Matematika pro nematematiky - Úlohy 7

Termín zadání: 08.11.2024

1 Typ diferenciální rovnice

Určete, o jakou diferenciální rovnici se jedná, konkrétně tedy určete řád rád rovnice, zda je dovnice lineární či nelineární, a v případě lineárních rovnice, zda je rovnice homogenní či nehomogenní, případně s konstantními či proměnnými koeficienty. Hledaná funkce se značí různě, někdy y, někdy f, někdy $f(x)$ ...

1. $\frac{dy}{dx} + 2x = 0$
2. $\sin x.\frac{dy}{dx} = 2xy - 1$
3. $\sin(\frac{df}{dx}) + 2f(x) = 0$
4. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2x$
5. $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 2x$

Řešení:

1. Lineární homogenní ODE 1. řádu s konstantními koeficienty
2. Lineární nehomogenní ODE 1. řádu
3. Nelineární ODE 1. řádu
4. Lineární homogenní ODE 2. řádu s konstantními koeficienty
5. Nelineární ODE 1. řádu

2 Popis pomocí diferenciálních rovnic

Napište diferenciální rovnice, které popisují následujícím situace.

1. Molekuly látky spontánně degradují, přičemž pravděpodobnost degradace v následující sekundě je pro všechny molekuly stejná.
2. Bakterie se množí dělením jednotlivých buněk, zároveň pod vlivem antibiotik jednotlivé buňky umírají a zároveň růst bakterií omezuje konkurence o sdílené zdroje. Konkurence je úmerná skutečnosti, že se dvě bakterie setkají u stejného zdroje.
3. Do vany pouštíme vodu konstantní rychlostí. Voda ale otvorem ve dnu vytéká rychlostí úměrnou výšce vody ve vaně. V jakém parametru v rovnici se projeví změna šířky nebo délky vany?
4. Těleso volně padá dolů k zemi, je přitahováno konstantní gravitační silou ($F_g = m.g$). Zároveň však proti pohybu působí odporová síla, která je úměrná druhé mocnině rychlosti tělesa.

Řešení:

1. Označme c koncentraci látky. Rychlost poklesu koncentrace je úměrná koncentraci.
$$\frac{dx}{dt} = -kx$$
2. Označme N počet bakterií. Pravděpodobnost, že se dvě bakterie setkají u stejného zdroje je úměrná N^2. k_1, k_2 a k_3 jsou různé konstanty.
$$\frac{dN}{dt} = k_1N - k_2N - k_3N^2$$
Rovnice je homogenní nelineární.
3. Označme V objem vany, který je roven $V = h.a.b$, kde h, a, b jsou výška, šířka a délka vany. Do vany přitéká voda rychlostí v litrů za sekundu.
$$\frac{dV}{dt} = v - k.h = v - \frac{k}{a.b}V$$
Šířka a délka vany se tedy projeví v konstantě před objemem.
4. Označme h okamžitou výšku, v níž se těleso nachází. Platí
$$F = m.a = m.g - F_{odpor} = m.g - k.v^2$$
Přitom zrychlení $a = -\frac{d^2h}{dt^2}$ a rychlost $v = -\frac{dh}{dt}$. Záporné znaménko proto, že výška míří nahoru, ale za kladnou jsme se rozhodli považovat rychlost i zrychlení dolů. Po dosazení získáme nehomogenní NElineární ODE 2. řádu.
$$-m\frac{d^2h}{dt^2} = m.g - k\left(\frac{dh}{dt}\right)^2$$

3 Pozitivní zpětná vazba

Pozitivní zpětná vazba je charakterizována skutečností, že rychlost změny veličiny je úměrná veličině samotné. Napiště odpovídající diferenciální rovnici a vyřešte ji metodou separace proměnných. Považujte rychlost změny za přímo úměrnou veličině samotné.

Řešení: Odpovídající diferenciální rovnice zní
$$\frac{dx}{dt} = kx$$
Řešením je funkce
$$x = x_0e^{kt}$$
Veličina tedy roste exponenciálně rychle, což se projeví rychlým rozvojem „katastrofy“.

4 Metoda separace proměnných

Metodou separace proměnných vyřešte následující diferenciální rovnice. Uveďte obecné řešení a partikulární řešení pro počáteční podmínku $y(0) = 1$.

1. $\frac{dy}{dx} - 2(y+1) = 0$
2. $x.\frac{dy}{dx} = y$
3. $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 0$

Řešení:

1. Rovnici můžeme separovat na tvar

$$\frac{dy}{y+1} = 2dx$$

Obě strany rovnice zintegrujeme a vyjádříme y jako funkci x.

$$\int \frac{dy}{y+1} = 2\int dx$$

$$\ln(y+1) = 2x + C$$

$$y = -1 + k.e^{2x}$$

$k = e^C$. Tak jsme získali obecné řešení. Pro počáteční podmínku platí

$$1 = -1 + k.e^{2.0} = -1 + k$$

Partikulární řešení tedy zní $y = -1 + 2e^{2x}$.

