

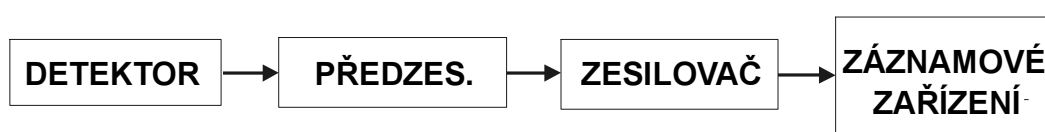
1. STATISTICKÝ CHARAKTER JADERNÉHO ZÁŘENÍ

1. Zadání

- A) Najděte empirické pravděpodobnostní rozdělení $F(N_i)$ pro daný detektor. Ze srovnání průběhu $F(N_i)$ a Poissonova rozdělení $P(N_i)$ udělejte závěr o fungování aparatury.
- B) Zhodnoťte přesnost jednoho měření četnosti impulzů.

2. Přístroje a zařízení

Detekční aparatura jaderného záření (obr. 1.1)



Obr. 1.1 Blokové schéma detekčního zařízení

3. Definice veličin

- Frekvenční diagram
$$F(N_i) = \frac{x_i}{X} \quad (1.1)$$

(empirické pravděpodobnostní rozdělení), kde x_i značí, kolikrát z celkového X opakovaných měření počtu impulzů byla naměřena právě hodnota N_i počtu impulzů. Pracuje-li aparatura správně, je průběh $F(N_i)$ blízký Poissonovu statistickému rozdělení pro malá N_i a Gaussovu rozdělení pro střední hodnotu $N_i > 60$ impulzů za minutu.

- Četnost impulzů,
$$n = \frac{N}{\tau}, \quad (1.2)$$

kde N je počet impulzů zaznamenaných aparaturou za dobu τ , $[n] = s^{-1}$.

4. Metoda měření

- a) Radioaktivní přeměny atomových jader jsou náhodné procesy vyznačující se:
- nízkou pravděpodobností p přeměny určitého jádra,
 - velkým počtem m jedinců (atomových jader), ve kterých může jev přeměny nastat.

Je-li pravděpodobnost přeměny jádra p , pak pravděpodobnost, že tento jev nenastane je zřejmě $(p - 1)$. Obecně pravděpodobnost toho, že při Y pokusech rozpad v prvních y případech nastane a v následujících $Y - y$ pokusech nenastane je:

$$P_y = p^y \cdot (1 - p)^{Y-y} \quad (1.3)$$

Pokud nás zajímá pouze počet případů v nichž rozpad nastane, bez ohledu na pořadí, musíme vzorec (1.3)

vynásobit počtem všech možných kombinací daného jevu, a to $\frac{Y!}{y!(Y-y)!}$.

Na základě toho lze zformulovat obecný vztah pro pravděpodobnost, že při Y opakování nezávislých pokusů se v y případech jádro rozpadne. Tato pravděpodobnost je dána vztahem

$$P_y = p^y \cdot (1-p)^{Y-y} \cdot \frac{Y!}{y!(Y-y)!}, \quad (1.4)$$

což je tzv. Bernoulliho rozdělení [7].

Mějme vzorek radioaktivní látky a předpokládejme, že obsahuje Y atomů, a necht' pravděpodobnost rozpadu jednoho atomu za jednotku času je p . Řešme problém, jaká je pravděpodobnost, že za jednotku času zaregistrujeme y rozpadů. Protože z hlediska výsledného záření je úplně lhostejné, který atom se právě rozpadl, je celková pravděpodobnost toho, že za jednotku naměříme y impulsů, dána Bernoulliovým rozdělením (1.4). Za předpokladu, že $Y \gg y$, tj. že počet rozpadlých atomů za jednotku času vůči celkovému počtu atomů ve vzorku lze zanedbat, platí [7]:

$$\begin{aligned} (1-p)^{Y-y} &\approx (1-p)^Y \approx 1 - Y \cdot p \approx e^{-Y \cdot p}, \\ \frac{Y!}{(Y-y)!} &\approx Y^y, \end{aligned} \quad (1.5)$$

takže námi hledanou pravděpodobnost lze upravit na tvar

$$P_y = \frac{(p \cdot Y)^y}{y!} \cdot e^{-p \cdot Y}, \quad (1.6)$$

což je **Poissonovo rozdělení**.

