

# Radiologická fyzika a radiobiologie



## 8. cvičení



# Opakování

1. Jaká bude Larmorova frekvence jádra atomu uhlíku  $^{13}\text{C}$  v magnetickém poli o indukci 1,5 T a 7 T? Gyromagnetický poměr je  $0,67 \cdot 10^8 \text{ T}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . [Řešení](#)
2. Jaká je velikost magnetického momentu jádra atomu  $^{23}\text{Na}$ ? Jaký může být jeho průmět do osy z? Spinové kvant. č. =  $3/2$ . [Řešení](#)

# Zeemanův jev

- Vše si vysvětlíme na elektronech v atomovém obalu a pěkně od píky.
- Uvažujme vodík  ${}^1\text{H}$ .
- Zde působí pouze interakce mezi elektronem a protonem v jádře.
- Ze SŠ si pamatujeme, že energie elektronu vodíku je dána hlavním kvantovým číslem:

$$E_n = -Ry \frac{1}{n^2}$$

# Zeemanův jev

$$E_n = -Ry \frac{1}{n^2}$$

- Kde  $Ry = 13,605 \text{ eV}$  je Rydbergova konstanta a  $n$  hlavní kvantové číslo.
- $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$
- Vidíme, že čím větší  $n$ , tím větší energii elektron má.

