Lineární zobrazení - cvičení

Úloha č. 12

Jsou dány matice:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Dokažte, že A_α, B_α jsou ortogonální matice pro každé $\alpha \in R$.

$$A_\alpha^T \cdot A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_\alpha \text{ je ortog. matice}$$

$$B_\alpha^T \cdot B_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_\alpha \text{ je ortog. matice}$$

b) Určete jejich charakteristické kořeny v závislosti na α.

$$A_\alpha : \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\cos^2\alpha - \lambda^2 + \sin^2\alpha = 0$$

$$1 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$$

$$B_\alpha : \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha = 0$$

$$\cos^2\alpha - 2\lambda\cos\alpha + \lambda^2 + \sin^2\alpha = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2}$$

$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha}$ $\Rightarrow$ reálné ř. jen pro $\sin\alpha = 0$, tj. pro $\alpha = k\pi$, k - celé č. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ pro $\alpha \neq k\pi$ reálné charakteristické kořeny neexistují,
pro $\alpha = 2k\pi$ je $B_\alpha = E$ a $\lambda_{1,2} = 1$
pro $\alpha = (2k+1)\pi$ je $B_\alpha = -E$ a $\lambda_{1,2} = -1$.

c) Dokažte, že $\vec{x}_1 = \left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right)$, $\vec{x}_2 = \left(-\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}\right)$ jsou charakteristické vektory A_α po řadě příslušné k $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

použité vzorce:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$\lambda_1 = 1$

$$(\cos\alpha - 1)x + y\sin\alpha = 0$$

$$x\sin\alpha - y(\cos\alpha + 1) = 0$$

$$(\cos\alpha - 1)x + y\sin\alpha = 0$$

$$-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot x + y\, 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$-x\sin^2\frac{\alpha}{2} + y\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

Řešení např.: $x = \cos\frac{\alpha}{2}$, $y = \sin\frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow$ $\vec{x}_1 = \left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right)$ je charakt. vektor A_α příslušný k $\lambda_1 = 1$.

$\lambda_2 = -1$

$$(\cos\alpha + 1)x + y\sin\alpha = 0$$

$$x\sin\alpha + (-\cos\alpha + 1)y = 0$$

$$(\cos\alpha + 1)x + y\sin\alpha = 0$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot x + 2y\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$x\cos^2\frac{\alpha}{2} + y\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

Řešení např.: $x = -\sin\frac{\alpha}{2}$, $y = \cos\frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow$ $\vec{x}_2 = \left(-\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}\right)$ je charakt. vektor A_α příslušný k $\lambda_2 = -1$.

d) Pokud existují, určete charakteristické vektory matice B_α.

Pro $\alpha \neq k\pi$ charakt. vektory neexistují,

pro $\alpha = 2k\pi$ je $\lambda_{1,2} = 1$, $B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a charakt. je každý vektor $\vec{x} \neq \vec{o}$, $\vec{x} \to \vec{x}$,

pro $\alpha = (2k+1)\pi$ je $\lambda_{1,2} = -1$, $B_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a charakt. je každý vektor $\vec{x} \neq \vec{o}$ a $\vec{x} \to -\vec{x}$.

e) Pokud existují, určete k maticím A_α, B_α podobné diagonální matice D a matice S, pro které platí:

$$A_\alpha = SDS^{-1}, \text{ resp. } B_\alpha = SDS^{-1}. \quad *)$$

A_α:

$$S = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$SDS^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & -\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} & 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} & \sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = A_\alpha$$

B_α:

$\alpha = 2k\pi$

$\lambda_{1,2} = 1$

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_\alpha = SDS^{-1}$$

$\alpha = (2k+1)\pi$

$\lambda_{1,2} = -1$

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$SDS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B_\alpha$$

---

*) Dle V3,10 platí $D = S^{-1}AS \Rightarrow A = SDS^{-1}$

f. Dokažte, že matice B_α a $B_{-\alpha}$ jsou podobné.
(Návod: $B_{-\alpha} = A_\beta B_\alpha A_\beta^{-1}$)

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad B_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \qquad A_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$A_\beta B_\alpha A_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha & -\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ -\sin(\alpha-\beta) & -\cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta)\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)\sin\beta & \cos(\alpha-\beta)\sin\beta + \sin(\alpha-\beta)\cos\beta \\ -\sin(\alpha-\beta)\cos\beta - \cos(\alpha-\beta)\sin\beta & -\sin(\alpha-\beta)\sin\beta + \cos(\alpha-\beta)\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta+\beta) & \sin(\beta+\alpha-\beta) \\ -\sin(\alpha-\beta+\beta) & \cos(\alpha-\beta+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = B_{-\alpha}$$

Použité součtové vzorce:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$