METODY ŘEŠENÍ MATEMATICKÝCH ÚLOH II

Růžena Blažková

1. Historické algoritmy

Způsoby, jimiž dnes provádíme základní čtyři početní výkony s přirozenými čísly se poměrně dlouho vyvíjely. Vznikaly až po zavedení zápisu čísel pomocí číslic desítkové soustavy, která byla přijata z Indie. Myšlenka poziční číselné soustavy a zavedení nuly byla znamenitá a přispěla k poměrně rychlému rozšíření početních algoritmů.

Sčítání

Algoritmus písemného sčítání měl svůj historický vývoj. Zpočátku se počítalo zleva doprava (tento způsob se v některých učebnicích udržel až do XVI. století), tedy od nejvyšších řádů. Výsledek se zapisoval nad dané sčítance. Problémy nastaly při počítání s přechodem přes základ 10. Nejprve, když se počítalo na poprášených deskách, oprava se provedla smazáním a nahrazením jiné číslice. Avšak až se výpočty zaznamenávaly na papír, prováděly se opravy tak, že se částečné výsledky škrtaly a nadepisovaly se výsledky opravenými.

Např. součet	
	4 375
	2 562
	6 459
	13 396

se počítal takto:

	3	3 3	**3 39**
12	12 2	12 28	**1**2 28**6**
4 375	4 375	4 375	4 375
2 562	2 562	2 562	2 562
6 495	6 495	6 495	6 495

Součet se četl ve dvou řádcích nad sčítanci – 13 396.

Odčítání

Odčítání se nejprve provádělo stejně jako sčítání, zleva doprava.

Např. rozdíl čísel		se počítal:	
	675		**351**
	-324		675
	351		324

rozdíl čísel		se počítal			
	524		1	9	**89**
	- 435		524	524	524
	89		435	435	435

Pro odčítání se vyvinuly ještě jiné algoritmy, např. postup, který využívá tzv. desítkového doplňku (což je rozdíl čísla 10 a jednociferného čísla). Počítalo se od jednotek, počítání bez přechodu přes základ 10 bylo jednoduché. K počítání s přechodem přes základ deset se využívalo vztahu: $a - b = a + (10 - b) - 10$.

Např. rozdíl	
	6 315
	-2 836
	3 479

se počítal takto: 6 – 5 neuměli vypočítat (znali jen čísla přirozená). Stanovili desítkový doplněk čísla 6, tj. 10 – 6 = 4, přičetli k jednotkám menšence. 4 + 5 = 9. 9 se napsalo do rozdílu pod jednotky. Jednu desítku přičetli k desítkám menšitele: 3 + 1 = 4. Rozdíl 1 – 4 opět neuměli vypočítat, stanovili desítkový doplněk: 10 – 4 = 6, přičetli k desítkám menšence: 6 + 1 = 7, v rozdílu zapsali 7 pod desítky. Jednu opět přičetli 1 + 8 = 9, 3 – 9 neuměli vypočítat, stanovili desítkový doplněk: 10 - 9 = 1 , 3 + 1 = 4 . Zapsali v rozdílu 4 pod stovky. Znovu připočetli 1 + 2 = 3, 6 - 3 = 3 uměli vypočítat.

Násobení

Algoritmy pro násobení byly rozmanitější, avšak předpokládaly znalost malé násobilky.

Egypt – násobení dvou čísel počítali pomocí zdvojnásobování a sečtení vhodných násobků.

Např. 15 . 19

/	1	19
/	2	38
/	4	76
/	8	152

nebo 11 . 18

/	1	18
/	2	36
	4	72
/	8	144

15 = 8 + 4 + 2 + 1, 15 . 19 = 15 + 76 + 38 + 19 = 285

11 = 8 + 2 + 1
11 . 18 = 144 + 36 + 18 = 198

Někdy Egypťané používali kromě zdvojnásobování také zdesateronásobení, někdy využívali pětinásobku – podle početní obratnosti počtáře.

Např. 23 . 48

/	1	48
/	2	96
/	10	480
/	20	960

23 = 20 + 2 + 1 23 . 48 = 960 + 96 + 48 = 1 104

Další způsob násobení se opírá o tzv. zdvojování, kdy se první činitel dělí dvěma, druhý činitel se násobí dvěma a liché násobky se pak sečtou:
Např. součiny 46 . 27 nebo 64 . 17 se počítaly takto:

46 . 27		64 . 17	
23 . 54	o	32 . 34	
11 . 108	o	16 . 68	
5 . 216	o	8 . 136	
2 . 432		4 . 272	
1 . 864	o	2 . 544	
		1 . 1088	o

54 + 108 + 216 + 864 = 1 242

46 . 27 = 1 242 64 . 17 = 1 088

Algoritmus zvaný „gelosia“ vznikl asi v Indii a je velmi starý. Využívá se čtvercové sítě, každé pole je rozděleno úhlopříčkou na dva trojúhelníky. Činitelé se zapíší do záhlaví – jeden nahoru, druhý vpravo. Jednotlivé součiny se zapisují do řádků a sloupců těch čísel, kterými se právě násobilo, jednotky vpravo dolů, desítky vlevo nahoru. Po provedení všech částečných součinů se sčítají jednotlivá čísla ve směru úhlopříček. Součin se přečte zleva dolů.

