

# CHYBY A NEJISTOTY MĚŘENÍ

## 1.1 Veličiny a jejich hodnoty

Při měření vystupují měřené veličiny a ovlivňující veličiny.

**Měřená veličina** je veličina, jejíž stanovení je cílem měření.

**Ovlivňující veličina** je veličina, která není měřenou veličinou, ale která má vliv na výsledek měření. Ovlivňující veličiny mají svůj původ v prostředí nebo v použitých měřicích prostředcích. Jsou to např. teplota okolí, tlak, vlhkost apod.

Často měření a výsledky měření vážeme na určité konkrétní hodnoty vlivňujících veličin; ty pak označujeme jako **referenční hodnoty**. Může se stanovit i interval hodnot ovlivňujících veličin - ten se nazývá **referenční oblast**. Souhrn referenčních hodnot a referenčních oblastí vytváří **referenční podmínky**.

Velikost určité veličiny, která se dá všeobecně vyjádřit jako měřicí jednotka vynásobená číslem, nazýváme **hodnota veličiny**. Např. hodnota hmotnosti tělesa je 165 g; běžně ale hovoříme, že hmotnost tělesa je 165 g.

Hodnotu, která charakterizuje dokonale definovanou veličinu za podmínek existujících v okamžiku měření této hodnoty, nazýváme **pravou (skutečnou) hodnotou** měřené veličiny. Je to hodnota, která by se dala získat dokonalým měřením. Skutečná hodnota veličiny je ideální pojem; kromě malých výjimek není přesně známa. (Výjimky tvoří např. teplota trojného bodu vody 273,16 K nebo rychlost světla ve vakuu 299 792 459 m/s). Z podstaty každé skutečné hodnoty vyplývá, že se nedá přesně určit.

Protože neznáme skutečnou hodnotu, nahrazujeme ji tzv. **konvenčně pravou hodnotou**. To je hodnota dostatečně blízká skutečné hodnotě; může proto pro daný účel nahradit skutečnou hodnotu. Rozdíl mezi skutečnou hodnotou a konvenčně pravou hodnotou se dá prakticky zanedbat. Příkladem konvenčně pravých hodnot jsou teploty pevných bodů v mezinárodní teplotní stupnici (mimo hodnoty trojného bodu vody). Ke stanovení konvenční pravé hodnoty využíváme často velký počet výsledků měření.

Hodnota měřené veličiny, kterou udává měřidlo, se nazývá **údaj měřidla**. Hodnota odečítaná ze zobrazujícího zařízení (displeje) se může někdy nazývat **přímý údaj**. Přímý údaj dává po vynásobení přístrojovou konstantou údaj o měřené veličině.

Hodnota náležející měřené veličině a získaná měřením představuje **výsledek měření**. Při použití názvu „výsledek měření“ je nutno uvést, zda se vztahuje na

- údaj měřidla,
- nekorigovaný výsledek,
- korigovaný výsledek.

**Nekorigovaný výsledek** je výsledek měření, při kterém se neuplatňují korekce známých systematických chyb.

**Korigovaný výsledek** měření je výsledek po korekci systematických chyb. Výsledkem měření může být často i hodnota získaná výpočtem z vícero opakovaných měření nebo z výsledků měření více veličin při nepřímém měření.

**Úplný údaj** výsledku obsahuje kromě výsledné hodnoty měřené veličiny též údaj o nejistotě měření. (viz podrobně v dalším textu)

Těsnost shody mezi výsledkem měření a skutečnou hodnotou nazýváme **přesnost měření**.

## 1.2 Chyby v měření

Chyba měření je souhrnná hodnota zahrnující celou řadu dílčích chyb.

Zdroje chyb měření:

- **přístrojové chyby** - jsou to chyby vyplývající z nedokonalosti použitých měřicích prostředků. Část chyb vznikajících při výrobě se též při výrobě odstraňuje; hodnoty některých chyb udává výrobce formou korekčních křivek, ostatní chyby udává výrobce jako maximální dovolenou chybu (se znaménkem  $\pm$ )
- **chyby instalace** - to jsou chyby vyplývající z nedostatků zapojení, uložení a nastavení měřidel, ze vzájemného ovlivňování měřidel, z ovlivnění hodnot měřené veličiny měřidlem (vyztužení stěny nalepeným tenzometrem) apod.
- **chyby metody** - vyplývají z nedokonalosti použitých měřicích metod, z použití přibližných hodnot fyzikálních konstant a nepřesných závislostí,
- **chyby pozorování**
- **chyby výpočtové** - vznikají při zpracování naměřených hodnot (použití přibližných vztahů, chyby interpolace nebo extrapolace, linearizace apod.)

