

OBVODY A OBSAHY GEOMETRICKÝCH ÚTVARŮ

Text vychází ze základních pojmů souvisejících s obecným pojmem míry geometrického útvaru a z návodů na konkrétní manipulativní činnosti, prostřednictvím kterých se žákům všechny vztahy lépe objasní.

Geometrické útvary se liší jednak tvarem, jednak velikostí. Například různý tvar a stejnou velikost můžeme pozorovat na jednom litru mléka, který se prodává buď v lahvi tvaru válce, nebo v krabici tvaru kvádrů nebo v krabici tvaru hranolu – stále je to 1 litr mléka. Podobně obdélník, který má obsah 10 dm^2 může mít např. délku 1 dm a šířku 10 dm, nebo délku 2 m a šířku 5 m. Naopak geometrické útvary, které jsou shodné, i stejnou velikost.

Velikost geometrických útvarů určujeme buď měřením (v případě délky úsečky) nebo výpočtem (např. obvod a obsah obdélníku).

1. Základní pojmy

Podle Slovníku školské matematiky jsou základní pojmy uvedeny takto:

Míra útvaru je společný název pro délku útvaru na přímce či křivce, pro obsah útvaru v rovině či na ploše, pro objem útvaru v prostoru. Pojem míra vyjadřuje společné vlastnosti funkcí, které přiřazují útvarům nezáporná reálná čísla pro jejich délky (obsahy, objemy).

Nechť je dán systém M útvarů v takovém prostoru P , kde je definována shodnost útvarů a pojmy vnitřní a hraniční bod útvaru. Mírou útvarů ze systému M nazveme funkci m , která má tyto vlastnosti:

1. Každému útvaru X přiřazuje reálné číslo $m(X) \geq 0$.
2. Každým dvěma shodným útvarům X, Y přiřazuje taková čísla $m(X), m(Y)$, že $m(X) = m(Y)$.
3. Každým dvěma útvarům X, Y , které nemají společný vnitřní bod vzhledem k prostoru P , přiřazuje taková čísla $m(X), m(Y)$, že $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y)$.
4. Alespoň jednomu útvaru E přiřazuje číslo $m(E) = 1$.

Délka úsečky je číslo přiřazené úsečce některou mírou m definovanou na množině všech úseček. (Též velikost úsečky, vzdálenost dvou bodů.)

Obvod obrazce je délka křivky nebo lomené čáry, která je hranicí obrazce v rovině. Měřitelnost hranice je jednou charakteristických vlastností útvarů zvaných obrazce.

Obsah obrazce v rovině je číslo přiřazené obrazci některou mírou m definovanou na určité množině rovinných útvarů. Zvolenému čtverci E přísluší míra $m(E) = 1$.

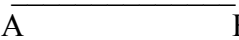
Ve školské matematice se nejprve odvozují obsahy pravoúhelníků s celočíselnými rozměry, které lze pokrýt shodnými čtverci E , dále pak obsahy rovnoběžníků, trojúhelníků, lichoběžníků, mnohoúhelníků. Obsahy jiných útvarů se určují pomocí jejich jader a obalů.

Objem tělesa je číslo přiřazené tělesu některou mírou m definovanou na určité množině těles. Zvolené krychli B přiřazujeme $m(B) = 1$.

2. Je třeba rozlišovat geometrické útvary a jejich velikosti.

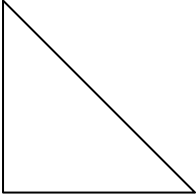
Geometrický útvar

Velikost geometrického útvaru

Úsečka AB 

délka úsečky AB: $|AB| = 4 \text{ cm}$

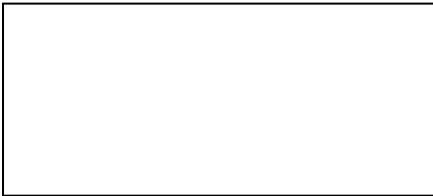
Trojúhelník ABC



obvod trojúhelníku ABC
 $o = 14 \text{ cm}$

Obdélník ABCD

obsah obdélníku ABCD
 $S = 36 \text{ cm}^2$



3. Určení délky úsečky

Délka úsečky je číslo, které udává, kolika délkovými jednotkami můžeme úsečku pokrýt.

