MB152 Diferenciálny a integrálny počet, skupina 7, 1. cvičenie, 25.9.2024

Limita a spojitosť funkcie

Na začiatok uvedieme a pripomenieme niektoré pravidlá pre počítanie s limitami, aby sme sa na ne mohli odvolávať. Všetky môžu byť dohľadané v [1], [2] alebo [3].

Veta 1. *Nech* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *a* $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$*, kde* $L, M \in \mathbb{R}$ *a* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*. Potom platí:*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = L \pm M, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = L \cdot M, \tag{2}$$

$$\text{Ak } M \neq 0, \text{ tak tiež } \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L}{M}. \tag{3}$$

Veta 2. *Platia nasledujúce rovnosti:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \tag{5}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1 \tag{6}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{7}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \tag{8}$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(\begin{array}{c}\text{funkcia ohraničená}\\ \text{na nejakom okolí } x_0\end{array}\right) \cdot (\text{funkcia} \to 0) = 0 \tag{9}$$

Definícia 3. Funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď je definovaná funkčná hodnota $f(x_0)$, limita $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje a je vlastná a zároveň platí rovnosť $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Počítanie limity v bode, v ktorom je daná funkcia spojitá, je jednoduché - do jej predpisu stačí tento bod dosadiť.

Veta 4. *Ak sú funkcie* f *a* g *spojité v bode* x_0*, potom sú v tomto bode spojité aj funkcie* $f \pm g$*,* $f \cdot g$ *a za predpokladu* $g(x_0) \neq 0$ *je spojitá aj funkcia* $\frac{f}{g}$*.*

Veta 5. *Nech* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*. Ak* $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$ *a funkcia* f *je spojitá v bode* M*, potom platí*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(M). \tag{10}$$

Ak je g *spojitá v* x_0 *a* f *je spojitá v* $g(x_0)$*, potom je aj funkcia* $f \circ g$ *spojitá v bode* x_0*.*

Dôsledok 6. *Polynómy, exponenciálne a logaritmické funkcie, goniometrické a cyklometrické funkcie, všeobecná mocnina a všetky funkcie, ktoré z vyššie uvedených vzniknú aplikáciou konečného počtu operácií sčitovania, odčitovania, násobenia, delenia a skladania sú na svojich definičných oboroch spojité funkcie.*

Príklad 7. Z definície limity dokážte, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Potrebujeme ukázať, že pre každé $A > 0$ existuje $\delta > 0$ s nasledujúcou vlastnosťou: pre každé $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ platí $\frac{1}{x^2} > A$. Nech teda máme dané ľubovoľné $A > 0$. Upravujme nerovnicu $\frac{1}{x^2} > A$:

$$\frac{1}{x^2} > A \Leftrightarrow 1 > Ax^2 \Leftrightarrow \frac{1}{A} > x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{A}} > |x|\,.$$

Zvoľme preto $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$. Ak $x \in (-\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{A}}) \setminus \{0\}$, potom zrejme $|x| < \frac{1}{\sqrt{A}}$ a podľa predošlých výpočtov z toho vyplýva platnosť nerovnosti $\frac{1}{x^2} > A$. Presne to sme chceli ukázať. ✈

Príklad 8. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}.$$

Limita je typu $\frac{0}{0}$, čo znamená, že priame dosadenie nám v jej výpočte nepomôže. Pripomeňme vzorec $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Ak zvolíme $a=\sqrt[3]{1+x^2}$ a $b=1$, potom môžeme vhodným rozšírením daného zlomku upraviť čitateľa na tvar $a^3-b^3=x^2$, ktorý sa následne vykráti s tým istým výrazom v menovateli.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} \cdot \frac{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1+x^2}+1} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-1}{x^2((1+x^2)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2((1+x^2)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1+x^2}+1} \\
&= \frac{1}{(1+0^2)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1+0^2}+1} = \frac{1}{3} && \text{(definícia 3 a dôsledok 6)}
\end{aligned}$$

✈

Príklad 9. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)+\tan^2(x)}{x\sin(x)}.$$

Keďže je limita opäť typu $\frac{0}{0}$, musíme daný výraz upraviť.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)+\tan^2(x)}{x\sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos^2(x)} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2(x)} && \text{((1) a (2))} \\
&= 1 + 1\cdot 1 = 2. && \text{((7), definícia 3 a dôsledok 6)}
\end{aligned}$$