Některé z těchto chyb se vyskytují jako systematické, jiné jako náhodné.

Rozdíl mezi výsledkem měření a skutečnou hodnotou se nazývá absolutní chyba měření. Jestliže nemůžeme určit skutečnou hodnotu, potom se v praxi pro vyjádření chyby používá konvenčně pravá hodnota.

Pozor! Nezaměňovat absolutní chybu za absolutní hodnotu chyby (ta je velikostí chyby bez ohledu na znaménko).

Poměr absolutní chyby k skutečné (resp. konvenčně pravé) hodnotě je relativní chyba měření.

Chyby měření mohou být podle svého charakteru **náhodné** a **systematické**:

- **Náhodná chyba** je složka chyby, která se mění při opakovaných měřeních té jisté veličiny nepředvídatelným způsobem.
- **Systematická chyba** je složka chyby měření, která zůstává konstantní při opakovaných měřeních anebo se mění způsobem, který se dá předvídat.

Systematické chyby mohou být pro konkrétní měření **známé** nebo **neznámé**.

Podobně jako zpravidla neznáme skutečnou hodnotu měřené veličiny tak též zpravidla úplně neznáme ani systematickou chybu. Známe ji jen s určitou nejistotou. Znamé systematické chyby vylučujeme z výsledku měření **korekcí** údajů (výsledků). Korekce se rovná záporné hodnotě systematické chyby.

Náhodné chyby a nevyhloučené systematické chyby se potom zohledňují ve výsledku měření jeho nejistotou.

**Nejistota měření** je parametr související s výsledkem měření a charakterizující rozptyl hodnot, které je možno racionálně přiřadit k měřené veličině.

Nejistota měření může obecně zahrnovat více složek. Některé se mohou určit statistickým vyhodnocením série měření, jiné se dají určit na základě zkušeností z předpokládaného rozdělení nebo z jiných informací. Vyjádření výsledků měření je jen tehdy úplné, jestliže obsahuje hodnotu přiřazenou měřené veličině a nejistotu měření spojenou s touto hodnotou.

Při vyhodnocování měření je důležité rozlišovat, zda se opakované měření uskutečnilo za stejných podmínek nebo při rozdílných podmínkách.

Těsnost shody mezi navzájem nezávislými výsledky řady měření té jisté měřené veličiny, která se uskutečnila za stejných podmínek, se nazývá **opakovatelnost** měření. Tyto podmínky se nazývají **podmínky opakovatelnosti** a zahrnují:

- tentýž postup měření,
- tentýž pozorovatel,
- tentýž měřicí přístroj použitý za stejných podmínek,
- totéž místo,
- opakování v průběhu krátké časové periody.

Těsnost shody mezi navzájem nezávislými výsledky měření téže měřené veličiny provedených za změněných podmínek měření se nazývá **reprodukovatelnost** měření. Při vyjádření reprodukovatelnosti je třeba specifikovat, které podmínky se změnilo. Změněné podmínky mohou zahrnovat:

- princip měření,
- metodu měření,
- pozorovatele,
- měřicí přístroj,
- referenční etalon,
- místo,
- podmínky použití,
- čas.

Kvantitativně se opakovatelnost a reprodukovatelnost mohou vyjádřit příslušnými výběrovými směrodatnými odchylkami nebo výběrovými rozptyly.

## 1.3 Nejistoty v měření

### 1.3.1 Úvod k nejistotám

Podle ČSN EN 45 001, čl. 5.4.3 se požaduje, aby se uváděly kvantitativní výsledky měření nebo zkoušky i včetně stanovených nejistot měření (všude tam, kde je to možné). Stanovení uváděných nejistot měření má být doloženo postupem výpočtu.

Akreditační orgány sledují, zde jimi akreditované laboratoře splňují tyto požadavky. Nicméně při provádění akreditace v této oblasti mohou být uznány a vzaty v úvahu obecný stav vývoje a užití nejistot v měření, zkoušení a při kalibraci v rámci EA.

Podnět k novému přístupu k hodnocení přesnosti měření vyšel v roce 1978 od CIPM (Comité International des Poids et Mesures). Materiál vyšel v roce 1992 pod hlavičkou výše uvedených organizací s názvem „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“ (stručně označován GUM). V roce 1993 TPM 0051-93 „Stanovení nejistot při měření“. TPM 0051-93 je respektován i v České republice.

ČIA vydal v roce 1995 dokument EAL-R2 „Metodika vyjadřování nejistot měření při kalibracích“ a v roce 1997 upravené vydání se stejným označením i názvem. Při akreditačním procesu ČIA je nutné respektovat dokument EAL-R2 z roku 1997.