Při měření je spíše dostupná střední hodnota počtu rozpadů než počet atomů ve vzorku a pravděpodobnost rozpadu jednoho atomu za časovou jednotku. Tyto veličiny nahradíme ve vztahu (1.6) vypočtenou střední hodnotou. Označíme-li střední hodnotu počtu rozpadů za jednu sekundu λ , pak

$$\lambda = \sum_{y=0}^{\infty} y \cdot P_y = \sum_{y=0}^{\infty} y \cdot \frac{(p \cdot Y)^y}{y!} \cdot e^{-p \cdot Y} = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(p \cdot Y)^{y-1}}{(y-1)!} = p \cdot Y \cdot e^{-p \cdot Y} \cdot e^{p \cdot Y} = p \cdot Y \quad (1.7)$$

Takže po dosazení do (1.6) dostáváme tvar pro Poissonovo rozdělení ve tvaru:

$$P_y = \frac{\lambda^y}{y!} \cdot e^{-\lambda}. \quad (1.8)$$

Náhodný (statistický) charakter radioaktivních přeměn znamená, že pokud bychom mohli zjišťovat počty jaderných přeměn v jistém zářiči opakovaně za stejné časové intervaly τ , obdržíme různé hodnoty. Jaderné přeměny jsou doprovázeny emisí částic a je zřejmé, že fluktuovat budou i počty částic vyzářených ze zářiče za dobu τ . Zaznamenáváme-li opakovaně počty impulsů N_i odpovídajících detektorem detekovaným částicím v určité vzdálenosti od zářiče, budou fluktuovat i údaje detekční aparatury.

Předpokládejme, že jsme vykonali „všechna možná“ měření veličin N_i (teoreticky nekonečně mnoho měření) a obdrželi tak úplný statistický soubor, z něhož lze zpracovat pravděpodobnostní (rozdělovací) funkce diskrétní náhodné proměnné N_i . Funkci označíme $P(N_i)$. Vzhledem k (1.8) by funkce $P(N_i)$ měla mít průběh Poissonova rozdělení [1,3,6], pak

$$P(N_i) = \frac{\lambda^{N_i}}{N_i!} \cdot e^{-\lambda}, \quad (1.9)$$

kde λ má význam střední hodnoty veličin N_i , $P(N_i)$ má význam pravděpodobnosti, že náhodně vybrané měření počtu impulsů dá N_i .

Mírou rozptylu dalších naměřených hodnot v okolí střední hodnoty λ je směrodatná odchylka σ . Pro Poissonovo rozložení platí

$$\sigma = \sqrt{\lambda}. \quad (1.10)$$

Pokud náš úplný soubor měření bude splňovat vztah (1.9) a (1.10), tj. má Poissonovo rozdělení, můžeme říci, **že naše aparatura je v pořádku**, protože sleduje statistický charakter jaderného záření. V opačném případě rušivě zasahuje do měření nějaký jev, např. chybná funkce aparatury.

Problémem je okolnost, že nemůžeme vykonat nekonečný počet měření, ani hodně velký počet, např. několik tisíc měření. Statistická teorie nám nabízí následující postup. Naměříme-li pouze výběrový (menší) soubor a ten splňuje určité podmínky, můžeme z jeho vlastností usuzovat na vlastnosti úplného souboru.

Předpokládejme tedy, že naměříme výběrový (malý) soubor N_1, N_2, \dots, N_x , kde X je 100 až 200. Z výsledků sestrojíme frekvenční diagram (empirické pravděpodobnostní rozdělení) $F(N_i)$,

Dále vypočítáme výběrový (empirický) aritmetický průměr λ_e

$$\lambda_e = \frac{\sum_{i=1}^X N_i}{X} = \sum_{i=1}^K N_i \cdot F(N_i), \quad (1.11)$$

o kterém budeme předpokládat, že se blíží střední hodnotě úplného souboru λ .

