Matematika pro nematematiky - Úlohy 2

Termín zadání: 26.9.2024

1 Grafy funkcí

Nakreslete grafy následujících funkcí. Stačí schematické náčrty. Je ale nutno vyznačit podstatné body, např. průsečíky s osami, asymptoty apod.

Pozn. Asymptoty jsou přímky, k nimž se funkce blíží v nekonečnu.

(a) $2.(2x-6)^3+3$

(b) $f(x) = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) + 3$. Jaká je perioda funkce? Pro které x platí $f(x) = 0$?

(c) Gaussovu křivka známou ze statistiky popisuje funkce e^{-x^2}. Je možné nakreslit funkci k ní inverzní? Pokud ne, zdůvodněte proč ne a zakreslete inverzní funkce zvlášť pro kladné a záporné x.

(d) Vyznačte v komplexní rovině číslo $3e^{-\imath\frac{\pi}{2}}$ a napiště jeho algebraický $(a+b\imath)$ a goniometrický tvar.

Řešení:

(a) Průsečíky s osami jsou $x_0 = 2,428$ a $y(0) = -429$. (Obr. 1)

(b) Perioda funkce je π. Průsečíky s osami jsou $x_0 = -\frac{3}{8}\pi$, $x_1 = \frac{5}{8}\pi$ a +- všechny násobky π a $y(0) = 5,12$. Perioda je π. (Obr. 2)

(c) Funkce jako celek není prostá, proto nelze nekreslit inverzní funkci. Zvlášť pro kladná a záporná x však již prostá je a lze proto nakrelit 2 inverní funkce (v obrázku jde o zelenou a červenou křiku). (Obr. 3)

(d) Jde o ryze komplexní číslo $-3i$. Algebraický tvar je $0-3i$, goniometrický tvar je $3.(\cos\frac{\pi}{2} + \imath\sin\frac{\pi}{2})$. (Obr. 4)

2 Funkce

(a) Určete průsečíky funkce $y = -2x^2 + 2x + 24$ s osami x a y.

(b) V kterých bodech se protínají funkce $f(x) = x^2 - x - 2$ a $g(x) = 3x + 5$.

(c) Z funkce $f(x) = e^x$ vytvořte funkci $g(x)$, která je oproti $f(x)$ posunutá o 3 nahoru, o 2 doleva, 2x užší na ose x a 3x roztažena na ose y. V kterých bodech protínají obě funkce osy x a y.

(d) Nakreslete funkci $\sin x$ v intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$ a funkci k ní inverzní. Jak se tato inverzní funkce nazývá.

(e) Navrhněte nějaký polynom 2. řádu, kde koeficienty a, b i c jsou různé o nuly, který neprotíná osu x.

Řešení:

1. $$y = -2x^2 + 2x + 24 = -2\left(x^2 - x - 12\right) = -2\,(x-4)\,(x+3) = 0$$

   Průsečíky s osou x proto jsou: $x = 4$ a $x = -3$

2. $$x^2 - x - 2 = 3x + 5 \rightarrow x^2 - 4x - 7 = 0$$
   $$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.(-7)}}{2} = 2 \pm \sqrt{11}$$

3. $$g(x) = 3e^{2(x+2)} + 3 = 3e^{2x+4} + 3$$

4. Funkce se nazývá arcussinus - $arcsin(x)$, viz obr. 5

3 Logaritmy

Spočítejte hodnoty následujících výrazů (viz strana 17 ve skriptu).

Pozn. log je dekadický logaritmus, ln je přirozený logaritmus.

(a) $\log 2 + \log 5$

(b) $\ln e^4$

(c) $\log \sqrt{10}.10^{-4.5}$

Řešení:

(a) $\log 2 + \log 5 = \log(2.5) = \log 10 = 1$

(b) $\ln e^4 = \ln(e.e.e.e) = \ln e + \ln e + \ln e + \ln e = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

(c) $\log \sqrt{10}.10^{-4,5} = \log 10^{\frac{1}{2}} + \log 10^{-4,5} = \frac{1}{2} + (-4,5) = 0,5 - 4,5 = -4$

Bonusová úloha 1 pro skoro matematiky

Odvoďte pomocí Eulerova vyjádření kompexního čísla známý vztah $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$. Pomůže strana 10 ve skriptu.

Řešení:

Všimneme si, že $\sin(a+b)$ je vlastně komplexní část komplexního čísla $\cos(a+b) + i\sin(a+b)$. Imaginární část komplexního čísla označme Im. Pak už je vše snadné.