Tyto předpisy nám vzaly vžitě pojmy systematická a náhodná chyba a zavedly nové pojmy, nejistota stanovená metodou A a nejistota stanovená metodou B.

### 1.3.2 Zdroje nejistot měření

Nejistota výsledku měření odráží omezenou možnost znalosti hodnoty měřené veličiny. Úplné poznání by vyžadovalo nekonečné množství informací. Jevy přispívající k nejistotě a způsobující, že výsledek měření nemůže být charakterizován pouze jedinou hodnotou, se nazývají **zdroje nejistot**.

V praxi existuje mnoho možných zdrojů nejistot měření; patří mezi ně např.

- a) neúplná definice měřené veličiny,
- b) nedokonalá realizace definice měřené veličiny,
- c) nereprezentativní výběr vzorků - měřený vzorek nemusí reprezentovat definovanou měřenou veličinu,
- d) nedostatečná znalost vlivů okolního prostředí nebo jejich nedokonalé měření,
- e) vliv lidského faktoru při odečítání analogových měřidel,
- f) omezená rozlišovací schopnost měřicího přístroje nebo práh rozlišení,
- g) nepřesnost měřicích etalonů a referenčních materiálů,
- h) nepřesné hodnoty konstant a dalších parametrů získaných z externích zdrojů a použitých v algoritmu při výpočtu,
- i) aproximace a zjednodušení obsažené v měřicí metodě a postupu,
- j) změny v opakovaných pozorováních měřené veličiny, která jsou prováděna za zjevně shodných podmínek

Zdroje nejistot nemusí být nutně nezávislé. Některé ze zdrojů nejistot uvedené pod body a) až i) mohou přispívat k zdroji nejistot uvedenému pod bodem j).

Při určování nejistot vycházíme z teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Předpokládáme přitom, že měřené hodnoty a chyby mají určité rozdělení pravděpodobnosti. Potom i výsledek měření má určité rozdělení pravděpodobnosti.

### 1.3.3 Standardní a rozšířená nejistota

Základní kvantitativní charakteristikou nejistoty je **standardní nejistota** - označujeme  $u$ . Standardní nejistota je rovna směrodatné odchylce příslušného rozdělení pravděpodobnosti.

#### **Standardní nejistoty se dělí podle způsobu získání na:**

nejistoty získané statistickými metodami z naměřených údajů - zkráceně nazývané „nejistoty stanovené metodou A“ nebo ještě kratěji (ale nevhodně a věcně nesprávně) „nejistoty typu A“ - označované  $u_A$

nejistoty získané jiným způsobem než v předchozím případě - nazývané „nejistoty stanovené metodou B“, kratěji (stejně jako v předchozím – nevhodně a věcně nesprávně) „nejistoty typu B“, označované  $u_B$ .

Je třeba zdůraznit, že nečleníme nejistoty, ale metody jejich vyhodnocení na metodu A a metodu B. Nejistoty určené oběma metodami (pokud jsou vyhodnoceny korektně) jsou rovnocenné. Existuje více složek nejistot, z nichž každá je vyhodnocena některou z popsanych metod.

Charakteristickým znakem nejistot vyhodnocovaných metodou A je to, že s rostoucím počtem měření jejich hodnoty klesají. Nejistoty vyhodnocované metodou B nejsou závislé na počtu měření.

Na rozdíl od nejistot vyhodnocených metodou A, kde se příčiny nejistot všeobecně považují za neznámé, se nejistoty vyhodnocované metodou B váží na známé nebo identifikovatelné zdroje.

Nejistoty stanovené metodou B určují ve většině případů celkovou nejistotu. Opomenutí jediné významné složky zničí celou stavbu výpočtu nejistot. A že to počítání není zase tak snadné, ukazuje výsledek mezinárodního porovnání ALE, EL 23, kde se v oblasti elektroniky na základě zadaných dat jednoduchého měření zpracovával protokol a počítaly nejistoty. 89 laboratoří od Evropy přes Jižní Afriku až po Nový Zéland vyčíslilo nejistoty a výsledky se lišily až o dva řády.

Pamatujme, že existují dva způsoby, jak dosáhnout malé nejistoty měření: její podstatné složky z neznalosti nezapočítáme, na základě velkých znalostí je umíme potlačit nebo korigovat. Snažme se nepatřit do první skupiny.

Charakter nejistot stanovených metodou B je více individuální a vyžaduje znalosti příslušného oboru měření. Charakter nejistot stanovených metodou A je více univerzální, protože vyhodnotit skupinu údajů měření je třeba ve všech oborech měření.