$$E_1 = -13,602 \text{ eV}$$

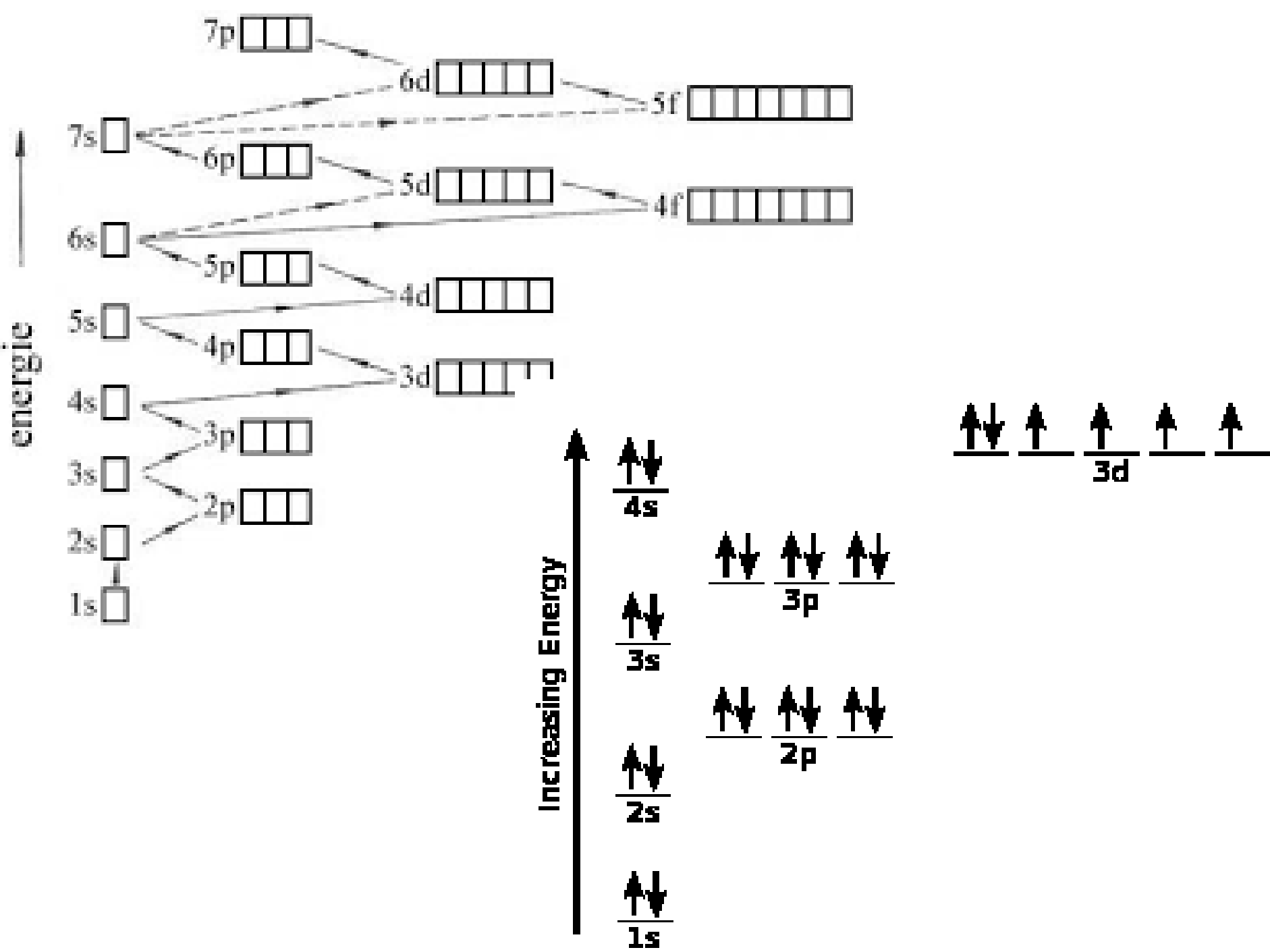
$$E_2 = -3,4005 \text{ eV}$$

$$E_3 = -1,5113 \text{ eV}$$

$$E_4 = -0,8501 \text{ eV}$$

# Zeemanův jev

- Zkoumáme-li složitější atomy, vše se komplikuje. Elektrony neinteragují pouze s jádrem, ale i mezi sebou.
- Tato elektron-elektronová interakce způsobuje, že energie elektronu už nezávisí pouze na hlavním kvantovém čísle, ale i na vedlejších.
- To má za následek rozštěpení hladin v důsledku el-el interakce.
- Nevíte, co to znamená? Ale víte 😊!



# Zeemanův jev

- Ovšem stále vidíme, že na některých hladinách je více elektronů. Ty se liší magnetickým kvantovým číslem a spinovým kvantovým číslem.
- Co když vložíme atom do magnetického pole?
- Nejen že bude elektron interagovat s jádrem a okolními elektrony, ale nyní i s vnějším magnetickým polem.

# Zeemanův jev

- Velikost této interakce nám popisuje magnetické kvantové číslo  $m$ .
- $m \in \{-l, -l + 1, \dots, l - 1, l\}$
- Pokud se nyní podíváme na energetickou hladinu 2p, která se jeví jako jedna jediná, tak v magnetickém poli se rozštěpí na 3 hladiny (-1, 0, 1).
- Na každé budou max. 2 elektrony, které se budou lišit ve spinovém kvant. č.



# Zeemanův jev

- Tomuto štěpení (vlivem magnetického pole) se říká Zeemanův jev, který jej pozoroval v roce 1897.
- Pokud budeme mít dostatečně silné magnetické pole a budeme experiment provádět podrobně, všimneme si, že štěpení není konečné.
- Spinový magnetický moment bude také interagovat s vnějším magnetickým polem.

# Zeemanův jev

- Tato interakce není moc energetická, ale projevuje se štěpením dle spinů.
- Zeemanově jevu se také někdy říká jemné štěpení, ale o štěpení podle spinů se mluví jako o hyper jemném štěpení.
- Protože elektrony i nukleony jsou fermiony, tak obdobné vlastnosti jaké vykazují elektrony v obale, musí vykazovat i jádro atomu.

# Zeemanův jev

- Při magnetické rezonanci dochází k energetickému štěpení jader vodíku dle spinového kvantového čísla.
- Rozdíl energií těchto dvou hladin je úměrný indukci magnetického pole a gyromagnetickému poměru:

$$\Delta E = \gamma \hbar B_0$$

- Vidíme, že člen  $\gamma B_0$  odpovídá Larmorově úhlové rychlosti.

# Zeemanův jev

- Čím větší je energetický rozdíl hladin, tím méně spinů bude obsazovat energičtější stav (je to pro ně čím dál víc nevýhodné).
- Energie kterou využívají k získání vyšší hladiny je dodávána díky tepelnému pohybu.
- Čím větší  $T$  okolí, tím více bude jader na vyšší hladině.
- Splňují Boltzmanovo rozdělení.

# Zeemanův jev

$$\frac{N_{\alpha}}{N_{\beta}} = e^{\left(\frac{\gamma \hbar B_0}{k_B T}\right)}$$

- Poměr počtů jader na nižší (stav  $\alpha$ ) a na vyšší (stav  $\beta$ ) energetické hladině není velký, ale množství jader v látce tento malý poměr do určité míry kompenzuje, takže jsme schopni detekovat rozdíl.

# Zeemanův jev

3. O kolik více bude jader  $^1\text{H}$  na nižší energetické hladině než na vyšší v 1g tkáně (která je z 75 % voda a zbytek neobsahuje vodík) při  $T = 298 \text{ K}$  v magnetickém poli  $B_0 = 3 \text{ T}$  a  $\gamma = 268 \text{ MHz T}^{-1}$ .