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= Im\left(\cos(a+b) + i\sin(a+b)\right) = Im\left(e^{i(a+b)}\right) \\
&= Im\left(e^{ia}.e^{ib}\right) = Im\left[(\cos a + i\sin a).(\cos b + i\sin b)\right] \\
&= Im\left[\cos a\cos b + i\cos a\sin b + i\sin a\cos b + i^2\sin a\sin b\right] \\
&= \sin a\cos b + \cos a\sin b
\end{aligned}$$

Bonusová úloha 2 pro matematiky

Dokažte, že

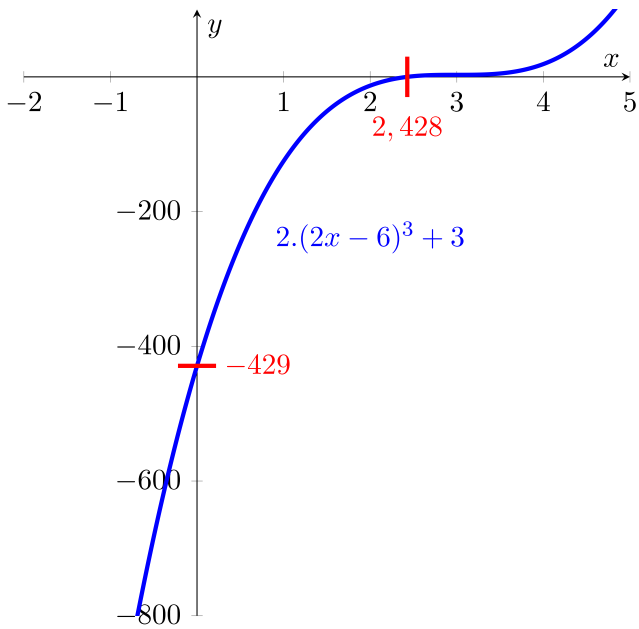
$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) . \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(x^k \sum_{\substack{i+j=k \\ i \leq m \\ j \leq n}} a_i b_j \right)$$

Řešení:

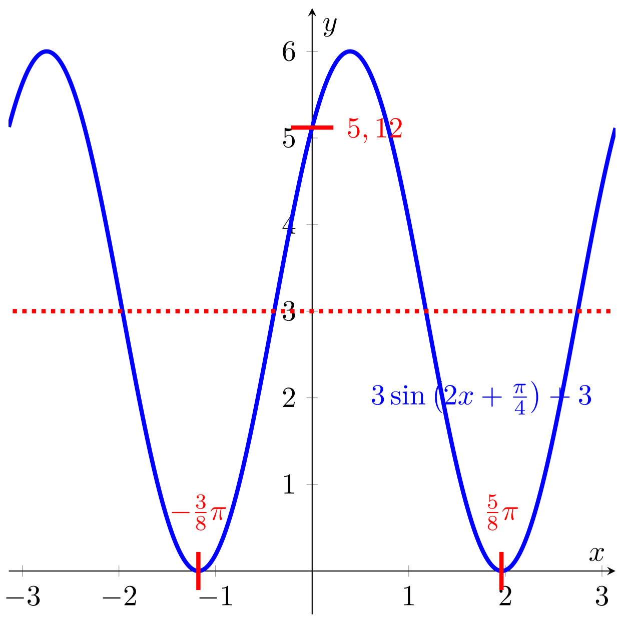
Nejprve rozepíšeme oba součty, poté je pronásobíme, přičemž budeme všechny „součiny x“ se stejným součtem exponentů psát k sobě. Jako příklad ukažme členy se součtem $i+j=4$, přičemž $i \geq m$ i $j \geq n$, uvnitř výpočtu se objeví následující členy

$$\dots a_0 x^0 . b_4 x^4 + a_1 x^1 . b_3 x^3 + a_2 x^2 . b_2 x^2 + a_3 x^3 . b_1 x^1 + a_4 x^4 . b_0 x^0 + \dots =$$
$$\dots + x^4 \left(a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0\right) + \dots = \dots + x^4 \sum_{\substack{i+j=4 \\ i \leq m \\ j \leq n}} a_i b_j + \dots$$