Sloučením standardní nejistoty vyhodnocené metodou A a standardní nejistoty vyhodnocené metodou B (dále uvedeným postupem) získáme **kombinovanou standardní nejistotu**.

Standardní nejistoty vytvářejí interval pokrývající skutečnou hodnotu měřené veličiny s poměrně malou pravděpodobností (např. okolo 66 % při normálním rozdělení). Často ale požadujeme hodnotu nejistoty, která by vytvářela interval s větší pravděpodobností pokrytí skutečné hodnoty. Takovou nejistotu nazýváme **rozšířenou nejistotu** - označujeme  $U$ :

$$U = k \cdot u$$

k ... koeficient rozšíření

Jestliže můžeme předpokládat normální rozdělení výsledku měření, volíme  $k$  jako kvantil normovaného normálního rozdělení (např. pro pravděpodobnost pokrytí přibližně 95 % bude  $k = 2$  – viz statistické tabulky). Tento předpoklad je dosti častý vzhledem k centrální limitní větě : z ní vyplývá, že v případě, kdy je více složek nejistot (v praxi často stačí 3 a více) odvozených od „slušných“ rozdělení pravděpodobností nezávislých veličin (např. normálních rozdělení nebo rovnoměrných rozdělení) přispívajících ke standardní nejistotě odhadu výstupní veličiny porovnatelnými velikostmi, bude se rozdělení pravděpodobnosti odhadu výstupní veličiny značně blížit normálnímu rozdělení. Je třeba se ale o tom experimentálně přesvědčit.

### 1.3.3.1 Poznámky

1. Pojem nejistoty v měření se původně spojoval jen s náhodnými chybami a hodnota nejistoty byla totožná s intervalem spolehlivosti při zvolené konfidenční pravděpodobnosti.
2. I když tu je určitá souvislost nejistot stanovených metodou A s náhodnými chybami a nejistot stanovených metodou B s chybami systematickými, nedoporučuje se používat názvy náhodná, resp. systematická nejistota .
3. Standardní nejistota vymezuje rozsah hodnot  $\langle -u, +u \rangle$  kolem udávané hodnoty. Při uvádění hodnoty za rovnítkem (=) se píše bez znaménka. Jestliže se připojuje k hodnotě výsledku, dává se před její číselnou hodnotu znaménko  $\pm$  .
4. Standardní nejistotu je možno vyjádřit v hodnotách měřené veličiny (tehdy se - analogicky jako při chybách - používá název **absolutní standardní nejistota**) nebo poměrem absolutní nejistoty k hodnotě příslušné veličiny (příčemž se v tomto případě používá název **relativní standardní nejistota**).

### 1.3.4 Přímé a nepřímé metody měření

Podle způsobu získání měřené veličiny rozlišujeme:

- **přímé** metody, spočívající v přímém odečtu hodnoty měřené veličiny na měřicím přístroji, aniž by se musel provádět výpočet podle dané závislosti měřené veličiny na veličinách jiného druhu, které bychom jinak měřili. Do této skupiny metod se zahrnuje i použití grafů a tabulek, pomocí nichž se převede údaj přístroje na hodnotu určované veličiny;
- **nepřímé** metody potřebují k určení hodnoty zjišťované veličiny výpočtové vztahy (funkční závislosti) vázané na jednotlivé měřené veličiny;
- **kombinační** měřicí metody, u nichž se stanoví hodnoty měřených veličin z různých kombinací výsledků přímých měření a řešením příslušné soustavy rovnic.

## 1.3.5 Určení nejistot při přímém měření

### 1.3.5.1 Standardní nejistoty

#### 1. Vyhodnocení standardní nejistoty **metodou A**

Jak již bylo uvedeno, je toto vyhodnocení standardní nejistoty metodou vyhodnocení nejistoty pomocí statistické analýzy naměřených údajů. V případě opakovaných přímých měření jde o statistické zpracování výsledků opakovaných přímých měření. Zde nejčastěji předpokládáme, že naměřené hodnoty získáme nezávislými měřeními za stejných podmínek měření.

To znamená, že máme k dispozici  $n$  naměřených údajů  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Naměřené údaje jsou realizací  $n$  nezávislých stejně přesných měření jedné veličiny. Potom bude: odhad hodnoty

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

měřené veličiny

- standardní nejistota určená metodou A tohoto odhadu je rovna směrodatné odchylce aritmetického průměru

$$u_{Ax} = s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Podmínkou vyhodnocení metodou A je realizace vícero opakovaných měření.

