3. Zákony elektrických obvodů (sítí)

Princip superpozice	Kirchhoffovy zákony
Théveninova věta (věta o ekvivalentním generátoru)	Věta o ekvivalenci reálného zdroje napětí a reálného zdroje proudu

Abychom rozlišili obvod jako základní součást od významu obvod = zadaný obvod, užívá se, pokud to je třeba pro zadaný obvod názvu síť (anglicky network).

Nejprve definujme názvosloví:

- nelineárním prvkem nazýváme dvojpól, který se nedá reprezentovat (složit) ze základních pasivních a aktivních prvků. Závislost napětí na nelineárním prvku je obecnou nelineární funkcí procházejícího proudu u=F(i). Příkladem nelineárních prvků je polovodičová dioda, cívka s feromagnetickým jádrem, žárovka, termistor apod.

- součástí (prvkem) sítě míníme následující:rezistor, cívku, kondenzátor, ideální zdroj napětí, ideální zdroj proudu, nelineární prvek. Spojovací vodiče neuvažujeme jako prvky elektrického obvodu, pokud můžeme předpokládat, že na nich nevzniká žádný spád napětí (jsou jen součástí schematu elektrického obvodu, ale nijak nevcházejí do výpočtů); jinak nahradíme spojovací vodiče vhodnou reprezentací složenou ze základních prvků.

- uzel je bod v síti, kde se stýkají nejméně dva prvky.

- větev je část sítě mezi dvěma sousedními uzly, kde se stýkají nejméně tři prvky. Je charakterizována tím, že všemi prvky v jedné větvi protéká stejný proud (prvky mohou být ve větvi zapojeny do serie, ale ve větvi může být také jenom jeden prvek).

- uzavřený obvod (smyčka) je myšlená dráha v síti, která začíná a končí v témže uzlu a je zkonstruována tak, že každou větví procházíme jen jedním směrem.

- síť nazýváme lineární, pakliže je její odezva lineární, tj. způsobí-li příčina $x_1(t)$ (například změna napětí zdroje, změna odporu rezistoru apod.) následek $y_1(t)$ a příčina $x_2(t)$ následek $y_2(t)$, pak příčina $Ax_1(t)+Bx_2(t)$ (A,B jsou konstanty) způsobí následek $Ay_1(t)+By_2(t)$. Jinými slovy síť je lineární, jestliže neobsahuje nelineární prvky, tj. jestliže velikosti odporů, kapacit a indukčností prvků v síti použitých nezávisejí na proudu prvkem nebo napětí na prvku. Síť obsahující nelineární prvky můžeme linearizovat, jestliže se omezíme na takový rozsah proudů a napětí na nelineárních prvcích, ve kterém můžeme s dostatečnou přesností použít aproximace nelineárních prvků pomocí základních pasivních a aktivních prvků (tzv. náhradní zapojení). Například polovodičová dioda je typickým příkladem nelineárního prvku, má exponenciální voltampérovou charakteristiku, která pro vyšší proudy v propustném směru přechází na lineární závislost (uplatňuje se stejnosměrný odpor diody). Pro použití v usměrňovačích, kdy dioda pracuje v propustném směru většinu času v režimu vyšších proudů (v závěrném směru je možno považovat s velmi dobrou přesností proud diodou za nulový), můžeme polovodičovou diodu nahradit seriovou kombinací zdroje napětí reprezentujícího úbytek napětí na diodě a odporu, který získáme ze směrnice přímky, kterou diodovou charakteristiku aproximujeme. Tento náhradní obvod již bude lineární a bude na něj možné použít metody analýzy obvodů, které si dále popíšeme. Obdobná linearizace se dá s dostatečnou přesností provést prakticky ve všech případech, kdy je do obvodu zapojen nelineární prvek, a proto se v tomto textu budeme zabývat pouze lineárními sítěmi.

