Matematika pro nematematiky - Úlohy 3

Termín zadání: 3.10.2024

1 Limita funkcí

Určete limitu následujících funkcí:

1. $\lim_{x\to 2} x^2 + x - 1$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2}$
3. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

Řešení:

1. $\lim_{x\to 1} x^2 + x - 1 = 2^2 + 2 - 1 = 5$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$
3. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1).(x-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} x - 1 = -2$

2 Derivace funkcí

Zderivujte následující funkce:

1. $f(x) = x^3 - 4\sin x + 2$
2. $f(x) = 3x^5 + \sin x.e^x$
3. $f(x) = 2\sin x.\cos x$
4. $f(x) = \frac{x^3-1}{x}$
5. $f(x) = \tan x$

Řešení:

1. $f'(x) = 3x^2 - 4\cos x$
2. $f'(x) = 15x^4 + \cos x.e^x + \sin x.e^x$
3. $f'(x) = 2\cos x\cos x - 2\sin x\sin x = 2\cos(2x)$
4. $f'(x) = \frac{3x^2.x-x^3+1}{x^2} = \frac{2x^3+1}{x^2}$
5. $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$

3 Úhel přímek

Pomocí derivace zjistěte, pod jakým úhlem protíná funkce

1. e^x osu y
2. $\sin x$ osu y
3. $\cos x$ osu y

4. $2x + 4$ osu x
5. $x^2 - 4$ osu x

Řešení:
Musíme vždy zderivovat funkci a určit hodnotu derivace v bodě průsečíku s osou.

1. e^x protíná osu y v bodě $x = 0$. Derivace e^x je e^x. Hodnota derivace v bodě 0 je $e^0 = 1$. Osu y tedy protíná pod úhlem 45°.
2. $\sin x$ protíná osu y v bodě $x = 0$. Derivace $\sin x$ je $\cos x$. Hodnota derivace v bodě 0 je $\cos 0 = 1$. Osu y tedy protíná pod úhlem 45°.
3. $\cos x$ protíná osu y v bodě $x = 0$. Derivace $\cos x$ je $-\sin x$. Hodnota derivace v bodě 0 je $-\sin 0 = 0$. Osu y tedy protíná pod úhlem 0°.
4. Derivace $2x + 4$ je 2. Přímka tedy protíná osu x pod úhlem, jehož tangens je 2. Tedy $\arctan 2 \approx 63°$.
5. $x^2 - 4$ protíná osu x v bodech 2 a -2. Derivace $x^2 - 4$ je $2x$. V průsečících má tedy derivace hodnotu 4 a -4. Tomu odpovídají úhly $\arctan 4 \approx 76°$ a $\arctan -4 \approx -76°$.

4 Průběh funkce

Určete minima, maxima a případně inflexní body následujících funkcí. Každou funkci i její první a druhou derivací též schematicky nakreslete. Připomeňme, že druhá derivace je v maximu záporná, v minimu kladná a v inflexním bodě nulová.

1. $f_1(x) = x^2 . \cos x$ pro $x \in [-2, 2]$
2. $f_2(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

Řešení: Obě křivky jsou vykresleny na obr. 1.

1. Pro extrémy a inflexní body musí platit $f_1'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x = 0$. Zjevným řešením je $x_1 = 0$. Po vydělením x dostaneme $2 \cos x = x \sin x$, což je nelineární rovnice, 2 řešení jsou přibližná, $x_2 \approx 1,08$ a $x_3 = -x_2 \approx -1,08$. Pro zjištění typu extrému potřebujeme hodnotu 2. derivace v bodech x_1, x_2 a x_3.

   $$f_1''(x) = 2 \cos x - 2x \sin x - 2x \sin x - x^2 \cos x$$

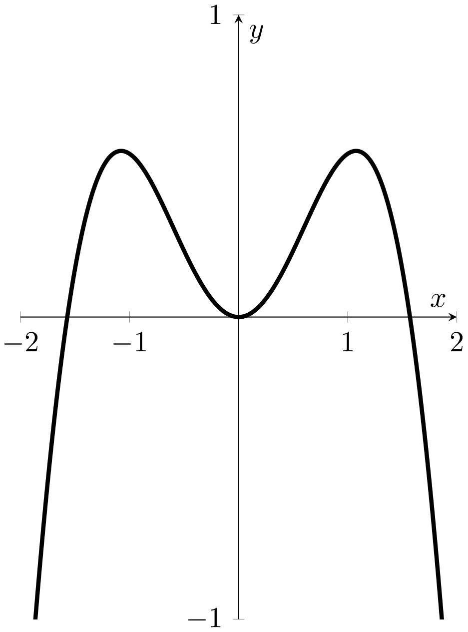
   Pro $x_1 = 0$ platí $f_1''(0) = 2 \cos 0 = 2 > 0$, x_1 je tedy lokální minimum. Upozorňuji, že jde o lokální minimum, nikoli o globální minimum. Pro body x_2 x_3 dosadíme podmínku extrému $2 \cos x = x \sin x$ a získáme

   $$f_1''(x) = x \sin x - 2x \sin x - 2x \sin x - x^2 \cos x = -3x \sin x - x^2 \cos x$$

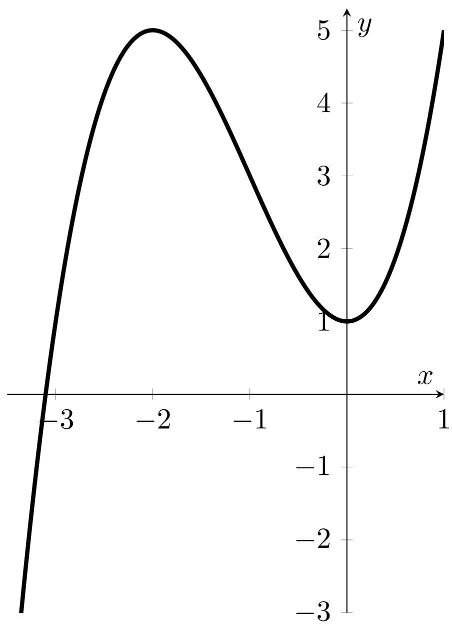
   Protože x a $\sin x$ mají v intervalu $(-\pi, \pi)$ stejné znaménko, je pro x_2 i x_3 $x \sin x > 0$, stejně tak i $x^2 \cos x > 0$. Proto $f_1''(x_2) < 0$ i $f_1''(x_3) < 0$, oba body jsou tedy lokálními maximy.
2. $f_2'(x) = 3x^2 + 6x = 0$. Řešením jsou $x_1 = 0$ a $x_2 = -2$. Platí $f_2''(x) = 6x + 6$, tedy $f_2''(0) = 6 > 0$ a $f_2''(-2) = -6 < 0$. x_1 je lokální minimum, x_2 lokální maximum.

5 Definice derivace

Exaktně jsme derivaci funkce $f(x)$ definovali jako



(a) $f_1(x)$



(b) $f_2(x)$

Obrázek 1: $f(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Při přednášce jsme přímo použitím této definice ukázali, že derivace x^2 je $2x$. Stejným způsobem ukažte, že

1. $(x)' = 1$
2. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

Řešení:

1. $(x)' = 1$

$$(x)' = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

2. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$$[f(x) + g(x)]' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - [f(x) + g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$