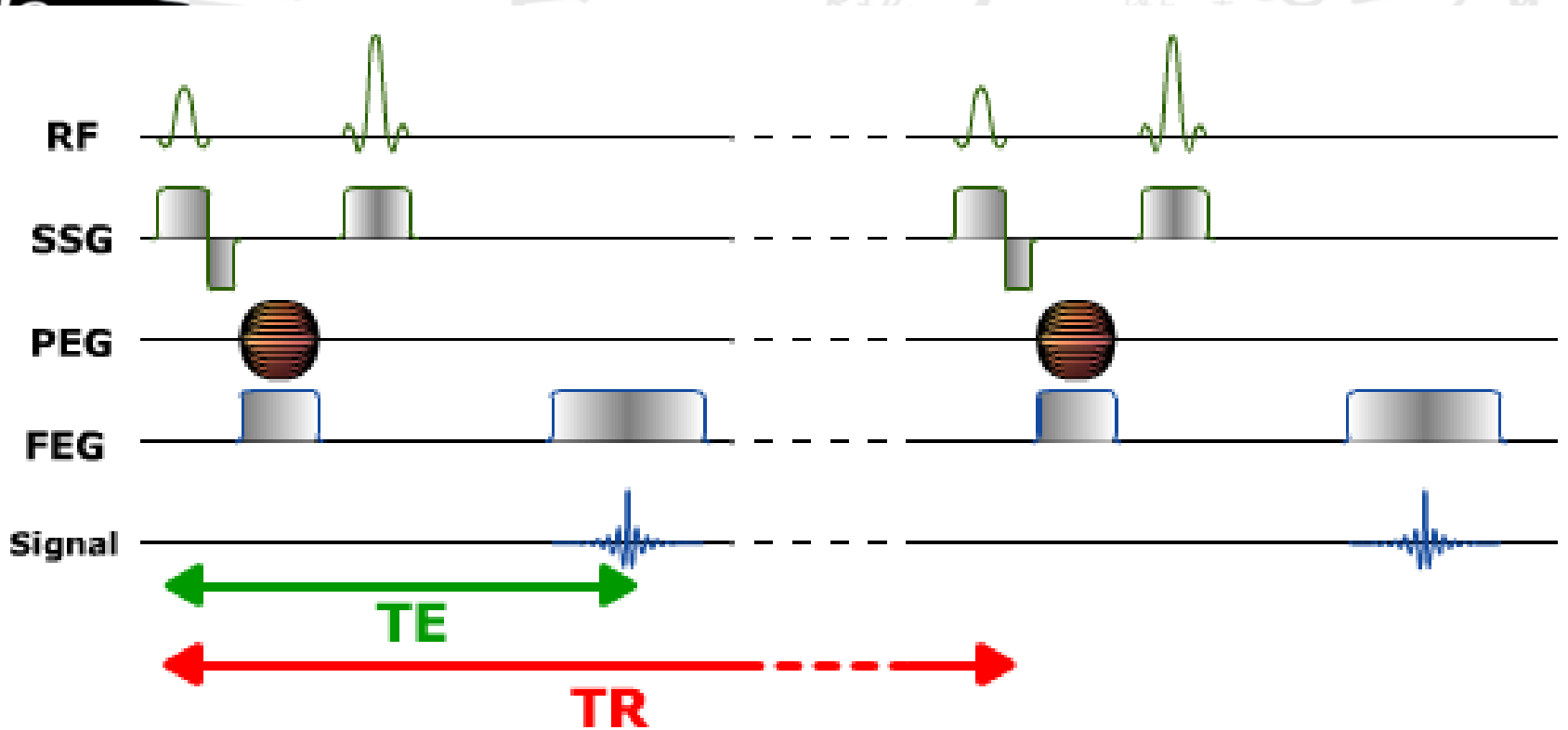
[Řešení](#)

# Spinové echo

- MRI vyšetření se neskládá z jednoho RF pulzu, ale sekvencí vhodných pulzů, které jsou aplikovány v daných směrech a okamžicích.
- Celá sekvence je mnohokrát opakována.
- Jedna ze základních sekvencí je sekvence spinového echa.

# Spinové echo

- Echo = ozvěna
- Detekovaný signál je „ozvěnou“.





