} + 3 \Delta_{\rho} \} \\ &= \{ [6, -1, -2] \} \end{aligned}$$

odchýľka:  $\sin \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{|\mu_{\rho} \cdot \Delta_{\rho}|}{|\mu_{\rho}| \cdot |\Delta_{\rho}|} =$

$$= \frac{|2 - 6|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{70}}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{4}{\sqrt{70}} \approx 28,56^{\circ}$$

úllad 13. Najdte rovnici elipsy, kt. vedlajšie vrcholy  
 sú  $C = [3, 7]$ ,  $D = [-5, 7]$  a ohnisko  $F = [-1, 4]$

$$\text{stred } S = \frac{C+D}{2} = [-1, 7]$$

$$\begin{aligned} \text{druhé ohnisko } F_2 &= F + 2\vec{FS} \\ &= [-1, 4] + 2 \cdot (0, 3) = [-1, 10] \end{aligned}$$

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-7)^2}{b^2} = 1$$

$$a = |\vec{SC}| = \sqrt{16+0} = 4$$

$$e = |\vec{FS}| = 3$$

$$b^2 = a^2 - e^2 = 16 - 9 = 7$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{7} = 1$$

úllad 14. Najdite rovnici paraboly vrchnej ohniskom  
 $F = [6, 4]$  a riadnicou priamkou  $q: x=2$ .

$$\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} \quad |^2$$

↓  
 vzdialenosť bodu  
 od priamky

~~$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 8y + 16$$~~

$$8x + 4 = y^2 - 8y + 52$$

$$8x + 4 = (y-4)^2 - 16 + 52$$

$$8x - 32 = (y-4)^2$$

$$8(x-4) = (y-4)^2$$

úllad 15. Najdite stred, ohniská a hlavné vrcholy  
 hyperboly danej rovnicou

$$9x^2 - 90x - 16y^2 - 96y + 225 = 0$$

$$9(x^2 - 10x) - 16(y^2 + 6y) + 225 = 0$$

$$9((x-5)^2 - 25) - 16((y+3)^2 - 9) + 225 = 0$$

$$9(x-5)^2 - 225 - 16(y+3)^2 + 9 \cdot 16 + 225 = 0$$

$$\frac{(x-5)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = -1$$

$$-\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

STRED MÁ SÚRADNICE  $S = [5, -3]$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow c = \sqrt{16 + 9} = 5$$

OHNISKÁ MÁJÚ ROVNAKÚ  $x$ -OVÚ SÚRADNICU

$$F_1 = S + (0, 5) = [5, 2]$$

$$F_2 = S - (0, 5) = [5, -8]$$

VRCHOLY MÁJÚ VZDIALENOSŤ  $b$  OD STREDU

$$V_1 = S + (0, 3) = [5, 0]$$

$$V_2 = S - (0, 3) = [5, -6]$$