#### 2. Vyhodnocení standardní nejistoty **metodou B**

Nejistoty vyhodnocované metodou B se vážou na známé, identifikovatelné a kvantifikované zdroje. Vyhodnocení metodou B vychází z kvalifikovaného úsudku založeného na všech dostupných informacích o měřené veličině X a jejich možných změnách.

Zdroji informací mohou být:

- dosavadní měření a výsledky získané při předchozích měřeních,
- zkušenosti a všeobecné znalosti o chování měřeného objektu, měřicích metodách, měřicích prostředcích a podmínkách měření,
- specifikace získané od výrobců o měřicích prostředcích a podmínkách používání,
- údaje z certifikátů, kalibračních listů, ověřovacích listů apod.,
- nejistoty referenčních údajů převzatých z různých pramenů

Rámcový postup stanovení nejistot metodou B je následující:

1. vytipují se možné zdroje těchto nejistot  $Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_m$ ,
2. určí se standardní nejistota metodou B každého zdroje a to:

- převzetím hodnot nejistot z technické dokumentace (certifikáty, kalibrační listy, technické normy, údaje výrobců použitých zařízení, technické tabulky, tabulky fyzikálních konstant apod.), nebo
- odhadem metodami uvedenými v dalším textu,

3. přepočítají se určené nejistoty  $u_{z_j}$  z jednotlivých zdrojů na odpovídající složky nejistoty měřené veličiny  $u_{x,z_j}$  [viz dále],

4. posoudí se možnost korelací mezi jednotlivými zdroji nejistot typu B a v kladném případě se odhadnou hodnoty korelačních koeficientů  $r_{z_j, k}$  z intervalu  $\langle -1, +1 \rangle$  [viz dále],
5. přepočítané složky nejistot se sloučí do výsledné nejistoty  $u_{B_x}$  [viz dále].

ad 1) zdroje nejistot

Zdrojem nejistot při měřeních jsou nedokonalosti (vlastnosti nebo znalosti):

- použitím měřicích prostředků, především měř., měřicích přístrojů a převodníků,
- použitých měřicích metod,
- podmínek měření, především hodnot ovlivňujících veličin,
- konstant použitých při vyhodnocování,
- vztahů (závislostí) použitých při vyhodnocování.

ad 2) základní metoda odhadu standardní nejistoty  $u_{B_x}$  typu B ze zdroje Z pozůstává z následujících kroků:

- odhadne se rozsah změn - odchylek  $\pm z_{\max}$  od nominální hodnoty veličiny odpovídající zdroji, jejichž překročení je málo pravděpodobné,
- posoudí se průběh pravděpodobnosti odchylek v tomto intervalu a v tab. se najde jeho nejvhodnější aproximace,
- standardní nejistota typu B spojená s tímto zdrojem se určí ze vztahu

$$u_{B_j} = \frac{z_{\max}}{\chi}$$

kde  $\chi$  se převezme z obr. podle zvolené aproximace:

$\chi = 2, \chi = 3$  pro Gaussovo rozdělení

$\chi = \sqrt{3}$  pro rovnoměrné rozdělení

$\chi = 2,45$  pro trojúhelníkové rozdělení

Aproximaci normálním rozdělením použijeme tehdy, kdy se častěji mohou vyskytovat odchylky od nominální hodnoty malých velikostí a s rostoucí velikostí klesá četnost jejich výskytu. (Např. je-li zdrojem nejistoty měřicí přístroj od spolehlivého výrobce u kterého lze předpokládat, že většina přístrojů bude s malými chybami.)

Aproximaci rovnoměrným rozdělením použijeme tehdy, kdy je stejná pravděpodobnost výskytu jakékoliv odchylky v daném intervalu  $\pm z_{\max}$ . Tato aproximace se používá nejčastěji.

Důvod je i ten, že nejčastěji nemáme dostatečné poznatky o rozdělení pravděpodobnosti výskytu odchylek a tedy nemáme důvod upřednostnit některé odchylky.

Aproximaci trojúhelníkovým rozdělením použijeme obdobně jako normálním.

