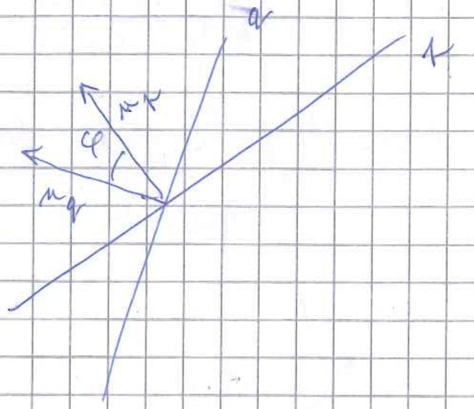
MATEMATIKA PRE OPTOMETROV

cvičenie 8.

príklad 1.) Vypočítajte odchýlku (uhol) priamok

$$p: 5y - 2 = 0$$
$$q: -4x + 2y + 7 = 0$$



$n_p = (0,5) \quad n_q = (-4,2)$

$$\cos\varphi = \frac{n_p \cdot n_q}{\|n_p\| \cdot \|n_q\|} = \frac{10}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{20}} = \frac{10}{5\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi \approx 63{,}43°$$

príklad 2.) Určte vzdialenosť priamky p určenej bodmi $P = [1,-4]$ a $Q = [6,8]$ od bodu $A = [3,6]$

$s_p = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (5,12)$

$n_p = (12,-5) \qquad p: 12x - 5y + c = 0$

$P \in p \Rightarrow 12\cdot 1 - 5\cdot(-4) + c = 0$

$\Rightarrow c = -32$

vzdialenosť p a A: $d = \dfrac{|12\cdot 3 - 5\cdot 6 - 32|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \dfrac{26}{13} = 2$

príklad 3.) Určte priesečník priamok AB a CD, kde $A = [1,0]$, $B = [3,2]$, $C = [-1,5]$, $D = [3,2]$

$p = AB \quad s_p = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,2) \Rightarrow n_p = (2,-2)$

$q = CD \quad s_q = \overrightarrow{CD} = D - C = (4,-3) \Rightarrow n_q = (3,4)$

$p: 2x - 2y + c = 0$, $A \in p \Rightarrow 2\cdot 1 - 2\cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -2$

$q: \cancel{2x}\ 3x + 4y + d = 0 \quad C \in q \Rightarrow -3 + 20 + d = 0 \Rightarrow d = -17$

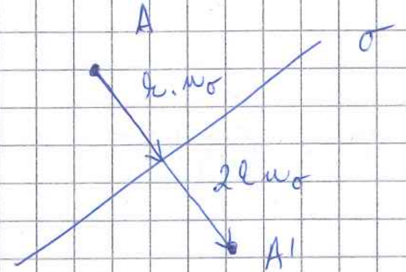
priesečník je riešenie systému
$$2x - 2y = 2$$
$$3x + 4y = 17$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 14 \end{array}\right) \Rightarrow y = \frac{14}{7} = 2$$

$$x = 1 + y = 3$$

$$p \cap q = \{[3,2]\}$$

príklad 4.) Nájdite bod súmerne združený s bodom $A = [1,0]$ podľa osi $o: x - 2y + 4 = 0$



$n_o = (1,-2)$

$A + k n_o \in o \Rightarrow$

$\Rightarrow (1 + k\cdot 1) - 2\cdot(0 - 2\cdot k) + 4 = 0$

$5k + 5 = 0 \Rightarrow k = -1$

$\Rightarrow A' = A + 2k n_o = [1,0] - 2(1,-2) = [-1,4].$

príklad 5.) Rozhodnite o vzájomnej polohe priamok:

a) $p: \begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = 1 + 4t \end{array}, t \in \mathbb{R}$

$q: -x - 4y + 11 = 0$

b) $-2x + 2y + 3 = 0$

$x - y + 6 = 0$

a) $s_p = (1,4) \Rightarrow n_p = (4,-1)$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -16 - 1 = -17 \neq 0$$

$\Rightarrow$ rôznobežné

prienik: $-(3+t) - 4(1+4t) + 11 = 0$

$4 - 17t = 0$

$\Rightarrow t = \frac{4}{17}$

$$p \cap q = \left\{\left[\frac{55}{17}, \frac{33}{17}\right]\right\}$$

b) $$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

$\Rightarrow$ rovnobežné

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

hodnosť $= 2$

$\Rightarrow$ rovnobežné rôzne

príklad 6) Určte všeobecnú a parametrickú rovnicu roviny ρ, ktorá je daná bodmi $A=[2,1,3]$, $B=[-1,2,-1]$, $C=[3,4,2]$

parametrická: $s_1 = \overrightarrow{AB} = B-A = (-3,1,-4)$

$s_2 = \overrightarrow{AC} = C-A = (1,3,-1)$

$$\rho:\quad \begin{aligned} x &= 2 - 3s + t \\ y &= 1 + s + 3t \\ z &= 3 - 4s - t \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

všeobecná: $n_\rho = s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= \left(\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (11, -7, -10)$$