3.1. Princip superpozice

Princip superpozice vyplývá z definice lineární sítě. Mějme lineární síť ve které máme zapojeno n zdrojů (napětí nebo proudu; již jste si jistě všimli, že používáme názvů zdroj napětí, rezistor, cívka apod. bez přívlastku "ideální"; je to proto, že reálné prvky budeme hned nahrazovat jejich náhradním zapojením složeným z ideálních prvků; žádné jiné než ideální prvky se proto v našich zapojeních nebudou vyskytovat). Studujme odezvu těchto zdrojů ve větvi s indexem k, tj. hledejme proud I_k. Princip superpozice nám říká, že tuto odezvu můžeme najít tak, že najdeme proudy od jednotlivých zdrojů s indexem i (i jde od 1 do n), tj. I_{ki} tak, že ponecháme v síti jen zdroj s indexem i a ostatní nahradíme jejich vnitřními odpory (tj. kde je zdroj napětí zkratem, kde je zdroj proudu, necháme obvod rozpojen) a příspěvky I_{ki} sečteme,

tj. $I_k=I_{k1}+I_{k2}+I_{k3}+ ...+I_{kn}$.

Princip superpozice nám pomáhá, jsou-li v obvodu zapojeny dva zdroje o různých kmitočtech, např. jeden je stejnosměrný, druhý střídavý.

3.2. Kirchhoffovy zákony

První Kirchhoffův zákon:

Součet všech proudů tekoucích do uzlu sítě se v každém okamžiku rovná nule (proudy tekoucí do uzlu bereme se záporným znaménkem, proudy tekoucí z uzlu s kladným znaménkem). Zákon je obvodovým vyjádřením rovnice kontinuity, tj. zákona zachování náboje.

Druhý Kirchhoffův zákon:

Součet všech napětí na prvcích (aktivních i pasivních) podél uzavřeného obvodu (smyčky) je v každém okamžiku roven nule. Zákon je obvodovým vyjádřením faktu, že elektrické pole je konzervativní, tj. že práce podél uzavřené dráhy se rovná nule.

3.3. Théveninova věta (věta o ekvivalentním generátoru)

Lineární dvojpól lze vždy nahradit jedním zdrojem napětí a jedním rezistorem v serii. Napětí ekvivalentního zdroje je rovné napětí na nezatížených svorkách dvojpólu, odpor ekvivalentního rezistoru je roven odporu mezi svorkami dvojpólu, když všechny zdroje uvnitř dvojpólu nahradíme jejich vnitřními odpory. Théveninovu větu můžeme s výhodou použít, když se ve studované síti zajímáme jen o stav jedné, nebo několika málo větví; pak postupným zjednodušováním sítě podle Théveninovy věty dojdeme k výsledku většinou rychleji a elegantněji než použitím Kirchhoffových zákonů.

Duální analogií Théveninovy věty je Nortonova věta, která hovoří o ekvivalenci lineárního dvojpólu paralelní kombinaci zdroje proudu a rezistoru (vodivosti). Z těchto dvou vět pak plyne

3.4. Věta o ekvivalenci reálného zdroje napětí a reálného zdroje proudu

Zdroj napětí E s vnitřním odporem R_i je na svých svorkách ekvivalentní zdroji proudu s velikostí E/R_i s paralelně zapojenou vodivostí o velikosti $1/R_i$. Nakreslete si schemata a zamyslete se nad orientací šipky ukazující směr proudu ve zdroji proudu.

4. Základy analýzy elektrických obvodů

Metoda obvodových proudů   Metoda uzlových napětí   Další metody vhodné k analýze sítí

Přímá aplikace Kirchhoffových zákonů je u složitějších sítí nadmíru komplikovaná a vede na řešení soustavy neúnosně mnoha lineárních rovnic přičemž není zajištěno, že soustava bude řešitelná (rovnice mohou být lineárně závislé). Z tohoto důvodu se k řešení používají dvě metody, které množství rovnic výrazně redukují. Jsou založeny na takové volbě proudů, resp. napětí, která a priori splňuje první, resp. druhý Kirchhoffův zákon. Rovnice pak píšeme na základě "zbylého" zákona, tedy jen jednoho, a proto je počet rovnic výrazně redukován.