✈

Príklad 10. Vypočítajte limitu

$$\lim_{x\to 0} (x^2+3)^{\frac{\sin x}{x}}.$$

Ani v tomto prípade nemôžeme využiť spojitosť a jednoducho dosadiť 0 do daného výrazu. Tiež na prvý pohľad nie je zrejmé, či sa dá daná funkcia napísať ako zloženie $f\circ g$, kde f je spojitá v $\lim_{x\to 0} g(x)$. Preto využijeme vzťah $A=\mathrm{e}^{\log A}$, kde $A>0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} (x^2+3)^{\frac{\sin x}{x}} &= \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{\sin x}{x}\cdot \log(x^2+3)} \\
&= \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot \log(x^2+3)} && \text{((10) na } \mathrm{e}^x\text{)} \\
&= \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot \lim_{x\to 0} \log(x^2+3)} && \text{((2))} \\
&= \mathrm{e}^{1\cdot \log \lim_{x\to 0}(x^2+3)} && \text{((7) a (10) na } \log x\text{)} \\
&= \mathrm{e}^{1\cdot \log 3} = 3
\end{aligned}$$

✈

Príklad 11. Vypočítajte limity

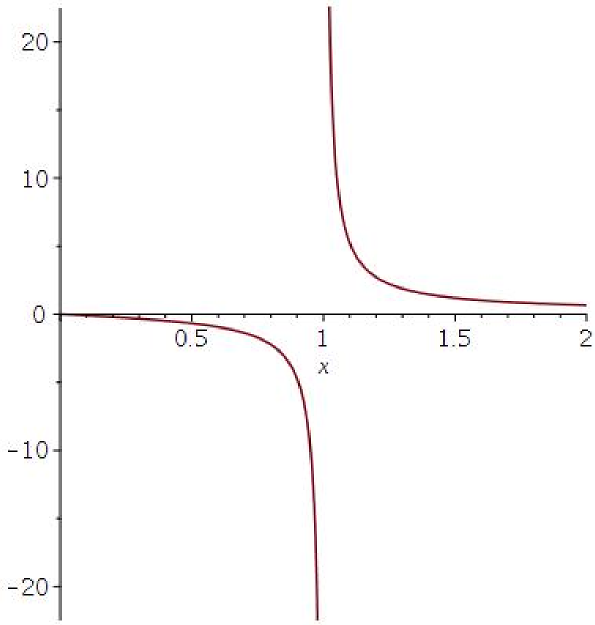
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right), \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right).$$

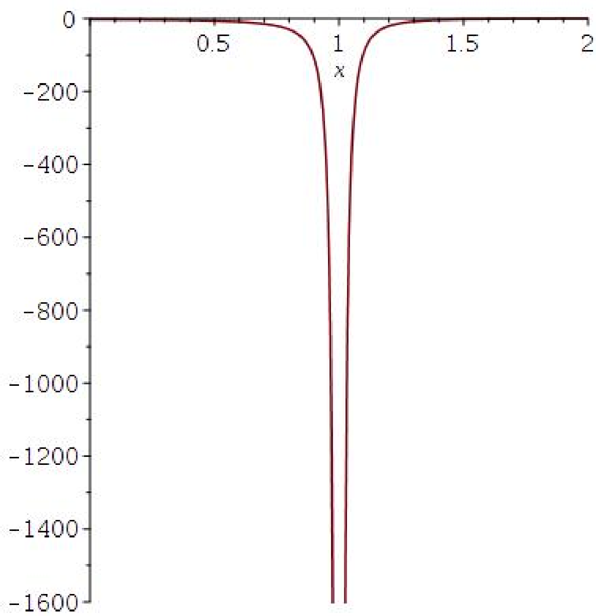
Výrazy v limite najskôr upravíme.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x+1)(x-1)},$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{(x-1)^2}$$

Dostali sme výrazy typu $\frac{1}{0}$ a $\frac{-1}{0}$. V obidvoch prípadoch sme v situácii, kedy konštantu delíme číslom veľmi blízkym k nule. Musíme overiť, či znamienko tohto čísla, malého v absolútnej hodnote, závisí od smeru, v ktorom sa k nule blížime. Vyšetríme teda jednostranné limity.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{(x+1)(x-1)}=\frac{1^+}{2^+\cdot 0^+}=\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x-2}{(x-1)^2}=\frac{-1^+}{(0^+)^2}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{(x+1)(x-1)}=\frac{1^-}{2^-\cdot 0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{x-2}{(x-1)^2}=\frac{-1^-}{(0^-)^2}=-\infty$$