$11x - 7y - 10z + d = 0$

$A \in \rho \Rightarrow 2\cdot 11 - 7\cdot 1 - 10\cdot 3 + d = 0 \Rightarrow d = 15$

$$\boxed{11x - 7y - 10z + 15 = 0}$$

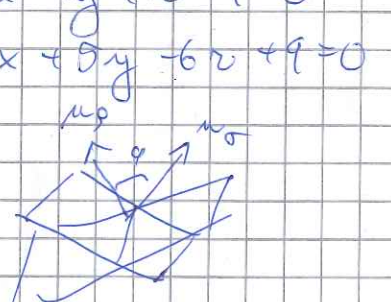
príklad 7) Určte vzdialenosť bodu $B=[-6,-9,5]$ od roviny $\rho: -7x + 3y + 3z + 8 = 0$

$$d = \frac{|-7\cdot(-6) + 3\cdot(-9) + 3\cdot 5 + 8|}{\sqrt{(-7)^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{38}{\sqrt{67}}$$

príklad 8) Vypočítajte odchýlku rovín $\rho: 6x - y + z - 9 = 0$

$\sigma: -9x + 5y - 6z + 9 = 0$

$n_\rho = (6,-1,1) \quad n_\sigma = (-9,5,-6)$



$$\cos\varphi = \frac{n_\rho \cdot n_\sigma}{\|n_\rho\|\cdot\|n_\sigma\|} =$$

$$= \frac{-54 - 5 - 6}{\sqrt{38}\,\sqrt{142}} = \frac{-65}{\sqrt{38}\,\sqrt{142}} \Rightarrow \varphi \approx 152{,}2^\circ$$

ODCHÝLKA ... $27{,}8^\circ$

príklad 9.) Určite vzdialenosť bodu $B = [3, 4, -3]$ od priamky $p: A + su$, kde $A = [-2, 1, -2]$, $u = (2, 1, 1)$

Skonštruujeme rovinu ρ, v ktorej leží B a je kolmá na p. V priesečníku ρ a p sa realizuje vzdialenosť B od p.

$$n_\rho = u = (2,1,1) \qquad \rho: 2x + y + z + d = 0$$

$$B \in \rho \Rightarrow 2\cdot 3 + 4 - 3 + d = 0 \Rightarrow d = -7$$

$$\rho: 2x + y + z - 7 = 0$$

$$p \cap \rho: \quad 2(-2 + 2s) + (1 + 1\cdot s) + (-2 + 1\cdot s) - 7 = 0$$

$$6s = 12 \Rightarrow s = 2$$

$$A + 2u = [-2, 1, -2] + 2(2, 1, 1) = [2, 3, 0] = X$$

vzdialenosť B od p je veľkosť vektora $\overrightarrow{BX}$

$$\overrightarrow{BX} = X - B = (-1, -1, 3)$$

$$|\overrightarrow{BX}| = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$$

príklad 10.) Vypočítajte vzdialenosť priamok $p: A + su$, $q: B + s v$, kde $A = [2, -1, -1]$, $B = [5, 1, 3]$, $u = (2, 0, 1)$, $v = (4, 0, 2)$

$v = 2u \Rightarrow$ priamky sú rovnobežné
$\Rightarrow$ stačí spočítať vzdialenosť A od q alebo B od p

tak ako v predošlom príklade

príklad 11.) Vypočítajte vzdialenosť priamok $p: A + su$, $q: B + sv$, kde $A = [2, 2, 0]$, $B = [4, -1, 3]$, $u = (-2, 3, 1)$, $v = (-1, 2, 1)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{hodnosť } 2$$

$\Rightarrow$ priamky nie sú rovnobežné

$\Rightarrow$ sú buď rôznobežné (majú priesečník) alebo mimobežné (nemajú priesečník a majú nenulovú vzdialenosť)