# Spinové echo

- Z přednášky víme, že amplituda FID klesá exponenciálně s  $T_2^*$ .
- Když nedetekujeme signál znamená, že precese magnetizace v rovině xy je už úplně rozfázovaná.
- To ovšem neznamená, že vektor magnetizace je v původním stavu!
- Návrat do původního stavu (do osy z) je dán časem  $T_1$ .

# Spinové echo

- Spinové echo se skládá ze 2 RF pulzů.
- 1. je 90 pulz a po čase  $TE/2$  následuje 180 pulz.
- Signál detekujeme v čase  $TE$  (echo time), kdy dochází k tzv. echu.
- $TE$  volíme dle požadavků experimentu.
- Proč k echu dochází a čím je význačné?

# Spinové echo

- Po aplikaci 90° pulzu dochází k rozfázování precesního pohybu.
- Po aplikaci 180° pulzu se po určité době precesní pohyb na chvíli sfázuje.  
[https://www.youtube.com/watch?v=GDEIT6Tz7\\_Q](https://www.youtube.com/watch?v=GDEIT6Tz7_Q) (Video7\_12)
- Okamžik před sfázováním dochází k nárůstu transverzální složky magnetizace a proto detekujeme nárůst signálu až do maxima, kdy jsou všechny magnetické momenty ve fázi.

# Spinové echo

- Poté opět dochází k rozfázování a úbytku signálu.
- Maximum echa není ovšem již omezeno  $T_2^*$  časem, ale  $T_2$  časem.
- Celá tato sekvence se musí mnohokrát opakovat.
- Čas mezi 90 pulzy označujeme TR (repetition time) a volíme jej podle požadavků na experiment.

# Pulzní sekvence

- Časy TR a TE jsou klíčové pro výsledný kontrast obrazu.
- Podívejme se na 2 tkáně s rozdílnými relaxačními časy.
- Pokud nastavíme TR příliš dlouhý, pak stihne longitudinální magnetizace zcela zrelaxovat pro obě tkáně před dalším 90 pulzem. Takže po každém 90 pulzu bude transverzální magnetizace pro obě tkáně stejná.

# Pulzní sekvence

- Pokud ovšem TR zkrátíme longitudinální magnetizace tkání budou v době 90 pulzu rozdílné.
- To bude mít za následek i rozdílné transverzální magnetizace po RF pulzu.
- Detekovaný signál bude závislý na hodnotách  $T_1$  tkání.
- Mluvíme o tzv.  $T_1$  váženém obraze.

# Pulzní sekvence

- Pokud bude TR dostatečně dlouhý a zvolíme delší TE, pak se díky dlouhému TR neprojeví rozdílnost tkání v  $T_1$  čase, ale v  $T_2$ .
- Pokud ovšem bude TE příliš dlouhý, tak signál vymizí (dřív než začneme detekovat signál, dojde k velkému úbytku signálu).
- Tomuto obrazu říkáme  $T_2$  vážený.

# Pulzní sekvence

- Pokud bude TR dlouhý a TE krátký, pak stihne před každým 90° pulzem longitudinální magnetizace zrelaxovat pro všechny tkáně a  $T_1$  čas nebude hrát roli.
- Krátký TE naopak nuluje význam  $T_2$  času.
- Co tedy detekujeme?



# Pulzní sekvence

- Při dlouhém TR a krátkém TE mluvíme o protonové hustotě (proton density) a obraz je PD vážený.
- PD signál nám vypovídá o množství jader v daném objemu. Čím více jader tím silnější signál (celková magnetizace musí být větší, když máme více magnetických momentů).

# Pulzní sekvence

- Při krátkém TR a dlouhém TE dojde k velkému úbytku signálu, takže nejsme schopni nic detekovat. Takovéto TR a TE časy jsou nepoužitelné.
  - Dlouhý TR a dlouhý TE –  $T_2^*/T_2$  vážený
  - Dlouhý TR a krátký TE – PD vážený
  - Krátký TR a dlouhý TE – nepoužitelný
  - Krátký TR a Krátký TE –  $T_1$  vážený

# Pulzní sekvence

- Celková doba vyšetření se odvíjí od požadavků na prostorové rozlišení výsledného obrazu.
- Čím větší rozlišení (tzn. menší rozměry voxlu), tím vícekrát se pulzní sekvence opakuje, takže celková doba je úměrná i času TR.

# Kvantovka v MRI

- Nyní se podíváme trochu podrobněji na frekvenci RF pulzu.
- Proč volit frekvenci RF pulzu rovna Larmorovu?
- Z kapitoly věnované Zeemanově jevu víme, že energetický rozdíl mezi hladinami o různých spinech je úměrný Larmorově frekvenci.