Délku úsečky určujeme měřením. Pokud je délka úsečky celočíselným násobkem dané jednotky, určíme ji přesně. Pokud se krajní bod úsečky nekryje s násobkem jednotky, buď používáme principu zaokrouhlování (určíme délku úsečky přibližně), nebo zjemníme měřítko a určíme délku úsečky v menších jednotkách.

$$|AB| = 4 \text{ cm}$$

$$|AB| = 4 \text{ cm}$$

$$|AB| = 4 \text{ cm} 3 \text{ mm}$$

4. Vyvození obvodů a obsahů geometrických útvarů

Všechny vztahy jsou vyvozovány na základě konkrétní činnosti a učitelům je tak dána možnost konstruktivistického způsobu výuky, kdy pracují žáci, sami jsou aktivní při získávání vědomostí a výuka je zbavena pasivního předávání poznatků učitelem bez přičinění žáků.

Trojúhelník

Obvod trojúhelníku je číslo, které udává délka jeho hranice.

Manipulativní činnost pro určení obvodu trojúhelníku vychází z měření stran různých trojúhelníků a určení délky hranice každého z nich. V závěru se výsledky jednotlivých činností zobecní.

Závěr: Obvod trojúhelníku je roven součtu délek jeho stran: $o = a + b + c$.

Obvod trojúhelníku můžeme určit také graficky – pomocí grafického součtu úseček, které jsou stranami trojúhelníku.

Délka úsečky XY je rovna obvodu trojúhelníku ABC.

Obdélník a čtverec

Obvod obdélníku

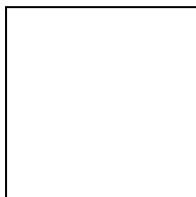


a

Obvod obdélníku je číslo, které udává délku jeho hranice. Při vyvozování pojmu obvod obdélníku vycházíme z manipulativní činnosti a praktických příkladů. Žáci pracují s různými obdélníky, které mají délky stran vyjádřené přirozenými čísly v centimetrech (příp. v decimetrech nebo v metrech). Jejich úkolem je změřit délky stran jednotlivých obdélníků a vypočítat délku hranice každého z obdélníků. Je vhodné ponechat žákům způsob, kterým délku hranice obdélníku určí. Mají tyto možnosti:

- sečtou postupně délky všech čtyř stran: $o = a + b + a + b$,
- sečtou délky dvou protějších stran (dvojnásobek délky a dvojnásobek šířky obdélníku):
 $o = 2a + 2b$,
- sečtou délku delší a kratší strany obdélníku a součet vynásobí dvěma: $o = 2 \cdot (a + b)$.

Analogicky se postupuje při určení obvodu čtverce. Žáci měří délku strany čtverce a počítají:



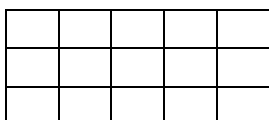
a

- a) sečtou délek všech čtyř stran: $o = a + a + a + a$,
b) zapíše obvod pomocí součinu: $o = 4a$.

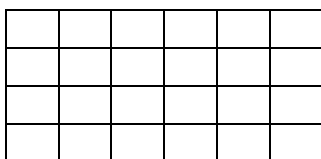
Obsah obdélníku

Obsah obdélníku je číslo, které udává počet čtverečných jednotek, kterými je možno obdélník pokrýt.

Manipulativní činnost spočívá v pokrývání obdélníku (nejlépe s délkami stran vyjádřenými přirozenými čísly) čtverci o obsahu 1 cm^2 .



$$S = 5 \cdot 3 = 15$$
$$S = 15 \text{ cm}^2$$



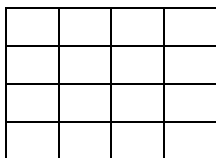
6 cm

$$S = 6 \cdot 4 = 24$$
$$S = 24 \text{ cm}^2$$

Na základě pochopení součinu počtu řad a počtu sloupců v konkrétních případech se zobecní: Obsah obdélníku s délkami stran a , b :

$$S = a \cdot b$$

Podobně se pokrývají čtverce o délkách stran vyjádřených přirozenými čísly.



4 cm

$$S = 4 \cdot 4 = 16$$
$$S = 16 \text{ cm}^2$$

Vztah se zobecní pro obsah čtverce, jehož strana má délku a:

$$S = a \cdot a$$

Úlohy

1. Obdélník má obvod 24 cm. Jaké mohou být délky jeho stran? Který z obdélníků má největší obsah?
2. Obdélník má obsah 18 cm^2 . Jaké mohou být délky jeho stran? Který z obdélníků má nejmenší obvod?
3. Jak se změní a) obvod, b) obsah čtverce, jestliže jeho stranu zvětšíme dvakrát?
4. Jak se změní a) obvod, b) obsah obdélníku, jestliže jeho délku o 5 cm zmenšíme a jeho šířku o 5 cm zvětšíme?
5. Mají všechny obdélníky též obvod: