

Matematika pro nematematiky - Úlohy 4

Termín zadání: 9.10.2024

1 Derivace funkcí

Zderivujte následující funkce.

1. $f(x) = \sin(x^3 + 3x^2 - 1) + 1$
2. $f(x) = 4 \ln^2(x^3)$
3. $f(x) = x^5 + \sin x \cdot \ln x$
4. $f(x) = \frac{e^{2x+1}}{x^2-1}$
5. $f(x) = 4^x$
6. $f(x) = \sin^2(x^3)$

2 Rychlost procesů

1. Na počátku, v čase $t = 0$, mějme 1000 atomových jader, které se rozpadají, přičemž jejich počet N klesá podle rovnice

$$N = 1000 \cdot e^{-0,002 \cdot t},$$

kde t je čas v minutách. Vypočítejte bez použití kalkulačky (!!), kolik jader se přibližně rozpadne během prvních 5 minut.

2. Zrychlený pohyb volně padajícího kamene popisuje rovnice $h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$, kde h_0 je počáteční výška, h je aktuální výška, g je gravitační zrychlení a t je čas. Vyjádřete rychlost kamene jednak jako funkci času t , jednak jako funkci výšky h .

3 Průběh funkce

Představme si, že hodíme kámen rychlostí v pod úhlem α . Lze odvodit, že kámen dopadne o

$$d = \frac{v^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

dále. Pomocí derivace zjistěte, pod jakým úhlem je třeba kámen hodit, aby dopadl co nejdál?

4 Jednoduché integrály

Vypočítejte následující neurčité integrály (primitivní funkce). Výsledek též vždy zderivujte, abyste si ověřili správnost řešení.

1. $\int 2e^{3x} dx$

-
2. $\int 2x^2 + 3x^3 dx$
 3. $\int \sin 2x dx$
 4. $\int \cos x/2 dx$

5 Integrace substituční metodou

Najděte a použijte vhodnou substituci a vypočtěte následující neurčité integrály (primitivní funkce). Výsledek též vždy zderivujte, abyste si ověřili správnost řešení.

1. $\int xe^{x^2} dx$
2. $\int \sin x \cos x dx$

6 Integrace metodou per partes

Použijte metodu per partes a vypočtěte následující neurčité integrály (primitivní funkce). Výsledek též vždy zderivujte, abyste si ověřili správnost řešení.

1. $\int x \sin x dx$
2. $\int x^2 \ln x dx$
3. $\int \sin x \cos x dx$

7 Určité integrály

Vypočtěte následující určité integrály.

1. $\int_0^2 e^{2x} dx$
2. $\int_{-2}^2 x^2 - x dx$
3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx$

8 Plochy pod křivkou

1. Vypočítejte plochu pod křivkou funkce x^3 pro x mezi 1 a 3.
2. Vypočítejte plochu pod křivkou funkce $e^{-|x|}$ (pro x od $-\infty$ do $+\infty$).
3. Představme si kužel výšky H a průměru základny takéž H . Odvoďte vztah pro výpočet objemu kužele jako funkce H , tedy $V(H)$.

Nápověda: Představte si, že se kužel skládá z mnoha velmi nízkých válců naskládaných na sebe, s postupně klesajícím průměrem válců.