# Kvantovka v MRI

- Protože se pohybujeme na úrovni mikrosvěta, musíme se na problém podívat z pohledu kvantové mechaniky.
- Proto se musíme ptát, jaká je pravděpodobnost, že dojde k interakci spinového magnetického momentu jádra s magnetickou složkou RF pulzu, který aplikujeme?

# Kvantovka v MRI

- Z kvant. výpočtů pro pravděpodobnost přechodu jádra ze stavu se spinem  $1/2$  do stavu  $-1/2$  plyne vztah:

$$P\left(\frac{1}{2} \rightarrow \frac{-1}{2}\right) = \frac{\omega_B^2 \left(tg \frac{B_1}{B_0}\right)^2}{(\omega_B - \omega)^2 + \omega_B^2 \left(tg \frac{B_1}{B_0}\right)^2} \sin^2 \frac{\sqrt{(\omega_B - \omega)^2 + \omega_B^2 \left(tg \frac{B_1}{B_0}\right)^2}}{2} t$$

- Kde  $\omega_B$  je Larmorova úhl. rychl. jádra,  $\omega$  je úhl. rychl. RF pulzu,  $B_0$  je indukce vnějšího pole,  $B_1$  je indukce RF pulzu a  $t$  je doba působení RF pulzu.

# Kvantovka v MRI

- $B_1$  musíme volit mnohem menší než  $B_0$ .
- Pokud zvolíme úhl. rychl. RF pulzu stejnou jako Larmorova, pak se nám vztah výrazně zjednoduší:

$$P\left(\frac{1}{2} \rightarrow \frac{-1}{2}\right) = \sin^2 \frac{\omega_B \left| \operatorname{tg} \frac{B_1}{B_0} \right| t}{2}$$

- Požadujeme, aby tato pravděpodobnost byla maximální, tudíž 1.

# Kvantovka v MRI

- Necht'  $B_0 = 1,5 \text{ T}$ ,  $B_1 = 200 \mu\text{T}$  a zkoumáme vodík, takže  $\omega_B = 2,68 \cdot 10^8 \text{ Hz} \cdot \text{T}^{-1}$ . Jak dlouho musí trvat RF pulz?

$$P\left(\frac{1}{2} \rightarrow \frac{-1}{2}\right) = \sin^2 \frac{\omega_B \left| \text{tg} \frac{B_1}{B_0} \right|}{2} t = 1$$

$$\left( \frac{\omega_B \left| \text{tg} \frac{B_1}{B_0} \right|}{2} t \right)^2 = \frac{\pi}{2}$$



# Kvantovka v MRI

- Necht'  $B_0 = 1,5 \text{ T}$ ,  $B_1 = 200 \mu\text{T}$  a zkoumáme vodík, takže  $\omega_B = 2,68 \cdot 10^8 \text{ Hz} \cdot \text{T}^{-1}$ . Jak dlouho musí trvat RF pulz?

$$\left( \frac{\omega_B \left| \text{tg} \frac{B_1}{B_0} \right|}{2} t \right)^2 = \frac{\pi}{2} \quad t = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\gamma B_0 \left| \text{tg} \frac{B_1}{B_0} \right|}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \cdot 2,68 \cdot 10^8 \cdot 1,5 \left| \text{tg} \frac{2 \cdot 10^{-3}}{1,5} \right|}$$