4.1. Metoda obvodových proudů

V této metodě nevyznačujeme proudy v jednotlivých větvích, ale proudy tzv. obvodové (smyčkové), které jsou konstantní podél vybrané uzavřené smyčky. Tím, že proudy vedou podél uzavřené smyčky, musejí každým uzlem sítě jen procházet, tj. vtékat i vytékat. Proudy v jednotlivých větvích sítě jsou pak dány jednoduchým součtem nebo rozdílem (podle orientace) těch obvodových proudů, které jsou dané větvi společné. První Kirchhoffův zákon je tedy pro takto zvolené obvodové proudy splněn automaticky. Jediným problémem v metodě obvodových proudů je nalezení "správného" počtu tzv. nezávislých smyček, pro které píšeme rovnice druhého Kirchhoffova zákona. Pro určení tohoto počtu existují 3 metody:

- grafická metoda; schema obvodu překreslíme do roviny tak, aby nedocházelo ke křížení spojovacích vodičů bez vodivého spojení (tj. vodiče se mohou křížit jenom v uzlu). Pak počet nezávislých smyček je dán počtem "okének" v rovině nákresu, která jsou ohraničena větvemi sítě. Tato metoda je nejjednodušší a ve své praxi s ní plně vystačíte.

- metoda úplného stromu; vztvoříme tzv. úplný strom, tj. podmnožinu sítě s následujícími vlastnostmi: (a) všechny uzly původní sítě jsou propojeny větvemi úplného stromu, (b) vlastnost (a) se ztrácí po vyjmutí libovolné větve úplného stromu. Počet větví, které musíme k úplnému stromu dodat, abychom dostali původní síť je pak roven počtu nezávislých smyček.

- metoda výpočtu; vychází z topologických vlastností sítí. Základem této metody je vztah, který spojuje počet prvků sítě, V, počet tzv. nezávislých uzlů, U, a počet nezávislých smyček sítě, S. Počet nezávislých uzlů sítě dostaneme z celkového počtu uzlů sítě odečetením počtu částí sítě, které jsou od sebe galvanicky odděleny (je-li celá síť galvanicky propojena, odečítáme jedničku, obsahuje-li síť např. jeden transformátor, který galvanicky odděluje obvod primáru od obvodu sekundáru, odečítáme dvojku apod.; pro každou galvanicky oddělenou část sítě odečítáme další jedničku). Platí totiž zcela obecně, že V=U+S.

Určení počtu nezávislých smyček je pro metodu obvodových proudů zcela základní, neboť v případě přeurčení tohoto počtu budou rovnice lineárně závislé, v případě podurčení můžeme dostat chybný výsledek; snadno totiž můžeme "šikovnou" volbou menšího počtu složitěji vedených smyček (volba smyček je zcela libovolná, tj. výše uvedenými metodami zjistíme pouze jejich počet, nikoliv jejich "polohu" v síti) "projít" všechny větve sítě, což může vést k mylnému přesvědčení, že obvod je již určen. Metoda obvodových proudů nemá v tomto smyslu korektiv; spočteme prostě systém méně rovnic o méně neznámých, ale výsledek bude špatně, podurčíme-li počet nezávislých smyček. Při psaní vlastních rovnic mohu jen doporučit důsledné dodržování znaménkových konvencí, tj. předem si označit směry proudů (libovolně) a šipky u zdrojů a pak teprve psát rovnice. Jen tak se vyhnete znaménkovým chybám, které mohou vést k nesmyslným výsledkům. A ještě jedna poznámka: prochází-li smyčkový proud zdrojem proudu, je přímo roven tomuto proudu. Máme-li tedy obvod, kde se zdroj proudu vyskytuje, je vhodné jeden ze smyčkových proudů (a jenom jeden) vést tímto zdrojem. Zredukujeme tak počet potřebných rovnic.

