

# Matematika pro nematematiky - Úlohy 7

Termín zadání: 08.11.2024

## 1 Typ diferenciální rovnice

Určete, o jakou diferenciální rovnici se jedná, konkrétně tedy určete řád rovnice, zda je rovnice lineární či nelineární, a v případě lineárních rovnice, zda je rovnice homogenní či nehomogenní, případně s konstantními či proměnnými koeficienty. Hledaná funkce se značí různě, někdy  $y$ , někdy  $f$ , někdy  $f(x)$  ...

1.  $\frac{dy}{dx} + 2x = 0$
2.  $\sin x \cdot \frac{dy}{dx} = 2xy - 1$
3.  $\sin\left(\frac{df}{dx}\right) + 2f(x) = 0$
4.  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2x$
5.  $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 2x$

## 2 Popis pomocí diferenciálních rovnic

Napište diferenciální rovnice, které popisují následující situace.

1. Molekuly látky spontánně degradují, přičemž pravděpodobnost degradace v následující sekundě je pro všechny molekuly stejná.
2. Bakterie se množí dělením jednotlivých buněk, zároveň pod vlivem antibiotik jednotlivé buňky umírají a zároveň růst bakterií omezuje konkurence o sdílené zdroje. Konkurence je úměrná skutečnosti, že se dvě bakterie setkají u stejného zdroje.
3. Do vany pouštíme vodu konstantní rychlostí. Voda ale otvorem ve dnu vytéká rychlostí úměrnou výšce vody ve vaně. V jakém parametru v rovnici se projeví změna šířky nebo délky vany?
4. Těleso volně padá dolů k zemi, je přitahováno konstantní gravitační silou ( $F_g = m \cdot g$ ). Zároveň však proti pohybu působí odporová síla, která je úměrná druhé mocnině rychlosti tělesa.

## 3 Pozitivní zpětná vazba

Pozitivní zpětná vazba je charakterizována skutečností, že rychlost změny veličiny je úměrná veličině samotné. Napište odpovídající diferenciální rovnici a vyřešte ji metodou separace proměnných. Považujte rychlost změny za přímo úměrnou veličině samotné.

---

## 4 Metoda separace proměnných

Metodou separace proměnných vyřešte následující diferenciální rovnice. Uveďte obecné řešení a partikulární řešení pro počáteční podmínku  $y(0) = 1$ .

1.  $\frac{dy}{dx} - 2(y + 1) = 0$
2.  $x \cdot \frac{dy}{dx} = y$
3.  $\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 0$

## 5 Metoda variace konstant

Ze stejných rovnice, které byly všechny lineární homogenní (t.j. s nulovou pravou stranou), a tím separovatelné, nyní přidáním pravé strany udělání rovnice nehomogenní. Vyřešte tyto rovnice metodou variace konstant. Připomínám, že nejprve zjistíte obecné řešení odpovídající homogenní rovnice (což jste učinili v předchozí úloze). Následně konstantu v obecném řešení zaměníte za funkci proměnné  $x$  a budete dále řešit. Uveďte obecné řešení a partikulární řešení pro libovolnou vámi zvolenou počáteční podmínku.

1.  $\frac{dy}{dx} - 2(y + 1) = 2$
2.  $x \cdot \frac{dy}{dx} = y + 1$
3.  $\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 2$

## 6 Nehomogenní lineární diferenciální rovnice

Vyřešte následující úlohu. Do vany pouštíme vodu konstantní rychlostí. Voda ale otvorem ve dnu vytéká rychlostí přímo úměrnou objemu vody ve vaně. Na počátku je ve vaně 60 litrů a voda vytéká dnem rychlostí 2 litry/minutu. Vodu napouštíme konstantní rychlostí 1 litr/minutu. Při jakém objemu se ustaví rovnováha (tedy hladina už nebude klesat)? Za jak dlouho rovnováha nastane? Pozn. Zhruba považujeme dosažení rovnováhy po 5 poločasech.

## 7 Řešení algebraických rovnic numerickými metodami

Níže uvedený program v Pythonu má aplikovat algoritmus pro řešení algebraické rovnice  $\cos x = x$  Newtonovou metodou tečen. Doplňte vynechaná místa (\_\_\_) v programu. Zvolte počáteční hodnotu 1.5 a požadovanou přesnost výsledku 0.01. Počítejte počet iterací.

```
import numpy as ___

def g(x):      # definice funkce
    return np.cos(x) - x

def gdev(x):  # definice derivace funkce
    return ___

iterace = 0
x0 = ___
x1 = x0 - g(x0) / gdev(x0)
```

```

epsilon = ___

while abs(x0-x1) ___ epsilon:
    x0 = x1
    x1 = x0-g(x0)/gdev(x0)
    iterace += ___

print(x0)
print(x1)
print(iterace)

```

## 8 Numerická integrace

Níže uvedený program v Pythonu má aplikovat algoritmus pro numerickou integraci funkce  $x^2$  od 0 do 3 pomocí součtu centrovaných obdélníků. Doplňte vynechaná místa (\_\_\_) v programu. Zvolte integrační krok 0.01.

```

# metoda centrovaných obdélníků

a = ___
b = ___
dx = ___

x = a
S = ___

while x ___ b:
    S += (x + 0.5*___)**2 * dx
    x += ___

print(S)

```