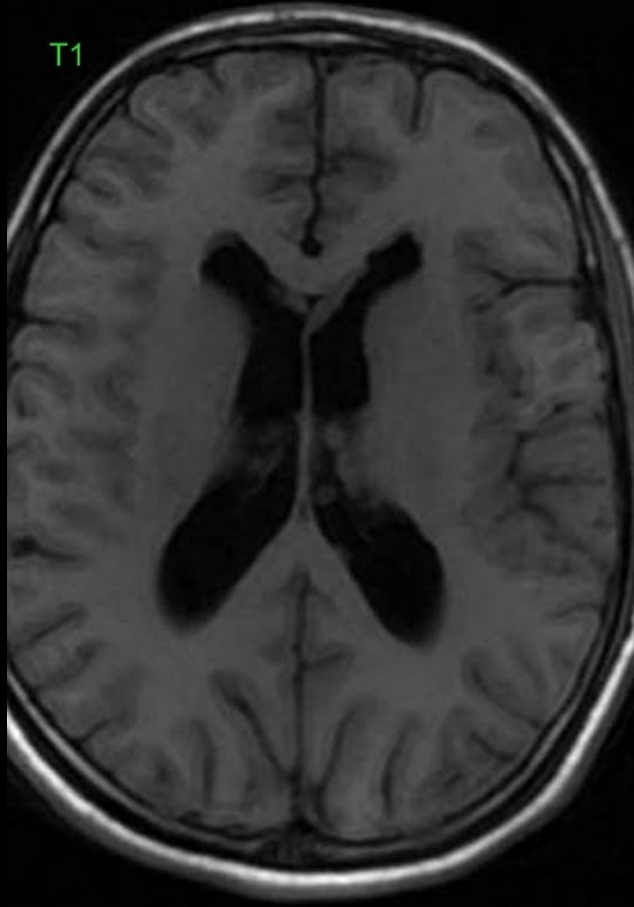
# Kvantovka v MRI

- Necht'  $B_0 = 1,5 \text{ T}$ ,  $B_1 = 200 \mu\text{T}$  a zkoumáme vodík, takže  $\omega_B = 2,68 \cdot 10^8 \text{ Hz} \cdot \text{T}^{-1}$ . Jak dlouho musí trvat RF pulz?

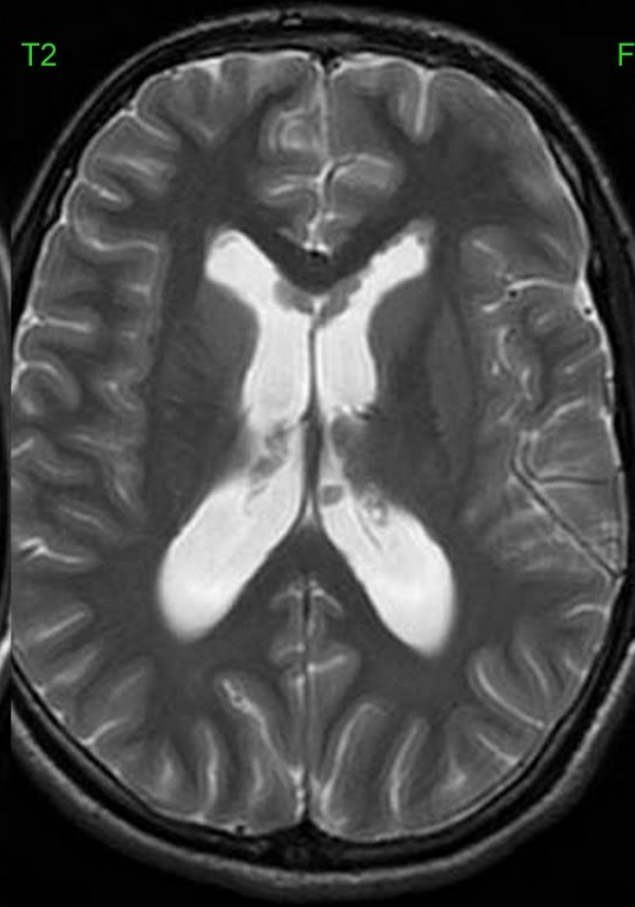
$$t = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \cdot 2,68 \cdot 10^8 \cdot 1,5 \cdot 2,32 \cdot 10^{-7}} = 26,8 \text{ ms}$$