Při použití číslicového měřicího přístroje je jedním ze zdrojů nejistoty rozlišitelnost poslední platné číslice. To znamená, že i při neměnicím se údaji při opakovaném měření není nejistota nulová. Odhad nejistoty se v tomto případě zakládá na předpokladu rovnoměrného rozdělení v intervalu, který je vymezený rozlišitelností daného přístroje  $\delta_{z_i}$

$$u_{B_{z_i}} = \frac{\delta_{z_i}}{2\sqrt{3}} = 0,29 \cdot \delta_{z_i}$$



Při použití analogového měřicího přístroje odčitelnost daná hodnotou dílku stupnice  $\delta_z$ .  
Potom standardní nejistotu určíme se stejného vztahu jako v předchozím případě.

ad 3) Odhadnuté nejistoty z jednotlivých zdrojů  $Z_j$  se přenášejí do nejistoty naměřené hodnoty veličiny  $X$  a tvoří její složky  $u_{x,zj}$ , které se vypočítají ze vztahu

$$u_{x,zj} = A_{x,zj} \cdot u_{zj}$$

Hodnoty převodového (citlivostního) koeficientu  $A_{x,zj}$  se stanoví ze závislosti

$$X = f(Z_1, \dots, Z_j, \dots, Z_m)$$

použitím vztahu (založeném na použití Taylorovy řady při zanedbání členů vyšších řádů)

$$A_{x,zj} = \left. \frac{\partial X}{\partial Z_j} \right|_{Z=z}$$

kde  $z = [z_1, \dots, z_j, \dots, z_m]$  jsou aktuální hodnoty veličin  $Z_j$ .

Jestliže závislost  $X = f(Z)$  není známa, stanoví se  $A_{x,zj}$  experimentálně změřením hodnoty  $\Delta x_{zj}$  při malé změně  $\Delta z_j$  a dosazením do vztahu

$$A_{x,zj} \approx \frac{\Delta x_{zj}}{\Delta z_j}$$

ad 4) Při přímém měření jedné veličiny je korelace mezi veličinami  $Z_j$ , reprezentujícími zdroje nejistot typu B, řídká a výjimečně se může vyskytnout při korelovaných ovlivňujících veličinách (např. když ovlivňující veličinou je teplota a relativní vlhkost vzduchu). Proto pro stanovení výsledné standardní nejistoty typu B se zpravidla použije Gaussův zákon šíření nejistot

$$u_{Bx} = \sqrt{\sum_{j=1}^m A_{x,zj}^2 \cdot u_{zj}^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^m u_{x,zj}^2}$$

### 1.3.5.2 Kombinovaná standardní nejistota

Jestliže předpokládáme, že není žádná závislost mezi zdroji nejistot vyhodnocovanými metodou A a metodou B, potom v souladu s Gaussovým zákonem šíření nejistot platí pro kombinovanou standardní nejistotu vztah

$$u_{Cx} = \sqrt{u_{Ax}^2 + u_{Bx}^2}$$

Poznámka.

Použití Gaussova zákona šíření nejistot je zdůvodněno neschopností spolehlivého odhadu, resp. zanedbatelnou korelací mezi nejistotami typu A a typu B.

### 1.3.5.3 Rozšířená nejistota měření

Standardní nejistoty vytvářejí interval pokrývající skutečnou hodnotu měřené veličiny s poměrně malou pravděpodobností (např. okolo 66 %). V praxi ovšem požadujeme hodnotu nejistoty, která by vytvářela interval s pravděpodobností pokrytí skutečné hodnoty více nebo méně blízkou 100 %. Takovouto nejistotu nazýváme **rozšířenou nejistotou** - značíme U. Určí se pomocí vztahu

$$U = k \cdot u_{Cx}$$

Koeficient  $k$  rozšíření intervalu pokrytí skutečné hodnoty se též nazývá koeficientem rozšíření nebo koeficientem pokrytí.

Jeho hodnota se určuje

- a) konvenčně
- b) výpočtem

#### 1.3.5.3.1 Poznámka

Problémy přesného určení intervalu spolehlivosti výsledku měření způsobují především nedostatečná znalost distribučních funkcí všech vstupních veličin a složitost skladby jejich rozdělení. Snaha o exaktní řešení přitom ztrácí smysl, jestliže si uvědomíme řadu zjednodušení při získávání vstupních informací a výpočtech standardních nejistot, volnost a subjektivitu při volbě hodnoty konfidenční pravděpodobnosti a skutečnost, že nejistotu výsledku postačí znát na dvě, někdy i jen na jednu platnou číslici.

ad a) konvenčně

Konvenční hodnoty se pohybují od  $k = 2$  (nejčastěji) do  $k = 3$  a bývají obsaženy v technických normách a předpisech a v individuálních dohodách a technických podmínkách.

ad b) výpočtem

1. při velkém počtu opakovaných měření ( $n > 30$ ) má koeficient rozšíření pro konfidenční pravděpodobnosti P hodnoty uvedené v tab. 1 v příloze;
2. při malém počtu opakovaných měření ( $n < 30$ )

$$k = t_{P, v_{ef}}$$

kde hodnoty  $t_{P, v_{ef}}$  (ze Studentova rozdělení) pro obvyklé hodnoty konfidenční pravděpodobnosti P a pro efektivní počet stupňů volnosti jsou uvedeny v tab. 2 v příloze.