Vysvetlime si použité značenie. Symboly c^+ a c^- reprezentujú čísla o kúsok väčšie respektíve menšie ako c, teda v prípade ak sa nevyskytujú pod operátorom lim - tam značia počítanie jednostrannej limity. Keďže existencia a rovnosť jednostranných limít je ekvivalentná existencii limity, v prvom prípade limita neexistuje a v druhom existuje a je rovná $-\infty$. ✈

Príklad 12. Vypočítajte limitu

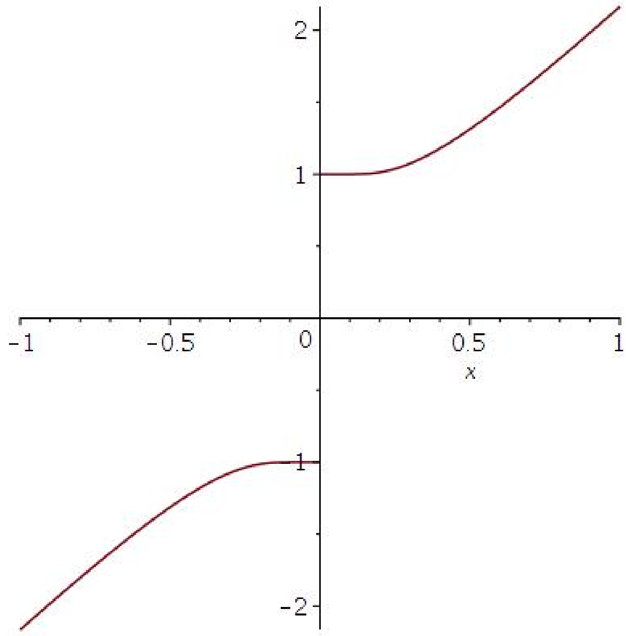
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2-1}.$$

Výraz si zapíšeme v tvare súčinu, aby sme mohli použiť pravidlo (9):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2-1}=\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\sin x}_{\text{funkcia idúca do 0}}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^2-1}}_{\text{ohraničená funkcia}}\right)=0.$$ ✈

Príklad 13. Vypočítajte limitu
$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\mathrm{e}^x + x^3 - 4}{\mathrm{e}^{2x} + 4x^2 + 1}.$$
V takýchto prípadoch vyjmeme aj z čitateľa aj z menovateľa člen, ktorý pre $x \to \infty$ najrýchlejšie rastie. V našom prípade je to e^{2x}.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\mathrm{e}^x + x^3 - 4}{\mathrm{e}^{2x} + 4x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{5}{\mathrm{e}^x} + \frac{x^3}{\mathrm{e}^{2x}} - \frac{4}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}{\mathrm{e}^{2x}\left(1 + \frac{4x^2}{\mathrm{e}^{2x}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{\mathrm{e}^x} + \frac{x^3}{\mathrm{e}^{2x}} - \frac{4}{\mathrm{e}^{2x}}}{1 + \frac{4x^2}{\mathrm{e}^{2x}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}} = \frac{0+0-0}{1+0+0} = 0.$$ ✈

Príklad 14. Rozhodnite, či je možné uvedenú funkciu spojito dodefinovať v bode 0:
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}.$$
Potrebujeme zistiť, či limita $\lim_{x\to 0} f(x)$ existuje, a či je konečná. Za tým účelom spočítame jednostranné limity.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1+0}{1-0} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1} = \frac{0+1}{0-1} = -1.$$



Obidve jednostranné limity síce existujú a sú vlastné, no sú rôzne, čo znamená, že funkcia f má v bode 0 skok a tým pádom nemôže byť spojito dodefinovaná. ✈

Literatúra

[1] HASIL, Petr a ZEMÁNEK, Petr. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*, `https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/pdf/SPzMAI.pdf`

[2] HILSCHER, Roman Šimon, HASIL, Petr, VESELÝ Michal a ZEMÁNEK, Petr. *Přednášky z matematické analýzy na FI*, `http://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MU/MB152/prednasky_MB152.pdf`

[3] DOŠLÁ, Zuzana. a KUBEN, Jaromír. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*