4.2. Metoda uzlových napětí

Označíme si napětí na jednotlivých uzlech sítě tak, že všechna napětí vztahneme k napětí na jednom referenčním uzlu, jehož potenciál položíme definitoricky rovný nule. Máme-li síť, která obsahuje několik galvanicky oddělených obvodů (transformátorem, optickým vazebním členem apod.), musíme si vytyčit referenční uzel v každé galvanicky oddělené části sítě. Takto stanovená uzlová napětí automaticky splňují druhý Kirchhoffův zákon a proto pro úplné určení sítě stačí napsat pro každý uzel (kromě referenčních) Kirchhoffův zákon o proudech v uzlu. Je-li některý z uzlů připojen k referenčnímu uzlu zdrojem napětí, je napětí uzlu známé a můžeme napsat o jednu rovnici méně (duální obdoba smyčkového proudu procházejícího zdrojem proudu). Určení počtu nezávislých uzlů je velmi jednoduché (viz výše v diskusi o určování počtu nezávislých smyček) a tak se napsání rovnic obejde bez větších problémů. Musíme si ale uvědomit, že řešením rovnic dostaneme uzlová napětí a z nich teprve musíme určit proudy v jednotlivých větvích jako napětí na větvi děleno odporem větve; to však je již jen mechanická práce.

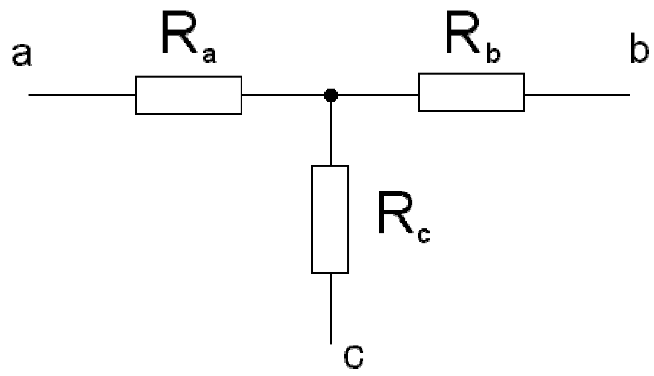
Rozhodnout předem, která metoda je výhodnější, není možné, neboť volba metody je závislá na konkrétní síti, kterou studujeme. Pokud má síť méně uzlů, které jsou propojeny více větvemi, je výhodnější metoda uzlových napětí, ale pro jednoduché příklady, které budeme v tomto textu řešit, budeme používat metodu obvodových proudů. Doporučuji ale, abyste si vyřešili některé příklady sítí oběma metodami, neboť jedině tak získáte cit pro to, kolik úsilí která metoda vyžaduje a hlavně se přesvědčíte, že obě metody vedou k cíli.

4.3. Další metody vhodné k analýze sítí

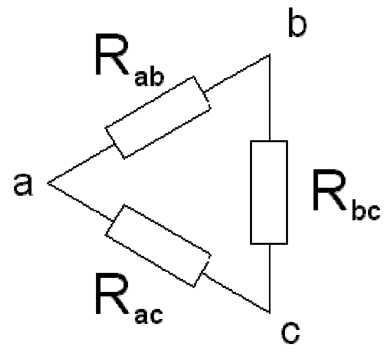
Uvedeme si nyní několik pomocných metod, která mohou vést ke zjednodušení studované sítě a tím k rychlejší cestě k cíli.