Efektivní počet stupňů volnosti  $v_{ef}$  je možno určit ze vztahu

$$v_{ef} = \left[ (n+1) \cdot \left( 1 + \frac{u_{Bx}^2}{u_{Ax}^2} \right)^2 \right] - 2$$

3. při malém počtu opakování ( $n < 10$ ) je rozšířená nejistota

$$U = 2\sqrt{k_A \cdot u_{Ax}^2 + u_{Bx}^2}$$

kde hodnoty  $k_A$  jsou

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$k_A$	7,0	2,3	1,7	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2

Takto stanovené rozšířené nejistotě se připisuje pravděpodobnost 0,95%

### 1.3.6 Určení nejistot při nepřímém měření

#### 1.3.6.1 Standardní nejistoty

Budeme se nyní věnovat případům, kdy hodnoty veličiny Y, která nás zajímá, nemůže měřit přímo, ale vypočítávají na základě funkčního vztahu F z vstupních veličin  $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_m$ :

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_m)$$

(je tedy  $j = 1 \dots m$ )

Tato množina vstupních veličin se skládá:

- z veličin jejichž hodnoty a nejistoty lze přímo určit obvyklým měřicím postupem. Tyto hodnoty a nejistoty mohou být získány např. z jednoho měření, z opakovaných měření anebo odhadem založeným na zkušenostech a mohou zahrnovat korekce přístrojových čtení a korekce ovlivňujících veličin (jako jsou např. okolní teplota, barometrický tlak a vlhkost);
- z veličin jejichž hodnoty a nejistoty jsou převzaty z vnějších zdrojů - např. z tabulek (např. fyzikální konstanty, z technických norem, předpisů), certifikátů, údajů výrobců měřidel, výsledků minulých měření ap.

V dalším výkladu se omezíme pouze na případy, kdy všechny tyto vstupní veličiny jsou **vzájemně statisticky nezávislé** (jsou **nekorelované**). [Vyjádření nejistot v případě korelovaných vstupních veličin je komplikovanější a přesahuje možnosti naší výuky. Zanedbatelnost korelací se dá posoudit z výběrových korelačních koeficientů; předpoklad o nulovosti korelací se potom testuje.]

Měření se opakuje n-krát; pro každé i-té měření se získá serie hodnot  $x_{1i}, \dots, x_{ji}, \dots, x_{mi}$  (takže  $i = 1 \dots n$ ). Výsledkem měření je  $\bar{y}$  hodnota, která se obecně může získat dvěma způsoby:

a) dosazením výběrových průměrů vstupních veličin

$$\bar{y} = F(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_m)$$

kde

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ji}$$

b) jako výběrový průměr z hodnot  $y_i$  stanovených pro každou serii naměřených  $x_{ji}$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_i = F(x_{1i}, \dots, x_{ji}, \dots, x_{mi})$$

Při lineární závislosti jsou oba způsoby rovnocenné. Při nelineární závislosti je druhý způsob přesnější.

### 1.3.6.2 Vyhodnocení standardní nejistoty výstupního odhadu metodou A

Stanoví se ze vztahu

$$u_{Ay}^2 = \sum_{j=1}^m A_{xj}^2 \cdot u_{A,xj}^2$$

kde pro převodové (citlivostní) koeficienty  $A_j$  platí

$$A_{xj} = \left. \frac{\partial F(X)}{\partial X_j} \right|_{X=x}$$

a pro výběrový rozptyl výběrového průměru

$$u_{Axj}^2 = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (x_{ji} - \bar{x}_j)^2$$

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ji}$$

### 1.3.6.3 Vyhodnocení standardní nejistoty výstupního odhadu metodou B

Pro tuto nejistotu platí (obdobně jako v předchozím)

$$u_{By}^2 = \sum_{j=1}^m A_{xj}^2 \cdot u_{Bxj}^2$$

kde  $A_{xj}$  jsou převodové koeficienty stanovené z příslušných parciálních derivací

$$A_{xj} = \frac{\partial F(X)}{\partial X_j}$$

$u_{Bxj}$  jsou nejistoty typu B jednotlivých vstupních veličin.