Směrodatnou odchylku σ úplného souboru nahradíme výběrovou (empirickou) směrodatnou odchylkou σ_e

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^X (N_i - \lambda_e)^2}{X - 1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^K F(N_i) \cdot (N_i - \lambda_e)^2}. \quad (1.12)$$

Splňují-li λ_e a σ_e alespoň přibližně relaci analogickou (1.10), tj.

$$\sigma_e = \sqrt{\lambda_e}, \quad (1.13)$$

můžeme také o $F(N_i)$ předpokládat, že je blízké $P(N_i)$, což nám dovoluje charakterizovat úplný soubor výsledky získané z (1.11) a (1.12). **Jsou-li $F(N_i)$ a $P(N_i)$ blízké, můžeme učinit závěr, že aparatura pracuje dobře.**

Hlavními výsledky uvedeného postupu je **možnost posoudit správnost funkce aparatury a dále učinit odhad přesnosti ojedinelého měření**, které je v praxi obvyklejší, než mnohokrát opakované.

b) V případě jediného měření nám nezbyvá nic jiného, než výběrový aritmetický průměr (tj. který je nejbližší střední hodnotě měřeného počtu impulzů) nahradit právě jedním vykonaným měřením N_1 . To znamená, že předpokládáme

$$\lambda_e = N_1 \quad \text{a} \quad \sigma_e = \sqrt{N_1}.$$

Velikost σ_e (výběrová směrodatná odchylka) ukazuje odhad, o kolik se střední hodnota λ_e liší od hodnoty četnosti N_1 získané z jediného měření. V tomto smyslu budeme σ_e nazývat **výběrovou směrodatnou odchylkou (nejistotou) σ_e měřeného počtu impulzů N_1 .**

Relativní nejistotou měřeného počtu impulzů N_I nazýváme veličinu

$$\delta N = \frac{\sigma_e}{N_1} = \frac{1}{\sqrt{N_1}}. \quad (1.14)$$

Ze vztahu (1.14) můžeme k žádané velikosti relativní nejistoty stanovit potřebný počet impulzů N_I , resp. dobu měření. Např. má-li být $\delta N = 1\%$, je potřeba naměřit 10^4 impulzů. Často budeme potřebovat místo počtu impulzů četnost n , kterou vypočítáme podle (1.2). Zanedbáme-li nejistotu měření času, bude směrodatná odchylka (nejistota) jednoho měření četnosti

$$\sigma_n = \frac{\sqrt{N}}{\tau} \quad \text{a relativní nejistota} \quad \delta n = \frac{\sigma_n}{n} = \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (1.15)$$

Ve většině případů musíme naměřenou četnost korigovat o četnost impulzů způsobených pozadím (např. kosmickým zářením apod.)

četnost impulzů od zářiče = celková četnost - četnost od pozadí

$$n_z = n_c - n_p. \quad (1.16)$$

Pro směrodatnou odchylku četnosti od zářiče pak platí

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_c^2 + \sigma_p^2} = \sqrt{\frac{n_c}{\tau_c} + \frac{n_p}{\tau_p}}. \quad (1.17)$$

Má-li být chyba σ_z minimální je nutno volit doby měření tak, aby platilo (viz [3])

$$\frac{\tau_c}{\tau_p} = \sqrt{\frac{n_c}{n_p}}. \quad (1.18)$$

Z rozboru (1.17) a (1.18) dále plyne [2], je-li četnost impulzů od pozadí n_p nejméně o jeden řád nižší než četnost impulzů od zářiče n_z , je možno nejistotu pozadí zanedbat.

Ze vztahu (1.15) a (1.18) také plyne, jak volit délku časového intervalu τ , abychom měření četnosti obdrželi s požadovanou přesností.

5. Pokyny pro měření

a) Zářič umístěte do takové vzdálenosti, aby počet impulzů od zářiče splňoval podmínku $n_z \approx 1$.

b) Měřte soubor N_1, N_2, \dots, N_x , vždy za vhodně zvolenou dobu τ s ohledem na to, že počet opakovaných měření X má dosáhnout počtu 100 až 200. Měření hned zaznamenávejte do grafu, který bude mít na ose x hodnoty z intervalu (nejmenší číslo z N_1, N_2, \dots, N_x ; největší číslo z N_1, N_2, \dots, N_x). Na ose y vynášejte počet výskytů x_i hodnot N_i .

c) Zjistíme orientačně četnosti n_c a n_p , abychom podle (1.18) zvolili optimálně doby měření τ_c a τ_p s ohledem na čas, který máme k dispozici, zadanou přesnost apod.

d) Na základě předchozího rozboru změříme veličiny potřebné k výpočtu četnosti impulzů od zářiče n_z (1.16).