- záměna hvězda-trojúhelník

Někdy se při řešení sítí setkáme s odporovým trojpólem tvaru hvězdy nebo trojúhelníka, viz. obr. 1.16a 1.16b.



obr 1.16a



obr 1.16b

Tyto trojpóly jsou navzájem záměnné a mnohdy tím můžeme docílit zjednodušení sítě. Označíme si vrcholy trojúhelníka a odpovídající vrcholy hvězdy písmeny a, b, c. Odpory jednotlivých ramen hvězdy označíme R_a, R_b, R_c podle příslušnosti ramene k vrcholu. Obdobně označíme odpory ramen trojúhelníka R_{ab}, R_{bc}, R_{ac}. Počítejme odpory mezi vrcholy a, b hvězdy. Tento odpor je roven $R_a + R_b$. U trojúhelníka je tento odpor roven paralelní kombinaci odporu R_{ab} s odporem daným součtem $R_{ac} + R_{bc}$. Vzhledem k tomu, že chceme nahradit hvězdu trojúhelníkem, případně trojúhelník hvězdou, musí se odpor mezi vrcholy a, b u hvězdy rovnat odporu mezi vrcholy a, b u trojúhelníka, čímž dostáváme první rovnici. Obdobně pro vrcholy b, c a c, a dostaneme další dvě rovnice, které můžeme řešit buď pro neznámé R_a, R_b, R_c nebo pro neznámé R_{ab}, R_{ac}, R_{bc}. Dostaneme tyto vztahy:

$$R_{ab} = (R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a)/R_c$$

a analogické dva, které se dají popsat následovně:Odpor strany trojúhelníka je roven součtu 3 možných součinů odporů větví hvězdy dělenému odporem protilehlé strany hvězdy. Pro hvězdu dostaneme:

$$R_a = R_{ab}R_{ca}/(R_{ab} + R_{bc} + R_{ca});$$

slovy: odpor větve hvězdy je roven součinu odporů asociovaných větví trojúhelníka (větví, které mají společný stejný vrchol) dělenému součtem odporů všech tří stran trojúhelníka. V anglické literatuře se tato transformace nazývá delta-Y substitution, je možno hovořit také o záměně T a p článku (užívá se v teorii filtrů).

- věta o reciprocitě

Mějme lineární síť, ve které je jenom jeden zdroj napětí, ostatní prvky jsou pasivní; předpokládejme, že zdroj je zapojen v k-té větvi. Studujme nyní proud v l-té větvi sítě. Věta o reciprocitě nám říká, že stejný proud, jaký vyvolá zdroj v l-té větvi, vyvolá tentýž zdroj v k-té větvi, zapojíme-li ho do l-té větve (a svorky zdroje v k-té větvi spojíme nakrátko). Tato věta se moc často nehodí, je ale velice elegantní a předpokládá se, že člověk s fyzikálním vysokoškolským vzděláním by ji měl znát.

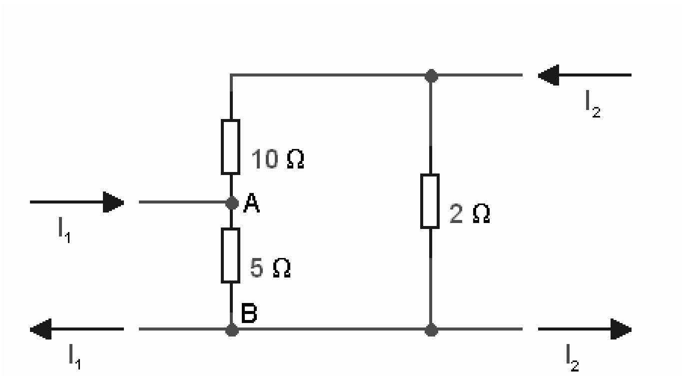
- propojovací pravidlo

Mějme symetrickou síť, z jejíhož schematu je na první pohled evidentní, že v ní existuje alespoň jedna dvojice uzlů, které jsou na stejném potenciálu. Pak se poměry v síti nezmění, propojíme-li tyto dva uzly zkratem. Toto pravidlo občas pomáhá řešit symetrické obvody jako "určete odpor mezi vrcholy ležící na stěnové (tělesové) úhlopříčce krychle jejíž hrany jsou tvořeny rezistory o odporech r."

- věta o přizpůsobení

Maximální výkon, který je zdroj o vnitřním odporu R_i schopen dodat do zátěže s odporem R, nastává pro $R=R_i$. V případě, že obě veličiny jsou komplexní, nastává maximální výkon (optimální přizpůsobení) tehdy, jsou-li reálné složky sobě rovné a imaginární složky mají opačné znaménko.