$p \cap q: \quad \begin{aligned} 2-2s &= 4-t \\ 2+3s &= -1+2t \\ 0+s &= 3+t \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -2s+t &= 2 \\ 3s-2t &= -3 \\ s-t &= 3 \end{aligned}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

nemá riešenie $\Rightarrow$ sú mimobežné

vzdialenosť p od q = vzdialenosť q od roviny ρ, v ktorej leží p a jej normálový vektor je kolmý na smerové vektory p a q

$$n_\rho = s_p \times s_q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (1, 1, -1)$$

$\rho: x+y-z+d=0 \qquad A \in \rho \Rightarrow 2+2-0+d=0$
$\Rightarrow d=-4$

$\rho: x+y-z-4=0$

vzdialenosť ρ od q je vzdialenosť ľub. bodu q od ρ (napr. B)

$$d = \frac{|4-1-\cancel{6}3-4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

príklad 12.) Urči vzájomnú polohu priamky a roviny, vypočítaj odchýlku a nájdi ich priesečník.

a) $p: \{x = t,\ y = 2+t,\ z = 0\}$ b) $p = AB$, $A = [3,-1,4]$

$\rho: -2x + 2y - z = 0$ $B = [4,-1,2]$

$\rho: 2x - y + 3z - 7 = 0$

a) $s_p = (1,1,0)$

$n_\rho = (-2,2,-1)$ $s_p \cdot n_\rho = -2 + 2 + 0 = 0$

$\Rightarrow p \parallel \rho$

$-2t + 2(2+t) - 0 = 0 \Leftrightarrow 4 = 0 \Rightarrow p \cap \rho = \emptyset$

b) $s_p = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,0,-2)$

$n_\rho = (2,-1,3)$ $s_p \cdot n_\rho = 2 - 6 = -4 \neq 0$

p, ρ nie sú rovnobežné

$p \cap \rho: \ 2(3+t) - (-1+0\cdot t) + 3(4-2t) - 7 = 0$

$12 - 4t = 0 \Rightarrow t = 3$

$p \cap \rho = \{A + 3 s_p\}$

$= \{[6,-1,-2]\}$

odchýlka: $\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \dfrac{|n_\rho \cdot s_p|}{|n_\rho| \cdot |s_p|} =$

$= \dfrac{|2-6|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{70}}$

$\varphi = \arcsin \dfrac{4}{\sqrt{70}} \approx 28{,}56°$

príklad 13. Napíš rovnicu elipsy, ak vedľajšie vrcholy sú $C=[3;7]$, $D=[-5,7]$ a ohnisko $F=[-1,4]$

stred $S = \frac{C+D}{2} = [-1,7]$

druhé ohnisko $F_2 = F + 2\vec{FS}$
$= [-1,4] + 2\cdot(0,3) = [-1,10]$

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-7)^2}{b^2} = 1 \qquad a = |\vec{SC}| = \sqrt{16+0} = 4$$

$$e = |\vec{FS}| = 3$$

$$\cancel{b^2 = a^2 - e^2 = 16 - 9 = 7}$$

$$b^2 = a^2 + e^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{\cancel{7}\ 25} = 1$$

(DĹŽKA HL. POLOOSI)^2 = (DĹŽKA VEDĽ. POLOOSI)^2 + e^2

príklad 14. Nájdite rovnicu paraboly určenej ohniskom $F=[6,4]$ a riadiacou priamkou $q: x=2$.

$$\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2} \quad /^2$$

vzdialenosť bodu od priamky

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 8y + 16$$

$$8x + 4 = y^2 - 8y + 52$$

$$8x + 4 = (y-4)^2 - 16 + 52$$

$$8x - 32 = (y-4)^2$$

$$8(x-4) = (y-4)^2$$

príklad 15. Nájdite stred, ohniská a hlavné vrcholy hyperboly danej rovnicou

$$9x^2 - 90x - 16y^2 - 96y + 225 = 0$$

$$9(x^2 - 10x) - 16(y^2 + 6y) + 225 = 0$$

$$9((x-5)^2 - 25) - 16((y+3)^2 - 9) + 225 = 0$$

$$9(x-5)^2 - 225 - 16(y+3)^2 + 9\cdot 16 + 225 = 0$$

$$\frac{(x-5)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = -1$$

$$-\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

STRED MÁ SÚRADNICE $S = [5, -3]$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$e^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow e = \sqrt{16+9} = 5$

OHNISKÁ MAJÚ ROVNAKÚ x-OVÚ SÚRADNICU

$F_1 = S + (0,5) = [5, 2]$

$F_2 = S - (0,5) = [5, -8]$

VRCHOLY MAJÚ VZDIALENOSŤ b OD STREDU

$V_1 = S + (0,3) = [5, 0]$

$V_2 = S - (0,3) = [5, -6]$