Poznámka:

Je také možno měřit pouze četnosti od pozadím pokud je splněna podmínka $n_p \approx 1$.

6. Pokyny pro zpracování

- a) Pomocí (1.1) sestrojte v tabelární a grafické formě rozdělovací funkci $F(N_i)$
- b) Podle (1.11) vypočítejte λ_e
- c) Ze vztahu (1.12) vyjádřete σ_e
- d) Ověřte, zda platí (1.13). V kladném případě dosaďte do (1.9) za parametr λ vypočítaný λ_e a do grafu $F(x_i)$ zakreslete také $P(x_i)$
- e) Prostým srovnáním obou průběhů funkcí vyvodte závěr pro funkci aparatury. Tj. jsou-li průběhy blízké, aparatura pracuje dobře, a naopak.

Pozn.: pokud umíte pro srovnání $F(x_i)$ a $P(x_i)$ uplatnit některý z testů dobré shody (např. χ^2), učiňte tak. Podrobněji viz např. [4,5].

f) Podle (1.17) vyjádřete nejistotu měření σ_z . Takto získaná hodnota σ_z nás informuje o tom, že veličina n_z leží s pravděpodobností asi 68% v intervalu $(\lambda_e - \sigma_z, \lambda_e + \sigma_z)$, je-li $n_z > 1$.

g) Naměřené a vypočítané veličiny uspořádejte do vhodných tabulek.

Použitá literatura:

- [1] Šeda J. a kol.: Dozimetrie ionizujícího záření, SNTL 1983
- [2] Šeda J., Sabol J., Kubálek J.: Jaderná elektronika SNTL 1977
- [3] Knoll F.G.: Radiation Detection and Measurement, Wiley, New York, 1989
- [4] Rektorys K. a kol.: Přehled užití matematiky I a II, PROMETHEUS 1995
- [5] Matyáš V.: Základy teorie chyb měření VUT 1979
- [6] Meloun M., Mílitký J.: Statistické zpracování experimentálních dat, PLUS Praha, 1994
- [7] Škrášek J.: Úvod do počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky, 2.vydání, S-2703, VA Brno, 1971

Klíčové výrazy:

Četnost impulzů n [3], **četnost impulzů od zářiče** [3], **četnost impulzů od pozadí** [3], **frekvenční diagram** [3], [4], [5], **nejistota měření** [4], [5], **nejistota měření relativní** [4], [5], **pozadí** (viz četnost impulzů od pozadí) [3], **přesnost jednoho měření počtu impulzů** [3], [4], [5], **přesnost opakovaného měření počtu impulzů** [3], [4], [5], **statistické rozdělení Poissonovo** [3], [4], [5], [7], **výběrová směrodatná odchylka** [3], [4], [5].

Návrh tabulek pro zápis naměřených hodnot a jejich zpracování:

Tabulka 1

X_i																
50													.	.	.	
.													.	.	.	
.													.	.	.	
.													.	.	.	
8																
7																
6																
5																
4																
3																
2																
1																
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	.	.	.	30
													N_i			

Počet měření:	1	2	3	4	5	6	.	.	.	25
	26	27	28	29	30	31	.	.	.	50
	51	52	53	54	55	56	.	.	.	75
	76	77	78	79	80	81	.	.	.	100

Tabulka 2

Jméno:			
Datum:			
Čas měření:			
Laboratorní podmínky:	Atm.tlak b_0 (kPa):		
	Teplota t ($^{\circ}\text{C}$):		
	Rel.vlhkost p (%):		

i	N_i	x_i	$F(N_i)$	$N_i \cdot F(N_i)$	$F(N_i) \cdot (N_i - \lambda_e)^2$	$P(N_i)$
0						
1						
2						
3						
.						
.						
.						
30						