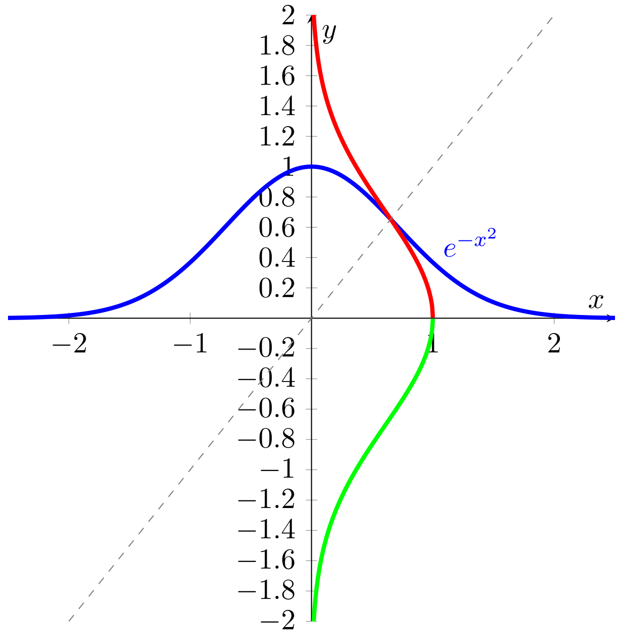
Posčítáním jednotlivých „nových“ členů získáme dokazovanou rovnost, přičemž součet $i+j$ se může pohybovat od 0 do $m+n$.



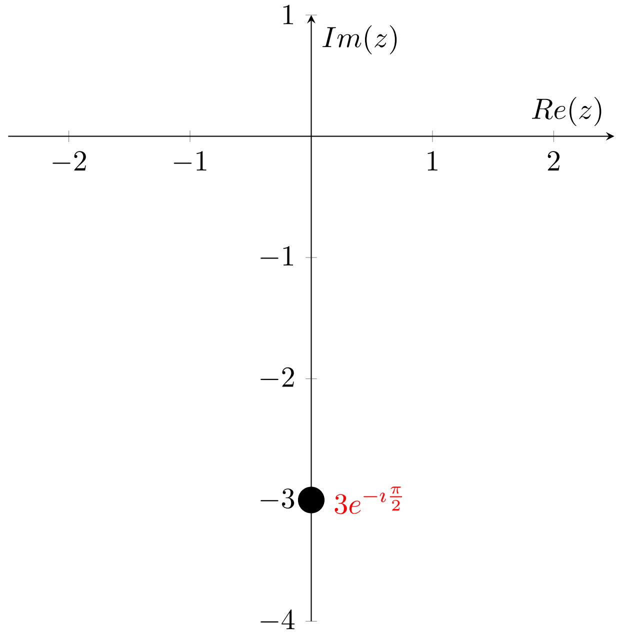
Obrázek 1: $2.(2x-6)^3+3$



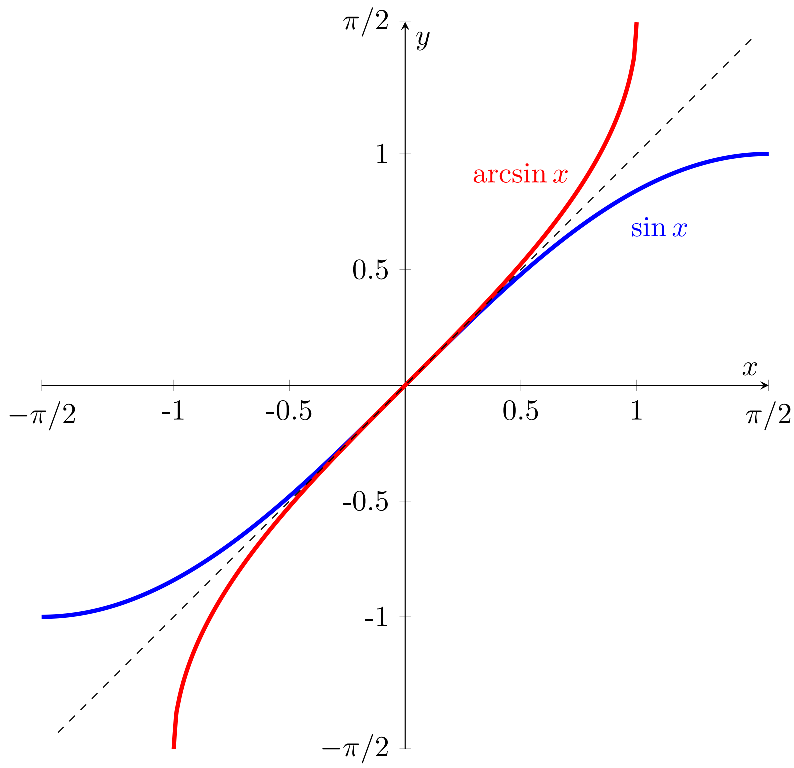
Obrázek 2: $3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+3$



Obrázek 3: e^{-x^2}



Obrázek 4: $3e^{-\imath\frac{\pi}{2}}$



Obrázek 5: $\sin x, \arcsin x$