2. Rovnici můžeme separovat na tvar

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Obě strany rovnice zintegrujeme a vyjádříme y jako funkci x.

$$int\frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = \ln x + C$$

$$y = kx$$

Tak jsme získali obecné řešení. Pro počáteční podmínku platí

$$1 = k.0$$

Tato rovnice nemá žádné řešení. Žádné partikulární řešení odpovídající uvedené počáteční podmínce tedy neexistuje.

3. Rovnici můžeme separovat na tvar

$$\frac{dy}{y} = -3x^2dx$$

Obě strany rovnice zintegrujeme a vyjádříme y jako funkci x.

$$\int \frac{dy}{y} = -3\int x^2dx$$

$$\ln y = -x^3 + C$$

$$y = k.e^{-x^3}$$

Tak jsme získali obecné řešení. Pro počáteční podmínku platí

$$1 = k.e^{-0^3}$$

Partikulární řešení tedy zní $y = e^{-x^3}$.

5 Metoda variace konstant

Ze stejných rovnice, které byly všechny lineární homogenní (t.j. s nulovou pravou stranou), a tím separovatelné, nyní přidáním pravé strany udělání rovnice nehomogenní. Vyřešte tyto rovnice metodou variace konstant. Připomínám, že nejprve zjistíte obecné řešení odpovídající homogenní rovnice (což jste učinili v předchozí úloze). Následně konstantu v obecném řešení zaměníte za funkci proměnné x a budete dále řešit. Uveďte obecné řešení a partikulární řešení pro libovolnou vámi zvolenou počáteční podmínku.

1. $\frac{dy}{dx} - 2(y+1) = 2$
2. $x.\frac{dy}{dx} = y + 1$
3. $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 2$

Řešení:

1. Obecné řešení odpovídající homogenní rovnice ($\frac{dy}{dx} - 2(y+1) = 0$) je $y = -1 + k.e^{2x}$. Nyní budeme k považovat za funkci proměnné x, $k(x)$. Budeme tedy hledat řešení ve tvaru $y = -1 + k(x).e^{2x}$. Derivace je $\frac{dy}{dx} = \frac{dk}{dx}.e^{2x} + k(x).2e^{2x}$. Dosadíme do původní ODE.

$$\frac{dk}{dx}.e^{2x} + k(x).2e^{2x} - 2.(-1 + k.e^{2x} + 1) = 2$$

   Potom je

$$\frac{dk}{dx} = 2.e^{-2x}$$

   Po integraci dostaneme

$$k(x) = \int 2.e^{-2x}dx = -e^{-2x} + C$$

   Obecné řešení nehomogenní rovnice tak vychází

$$y = -1 + (-e^{-2x} + C).e^{2x} = -2 + C.e^{2x}$$

   Derivací ověříme správnost výsledku.

$$\frac{dy}{dx} - 2(y+1) = 2C.e^{2x} - 2(-2 + C.e^{2x} + 1) = 2$$

   Pro stejnou počáteční podmínk $y(0) = 1$ jako v předchozích úlohách vychází partiulární řešení

$$y = -2 + 3.e^{2x}$$

2. Obecné řešení odpovídající homogenní rovnice ($x.\frac{dy}{dx} = y$) je $y = kx$. Budeme tedy hledat řešení ve tvaru $y = k(x).x$. Derivace je $\frac{dy}{dx} = \frac{dk}{dx}.x + k(x)$. Dosadíme do původní ODE.

$$\frac{dk}{dx}x^2 + k(x).x = k(x).x + 1$$

   Potom je

$$\frac{dk}{dx} = 1/x^2$$

Po integraci dostaneme

$$k(x) = \int \frac{dx}{x^2} = -1/x + C$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice tak vychází

$$y = (-1/x + C).x = -1 + Cx$$

Derivací ověříme správnost výsledku.

$$x.\frac{dy}{dx} = x.C = y + 1$$

Pro stejnou počáteční podmínku $y(0) = 1$ jako v předchozích úlohách odpovídající partikulární řešení neexistuje.

3. Obecné řešení odpovídající homogenní rovnice ($\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 0$) je $y = k.e^{-x^3}$. Budeme tedy hledat řešení ve tvaru $y = k(x).e^{-x^3}$. Derivace je $\frac{dy}{dx} = \frac{dk}{dx}.e^{-x^3} - 3k(x).e^{-x^3}x^2$. Dosadíme do původní ODE.

$$\frac{dk}{dx}.e^{-x^3} - 3k(x).e^{-x^3}x^2 + 3x^2.k(x).e^{-x^3} = 2$$

Potom je

$$\frac{dk}{dx}.e^{-x^3} = 2$$

Po integraci dostaneme

$$k(x) = \int 2e^{x^3} dx$$

Tento integrál nelze vyjádřit v uzavřené podobě pomocí elementárních funkcí. Ponechme jej tedy jako řešení v této podobě. Obecné řešení nehomogenní rovnice tak vychází
$y = 2e^{-x^3}.\int e^{x^3} dx$
Derivací ověříme správnost výsledku.

$$\frac{d}{dx}\left(2e^{-x^3}.\int e^{x^3} dx\right) + 3x^2 y = -3x^2.2e^{-x^3}.\int e^{x^3} + 2e^{-x^3}.e^{x^3} + 3x^2 y = -3x^2 y + 2 + 3x^2 y = 2$$

Vzhledem k neznámé primitivní funkci nemůže partikulární řešení přímo vyjádřit.