Příklad: Pomocí principu superpozice určete napětí U_{AB} v síti na obr. 1.31.1.



obr.1.31.1

Napřed uvažujme jen zdroj proudu I_1=2 A a položme I_2=0. Pak napětí

$$U'_{AB} = 5\frac{10+2}{10+2+5}.2\ V = 7{,}06\ V$$

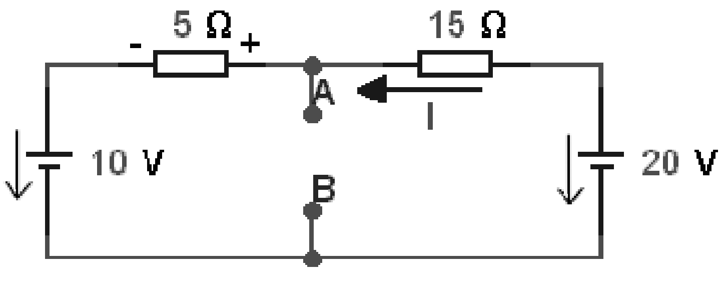
Nyní uvažujme jen zdroj proudu I_2=4 A a položme I_1=0. Pak napětí

$$U''_{AB} = 5\frac{2}{10+5+2}.4\ V = 2{,}35\ V$$

Uvažujeme-li oba zdroje proudu, je podle principu superpozice $U_{AB} = U'_{AB} + U''_{AB} = 9{,}41\ V$

Příklad 1.44:

Do stejnosměrného obvodu na obr. 1.44.1 připojíme mezi svorky A, B po řadě tři rezistory: R_1=1 Ω, R_2=5 Ω, R_3=10 Ω. Vypočtěte výkon na každém rezistoru.



obr.1.44.2

Řešení:

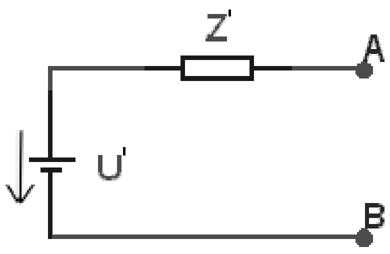
Použijeme Théveninův ekvivalentní obvod.

Proud $I = \frac{20-10}{5+15}\ A = 0{,}5\ A$.

Úbytek napětí na 5 Ω rezistoru je U_5=(5 Ω) I=2,5 V s polaritou podle obr. 1.44.2. Tedy napětí mezi svorkami A, B je $U_{AB}=U'$=10 V+U_5=12,5 V.

Ekvivalentní impedanci vypočteme, nahradíme-li všechny zdroje jejich vnitřními odpory, které jsou zde nulové. Je to tedy paralelní kombinace 5 Ω a 15 Ω rezistoru,

$$Z' = \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{15}\right)^{-1} \Omega = 3{,}75\ \Omega$$.



obr.1.44.3

Théveninův ekvivalentní obvod je

Na svorky A, B teď připojujeme jednotlivé rezistory:

Pro $R_1 = 1\ \Omega$ je $I_1 = \dfrac{U'}{Z' + R_1} = \dfrac{12{,}5}{3{,}75 + 1}\ A = 2{,}63\ A$ a výkon $P_1 = I_1^2 R_1 = 6{,}92\ W$

Pro $R_2 = 5\ \Omega$ je $I_1 = \dfrac{U'}{Z' + R_2} = \dfrac{12{,}5}{3{,}75 + 5}\ A = 1{,}43\ A$ a výkon $P_2 = I_2^2 R_2 = 10{,}22\ W$

Pro $R_3 = 10\ \Omega$ je $I_1 = \dfrac{U'}{Z' + R_3} = \dfrac{12{,}5}{3{,}75 + 10}\ A = 0{,}91\ A$ a výkon $P_3 = I_3^2 R_3 = 8{,}28\ W$