# Obrázky MRI

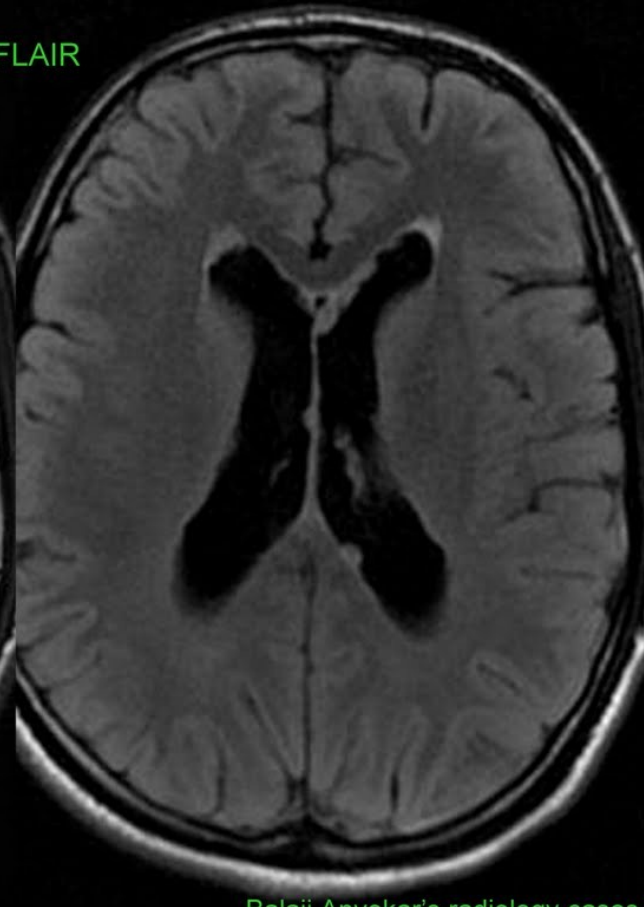
T1



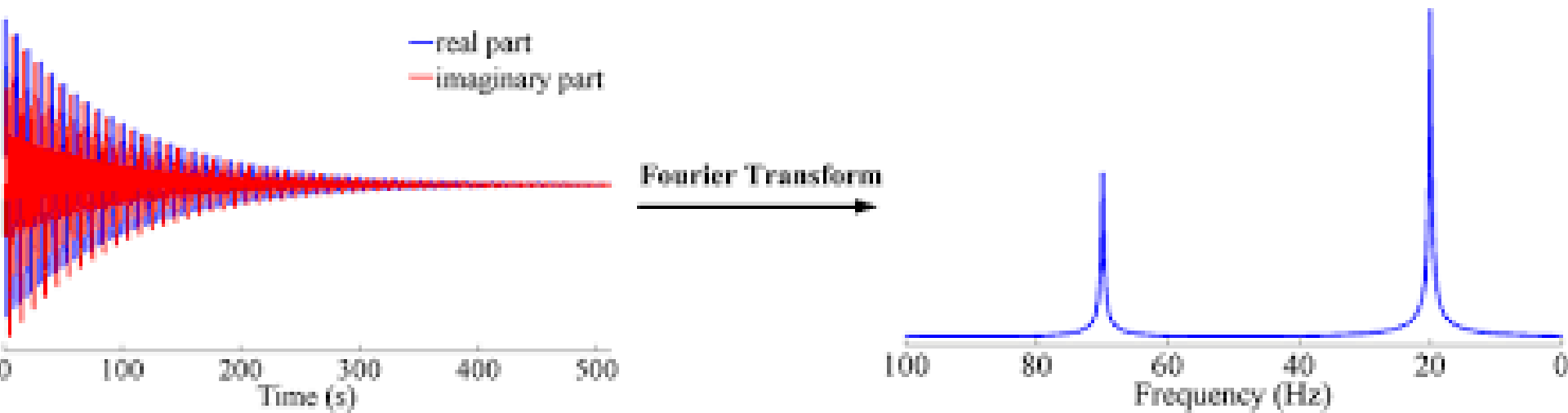
T2



FLAIR



# Obrázky MRI



# Obrázky MRI

**OPEN MRI**



**VS**

**CLOSED MRI**



# MRI konstrukce

- <https://www.youtube.com/watch?v=AHgQf0dgTQ4>

# Opakování testů

- Co víme a nevíme z testů?

# Konec 8. cvičení



$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \psi = E \psi$$
$$U_{ef} = \frac{U_m}{2}$$
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{NI \sqrt{2}}{2\pi r}$$
$$k = \frac{p^2}{2m} = \frac{M_r \cdot 10^{-3}}{NA}$$
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm_e}}$$
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$
$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kTN_A}{M_r \cdot 10^{-3}}}$$
$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} F_h = Shp$$
$$\left( \frac{E_t}{E_0} \right)_{\parallel} = \frac{2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$
$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}$$

$$2 \operatorname{tg} \vartheta_B = \frac{m_2}{m_1} = m_{21}$$
$$\rho V = nRT \quad \Psi = \iint \vec{D} \cdot d\vec{S} = AD$$
$$H_\lambda = \frac{\Delta Me}{\Delta \lambda}$$
$$\frac{\Delta \varphi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{x_2 - x_1}{\lambda}$$
$$V = c/\lambda$$
$$\Phi = NBS$$
$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$
$$L = \frac{U_m}{\omega} = 2\pi f L$$
$$\mu_1 \mu_2$$
$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)}$$
$$2\pi f$$
$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon + \mu}}$$
$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega}$$
$$= Q^*$$
$$\int \frac{F_n}{R}$$
$$\lambda^* T = b$$
$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$
$$u = U_m \sin \omega(t - \tau) = U_m \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$