Má-li  $X_j$  – tá veličina zdroje nejistot  $Z_{j1} \dots Z_{jk} \dots Z_{jp}$

$$X_j = f(Z_{j1} \dots Z_{jk} \dots Z_{jp})$$

potom

$$u_{Bxj}^2 = \sum_{k=1}^p A_{xjk}^2 \cdot u_{Bxjk}^2$$

kde pro k-tý zdroj nejistoty je

$$A_{xjk} = \frac{\partial X_j}{\partial Z_{jk}}$$

### 1.3.6.4 Kombinovaná standardní nejistota

Získáme ji sloučením nejistot stanovených metodou A a metodou B pomocí vztahu

$$u_{Cy} = \sqrt{u_{Ay}^2 + u_{By}^2}$$

### 1.3.6.5 Rozšířená nejistota měření

Určí se podle vztahu

$$U = t_{P, \nu_{ef}} \cdot u_{Cy}$$

přičemž efektivní počet stupňů volnosti se bere podle Welch-Satterthwaitova vztahu

$$v_{ef} = \frac{u_{Cy}^4}{\sum_{i=1}^N \frac{u_{iy}^4}{v_i}} \leq \sum_{i=1}^N v_i$$

kde  $u_{iy}$  jsou standardní nejistoty jednotlivých složek,  $v_i$  jsou jejich stupně volnosti ( $v = n - 1$ ).

S využitím tohoto vztahu je tedy též

$$\frac{u_{Cy}^4}{v_{ef}} = \frac{u_{Ay}^4}{v_{ef,A}} + \frac{u_{By}^4}{v_{ef,B}}$$

kde

$$\frac{u_{Ay}^4}{v_{ef,A}} = \sum_{j=1}^m \frac{A_{xj}^4 \cdot u_{Axj}^4}{v_j}$$

a rovněž

$$\frac{u_{By}^4}{v_{ef,B}} = \sum_{j=1}^m \frac{A_{xj}^4 \cdot u_{Bxj}^4}{v_j}$$

Při určení jednotlivých stupňů volnosti  $v_j$  pro nejistoty stanovené metodou B je třeba vycházet z počtu minulých měření, při nichž byly stanoveny příslušné nejistoty. Pokud vycházíme z hraničních hodnot, je  $v_j \rightarrow \infty$  (neboť tyto hranice byly stanoveny pro velmi nízkou pravděpodobnost jejich překročení).

Efektivní počet stupňů volnosti zpravidla vyjde necelé číslo; zaokrouhuje se na celé číslo směrem dolů.

### 1.3.7 Všeobecné zásady pro udávání odhadů a jejich nejistot

Je třeba dodržovat následující zásady:

1. Výpočet nejistot je neoddělitelnou součástí zpracování a vyhodnocení naměřených údajů; **údaj nejistoty je součástí výsledku měření**. Výsledek měření se skládá z odhadu hodnoty měřené veličiny a příslušné nejistoty.
2. U každého údaje nejistoty musí být zřejmé, zda jde o standardní nebo rozšířenou nejistotu.
3. U údaje rozšířené nejistoty musí být uveden koeficient pokrytí případně metoda jeho stanovení.
4. Číselná hodnota nejistoty měření se uvádí maximálně na dvě platné číslice.

Při vyhodnocování měření je potřebné doplnit výsledek měření o další informace:

- model měření (pokud není zřejmý z textu),
- uvažované zdroje nejistot (případně zanedbané zdroje nejistot),
- způsob určení nejistot z jednotlivých zdrojů,
- nejistoty [ a kovariance ] jednotlivých zdrojů ,
- počet naměřených údajů, z nichž jsou počítány nejistoty metodou A.

Rozsah uváděných informací závisí samozřejmě na charakteru dokumentu v němž se udávají nejistoty.

P	k
0,80	1,28155
0,90	1,64485
0,95	1,95996
0,98	2,32635
0,99	2,57583
0,999	3,29053
0,9999	3,71902

P ... pravděpodobnost pokrytí

Tab. 1 Koeficient rozšíření při velkém počtu opakovaných měření ( $n > 30$ )

Tab. 2 Koeficient rozšíření při malém počtu opakovaných měření ( $n < 30$ )

	v					
	0,90	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
1	6,314	12,706	31,821	63,656	318,289	635,578
2	2,920	4,303	6,965	9,925	22,328	31,600
3	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,656	4,032	5,894	6,869
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850

21	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,689
28	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,660
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
35	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340	3,591
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
45	1,679	2,014	2,412	2,690	3,281	3,520
50	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
70	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416
90	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402
100	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390
120	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
140	1,656	1,977	2,353	2,611	3,149	3,361
160	1,654	1,975	2,350	2,607	3,142	3,352
180	1,653	1,973	2,347	2,603	3,136	3,345
200	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340
300	1,650	1,968	2,339	2,592	3,118	3,323
500	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310
1000	1,646	1,962	2,330	2,581	3,098	3,300
$\infty$	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,290