Matematika pro nematematiky - Úlohy 4

Termín zadání: 9.10.2024

1 Derivace složených funkcí

Zderivujte následující funkce.

1. $f(x) = \sin(x^3 + 3x^2 - 1) + 1$
2. $f(x) = 4\ln^2(x^3)$
3. $f(x) = x^5 + \sin x. \ln x$
4. $f(x) = \frac{e^{2x+1}}{x^2-1}$
5. $f(x) = 4^x$
6. $f'(x) = \sin^2(x^3)$

Řešení:

1. $f'(x) = \cos(x^3 + 3x^2 - 1).(3x^2 + 6x)$
2. $f'(x) = 4.2\ln x^3.\frac{1}{x^3}.3x^2 = 24\frac{\ln x^3}{x}$
3. $f'(x) = 5x^4 + \cos x. \ln x + \frac{\sin x}{x}$
4. $f'(x) = \frac{2e^{2x+1}.(x^2-1)-2x.e^{2x+1}}{(x^2-1)^2}$
5. $f'(x) = (4^x)' = \left(\left(e^{\ln 4}\right)^x\right)' = \left(e^{x.\ln 4}\right)' = e^{x.\ln 4}.\ln 4 = \left(e^{\ln 4}\right)^x.\ln 4 = 4^x.\ln 4$
6. $f'(x) = \sin^2(x^3) = 2\sin(x^3)\cos(x^3).3x^2$

2 Rychlost procesů

1. Na počátku, v čase $t = 0$, mějme 1000 atomových jader, které se rozpadají, přičemž jejich počet N klesá podle rovnice
$$N = 1000.e^{-0,002.t},$$
kde t je čas v minutách. Vypočítejte bez použití kalkulačky (!!), kolik jader se přibližně rozpadně během prvních 5 minut.
2. Zrychlený pohyb volně padajícího kamene popisuje rovnice $h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$, kde h_0 je počáteční výška, h je aktuální výška, g je gravitační zrychlení a t je čas. Vypočtěte rychlost kamene jednak jako funkci času, jednak jako funkci výšky h.

Řešení:

1. Okamžitá rychlost poklesu počtu jader je (záporná) derivace N podle t, $-dN/dt$.
$$-\frac{dN}{dt} = -1000.(-0.002)e^{-0,002.t} = 2.e^{-0,002.t}$$

V čase t=0 se tedy rozpadnou zhruba 2 jádra za minutu. Během prvních 5 minut se tedy rozpadne zhruba 10 jader. Přesná hodnota by byla $N(0) - N(5) = 1000 - 1000.e^{-0,002.5} = 1000.(1 - e^{-0,01}) = 1000.(1 - 0,9900498) \approx 10$.

2. Rychlost je derivace polohy podle času, $v = dh/dt$.

$$v = \frac{dh}{dt} = -gt$$

Záporná hodnota značí, že kámen padá dolů, tedy opačně, než roste h. Pokud za čas dosadíme, získáme

$$v = -gt = -g.\sqrt{\frac{2(h_0 - h)}{g}} = -\sqrt{2(h_0 - h)g}$$

3 Průběh funkce

Představme si, že hodíme kámen rychlostí v pod úhlem α. Lze odvodit, že kámen dopadne o

$$s = \frac{v^2 . \sin 2\alpha}{g}$$

dále. Pod jakým úhlem je třeba kámen hodit, aby dopadl co nejdál?

Řešení: Vnímáme tedy s jako funkci úhlu α, $s(\alpha)$, ostatní parametry jsou konstanty. Chceme zjistit maximum funkce $s(\alpha)$. Proto ji zderivujeme podle α a položíme rovnu nule.

$$0 = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{v^2}{g}.2.\cos 2\alpha$$

Tedy $\cos 2\alpha = 0$. Protože kosinus je nulový pro 90°, musí být $2\alpha = 90°$. Kámen je tedy třeba hodit pod úhlem 45°.

4 Jednoduché integrály

Vypočtěte následující neurčité integrály (primitivní funkce). Výsledek též vždy zderivujte, abyste si ověřili správnost řešení.

1. $\int 2e^{3x}\, dx$
2. $\int 2x^2 + 3x^3\, dx$
3. $\int \sin 2x\, dx$
4. $\int \cos x/2\, dx$

Řešení:

1. $\int 2e^{3x}\, dx = \frac{2}{3}e^{3x} + c$
2. $\int 2x^2 + 3x^3\, dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + c$
3. $\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$
4. $\int \cos \frac{x}{2}\, dx = 2 \sin \frac{x}{2} + c$

5 Integrace substituční metodou

Najděte a použijte vhodnou substituci a vypočtěte následující neurčité integrály (primitivní funkce). Výsledek též vždy zderivujte, abyste si ověřili správnost řešení.

1. $\int xe^{x^2}\,dx$
2. $\int \sin x \cos x\,dx$

Řešení: Později.

6 Integrace metodou per partes

Použijte metodu per partes a vypočtěte následující neurčité integrály (primitivní funkce). Výsledek též vždy zderivujte, abyste si ověřili správnost řešení.

1. $\int x \sin x\,dx$
2. $\int x^2 \ln x\,dx$
3. $\int \sin x \cos x\,dx$

Řešení: Později.

7 Určité integrály

Vypočtěte následující určité integrály.

1. $\int_0^2 e^{2x}\,dx$
2. $\int_{-2}^2 x^2 - x\,dx$
3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx$

Řešení:

1. $\int_0^2 e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 = \frac{1}{2}e^{2.2} - \frac{1}{2}e^{2.0} = \frac{1}{2}.(e^4 - 1) \approx 27$
2. $\int_{-2}^2 x^2 - x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} = \frac{16}{3}$
3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{2}.(\cos 2\pi - \cos(-2\pi)) = 0$

8 Plochy pod křivkou

1. Vypočítejte plochu pod křivkou funkce x^3 pro x mezi 1 a 3.
2. Vypočítejte plochu pod křivkou funkce $e^{-|x|}$ (pro x od $-\infty$ do $+\infty$).
3. Představme si kužel výšky H a průměru základny taktéž H. Odvoďte vztah pro výpočet objemu kužele jako funkce H, tedy $V(H)$.

   Nápověda: Představte si, že se kužel skládá z mnoha velmi nízkých válců naskládaných na sebe, s postupně klesajícím průměrem válců.

Řešení:

1. Plocha pod křivkou je rovna určitému interálu. Tedy

$$\int_1^3 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^3 = \frac{1}{4}(3^4 - 1^4) = \frac{80}{4} = 20$$

2. Funkci si rozdělíme na kladnou a zápornou část a uvědomíme si, že jsou symetrické podle osy y. Stačí tedy integrovat kladnou část od 0 do $+\infty$ a výsledek vynásobit 2. Kladná část přitom odpovídá funkci e^{-x}.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = -e^{-\infty} - (-e^0) = 0 + 1 = 1$$

Plocha pod křivkou je tedy 2.

3. Kužel si rozdělíme na nízké (mini)válce o výšce dh. Ve výšce h má přitom (mini)válec průměr taktéž h. Válec ve výšce h má tedy (mini)objem $dV = \frac{\pi h^2}{4}.dh$. Všechny miniobjevy sečtece, provedeme tedy určitý integrál od 0 do H. Tím získáme objem celého válce.

$$V = \sum dV = \sum \frac{\pi h^2}{4}.dh = \frac{\pi}{4} \sum h^2 dh = \frac{\pi}{4} \int_0^H h^2 dh = \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{3} h^3\right]_0^H = \frac{\pi H^3}{12}$$