# Dodatky 1

1. Jaká bude Larmorova frekvence jádra atomu uhlíku  $^{13}\text{C}$  v magnetickém poli o indukci 1,5 T a 7 T? Gyromagnetický poměr je  $0,67 \cdot 10^8 \text{ T}^{-1}\text{s}^{-1}$ .

$$f_{L1,5} = \frac{\gamma}{2\pi} B_{1,5} = \frac{0,67 \cdot 10^8}{2\pi} 1,5 = 16,003 \text{ MHz}$$

$$f_{L7} = \frac{\gamma}{2\pi} B_7 = \frac{0,67 \cdot 10^8}{2\pi} 7 = 74,681 \text{ MHz}$$

Konec 1. dodatku

[zpět](#)

# Dodatky 2

2. Jaká je velikost magnetického momentu jádra atomu  $^{23}\text{Na}$ ? Jaký může být jeho průmět do osy z? Spinové kvant. č. = 3/2. Gyromag. poměr =  $0,71 \cdot 10^8 \text{T}^{-1} \text{s}^{-1}$ ,

$$|\vec{\mu}| = \gamma |\vec{S}|$$

$$|\vec{\mu}_{\text{Na}}| = \gamma \hbar \sqrt{s(s+1)}$$

$$|\vec{\mu}_{\text{Na}}| = 1,4506 \cdot 10^{-26} \text{Am}^2$$

$$\left| \vec{\mu}_{z \pm \frac{3}{2}} \right| = \pm 1,123 \cdot 10^{-26} \text{A} \cdot \text{m}^2$$

$$|\vec{\mu}_z| = \gamma \hbar m_z$$

$$\left| \vec{\mu}_{z \pm \frac{1}{2}} \right| = \pm 0,374 \cdot 10^{-26} \text{A} \cdot \text{m}^2$$

Konec 2. dodatku

# Dodatky 3

3. O kolik více bude jader  $^1\text{H}$  na nižší energetické hladině než na vyšší v 1g tkáně (která je z 75 % voda a zbytek neobsahuje vodík) při  $T = 298 \text{ K}$  v magnetickém poli  $B_0 = 3 \text{ T}$  a  $\gamma = 268 \text{ MHz T}^{-1}$ .

$$N = N_A n \quad n = \frac{m}{M_r} \quad N_H = 2 \frac{75}{100} N_A \frac{m}{M_r}$$

$$\frac{N_\alpha}{N_\beta} = e^{\left(\frac{\gamma \hbar B_0}{k_B T}\right)} = e^{\frac{268 \cdot 10^8 \cdot 1,054 \cdot 10^{-34} \cdot 3}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 298}}$$

$$\frac{N_\alpha}{N_\beta} = e^{2,060636 \cdot 10^{-3}} = 1,0020627$$

# Dodatky 3

3. O kolik více bude jader  $^1\text{H}$  na nižší energetické hladině než na vyšší v 1g tkáně (která je z 75 % voda a zbytek neobsahuje vodík) při  $T = 298 \text{ K}$  v magnetickém poli  $B_0 = 3 \text{ T}$  a  $\gamma = 268 \text{ MHz T}^{-1}$ .

$$N_H = 2 \frac{75}{100} N_A \frac{m}{M_r} = \frac{150.6,023 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-3}}{100.18}$$

$$N_H = 5,01916 \cdot 10^{19} \quad N_H = N_\alpha + N_\beta$$

$$\frac{N_\alpha}{N_\beta} = 1,0020627 = \frac{N_\alpha}{N_H - N_\alpha}$$

# Dodatky 3

3. O kolik více bude jader  $^1\text{H}$  na nižší energetické hladině než na vyšší v 1g tkáně (která je z 75 % voda a zbytek neobsahuje vodík) při  $T = 298 \text{ K}$  v magnetickém poli  $B_0 = 3 \text{ T}$  a  $\gamma = 268 \text{ MHz T}^{-1}$ .

$$1,0020627(N_H - N_\alpha) = N_\alpha$$

$$1,0020627 \cdot N_H = (1 + 1,0020627)N_\alpha$$

$$\frac{1,0020627}{2,0020627} N_H = N_\alpha \quad N_H = 5,01916 \cdot 10^{19}$$

$$N_\alpha = 2,51216 \cdot 10^{19} \quad N_\beta = 2,507 \cdot 10^{19}$$

$$\Delta N = 5,16 \cdot 10^{16}$$

Konec 3. dodatku

[zpět](#)