6 Nehomogenní lineární diferenciální rovnice

Vyřešte následující úlohu. Do vany pouštíme vodu konstantní rychlostí. Voda ale otvorem ve dnu vytéká rychlostí přímo úměrnou objemu vody ve vaně. Na počátku je ve vaně 60 litrů a voda vytéká dnem rychlostí 2 litry/minutu. Vodu napouštíme konstantní rychlostí 1 litr/minutu. Při jakém objemu se ustaví rovnováha, tedy hladina už nebude klesat. Za jak dlouho rovnováha nastane? Pozn. Zhruba považujme dosažení rovnováhy po 5 poločasech.

Řešení:

Označme V objem vany. Do vany přitéká voda rychlostí v litrů za sekundu a odtéká rychlostí úměrnou objemu, tedy $k.V$. Diferenciální rovnice tedy zní

$$\frac{dV}{dt} = v - k.V$$

Jde o nehomogenní lineární ODE s konstantními koeficienty. Odpovídající homogenní rovnice je $\frac{dV}{dt} + k.V = 0$, jejímž obecným řešením je $V = C.e^{-kt}$. Po variaci konstanty hledáne řešení ve tvaru $V = C(t).e^{-kt}$. Derivace je

$$\frac{dV}{dt} = \frac{C(t)}{dt}.e^{-kt} - kC(t).e^{-kt}$$

Po dosazení dostaneme

$$\frac{dC(t)}{dt}.e^{-kt} - kC(t).e^{-kt} + kC.e^{-kt} = v$$

Po integraci získáme

$$C(t) = \int v.e^{kt}dt = \frac{v}{k}e^{kt} + A$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je tedy

$$V = \left(\frac{v}{k}e^{kt} + A\right).e^{-kt} = \frac{v}{k} + A.e^{-kt}$$

Ze dvou počátečních podmínek určíme obě konstanty.

$$V(0) = 60 = \frac{1}{k} + A$$

$$\frac{dV}{dt}(0) = 1 - k.60 = 1 - 2 = -1$$

Proto $k = 2/60 = 1/30$ a $A = 30$. Partikulární řešení je

$$V = 30 + 30.e^{-\frac{t}{30}}$$

V „nekonečném čase“ druhý člen zmizí a ustaví se nový objem 30 l. Pro poločas platí $\frac{\ln 2}{t_{1/2}} = k = 1/30$, tedy $t_{1/2} = 30.\ln 2 = 20,8$ minut. Nový objem bude dosažen po zhruba 5 poločasech, tedy po zhruba 100 minutách.

7 Řešení algebraických rovnic numerickými metodami

Níže uvedený program v Pythonu má aplikovovat algoritmus pro řešení algebraické rovnice $\cos x = x$ Newtonovou metodou tečen. Doplňte vynechaná místa (___) v programu. Zvolte počáteční hodnotu 1.5 a požadovanou přesnost výsledku 0.01. Počítejte počet iterací.

```
import numpy as ___

def g(x):    # definice  funkce
        return np.cos(x) - x


def gdev(x): # definice derivace funkce
        return ___


iterace = 0
x0 = ___
```

```python
x1 = x0-g(x0)/gdev(x0)

epsilon = ___

while abs(x0-x1) ___ epsilon:
        x0 = x1
        x1 = x0-g(x0)/gdev(x0)
        iterace += ___

print(x0)
print(x1)
print(iterace)
```

Řešení:

```python
import numpy as np

def g(x):    # definice  funkce
        return np.cos(x) - x


def gdev(x): # definice derivace funkce
        return -np.sin(x)


iterace = 0
x0 = 1.5
x1 = x0-g(x0)/gdev(x0)

epsilon = 0.01

while abs(x0-x1) > epsilon:
        x0 = x1
        x1 = x0-g(x0)/gdev(x0)
        iterace += 1

print(x0)
print(x1)
print(iterace)
```

8 Numerická integrace

Níže uvedený program v Pythonu má aplikovovat algoritmus pro numerickou integraci funkce x^2 od 0 do 3 pomocí součtu centrovaných obdélníků. Doplňte vynechaná místa (___) v programu. Zvolte integrační krok 0.01.

```python
# metoda centrovaných obdélníků

a = ___
b = ___
dx = ___
```

```
x = a
S = ___

while x ___ b:
      S += (x + 0.5*___)**2 * dx
      x += ___

print(S)
```

Řešení:

```
# metoda centrovaných obdélníků

a = 0
b = 3
dx = 0.01

x = a
S = 0

while x < b:
      S += (x + 0.5*dx)**2 * dx
      x += dx

print(S)
```