Např.

47 . 28 = 1 316

	4	7	
1	0 8	1 4	2
3	3 2	5 6	8
	1	6	

2 783 . 324 = 901 692

	2	7	8	3	
	0 6	2 1	2 4	0 9	3
9	0 4	1 4	1 6	0 6	2
0	0 8	2 8	3 2	1 2	4
	1	6	9	2	

Geloisa byla také tvaru:

Zajímavý je způsob násobení uvedený v knize význačného indického matematika Bhaskary, kdy se součiny tvoří pomocí schématu:

Např. 576 . 213 = 122 688

576
213

6 . 3 = 1**8**
1 + 3 . 7 + 6 . 1 = 2**8**
2 + 5 . 3 + 7 . 1 + 6 . 2 = 3**6**
3 + 5 . 1 + 7 . 2 = 2**2**
2 + 2 . 5 = **12**

Což je možné usnadnit si tím, že jednoho činitele zapíšeme na papír a druhého na proužek papíru, avšak v obráceném pořadí číslic:

576
312

Proužkem papíru posunujeme a zapisujeme součiny těch jednociferných čísel, která jsou pod sebou:

576	576	576
312	312	312
6 . 3 = 1**8**	3.7 + 1.6 + 1 = 2**8**	3.5 + 1.7 + 2.6 + 2 =3**6**

576	576
312	312
1.5 + 2.7 + 3 = 2**2**	2 .5 + 2 = **12**

Násobení „vedle sebe“

a) násobení začíná od jednotek druhého činitele, částečné součiny se zapisují postupně doleva :

Např. 684 . 802

	684 . 802
684 . 2	1368
684 . 8	5472
	548568

b) násobení začíná od nejvyššího řádu druhého činitele, částečné součiny se zapisují postupně doprava:

	684 . 802
684 . 8	5472
684 . 2	1368
	548568

Výhodu mělo toto násobení, jestliže ve druhém činiteli byla číslice nejvyššího řádu jedna:
Např. 684 . 153

684 . 1	684 . 153
684 . 5	3420
684 . 8	5472
	108072

Násobení a prstech
(malá násbilka)
Je třeba znát základní spoje násobení od 1.1 do 5.5. Další násobilka se počítá takto:
Např. 6 . 8
6 = 5 + 1, 8 = 5 + 3
Na jedené ruce 1 prst vztyčíme a 4 schováme.
Na druhé ruce 3 prsty vztyčíme a 2 schováme.
Součet vztyčených prstů 1 + 3 = 4 udává počet **desítek** součinu
Součin schovaných prstů 4 . 2 = 8 udává počet **jednotek** součinu.
Tedy 6 . 8 = 48

U součinu 7 . 6 = 42
2 + 1 = 3,   3 . 4 = 12 získáme jednu desítku ze součinu schovaných prstů.

Dělení

Náš nynější způsob dělení víceciferných čísel pochází konce 15. století a hlavní zásluhu na jeho rozšíření má italský matematik Luca Pacioli.

Dělení ve starém Egyptě: Dělitele postupně zdvojnásobovali, dokud z jeho vhodných násobků nesložili dělence. Někdy používali také desetinásobek nebo pětinásobek dělitele.

```
Např.  1 104 : 48        /   1     48
                         /   2     96
                             4    192
                            10    480
                         /  20    960
 960 + 96 + 48 = 1 104        podíl je   20 + 2 + 1 = 23
tedy   1 104 : 48 = 23
```

Dělení za J.A.Komenského:

Např. 6 315 : 5 = 1 263
Zbytky se zapisovaly nad dělence, dělitel se opisoval v každém sloupci, podíl se zapisoval vpravo:

```
  131
6 315     1 263
5 555
```

Algoritmus písemného dělení (dánské učebnice)   4 605 : 15

```
       307
15   4 605
     45
      10
       0
       105
       105
         0
```

Nejblíže menší násobek dělitele k dané části dělence se postupně odčítá (3 . 15 = 45, 0.15 = 0, 7.15 = 105), číslice podílu se zapisují nad dělence.

Literatura

BALADA, F.: *Z dějin elementární matematiky.* Praha: SPN 1959.
BEČVÁŘ, J., a kol.: *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie.* Praha: Prometheus 2003, ISBN: 80-7196-25-4.

ZAJÍMAVÉ SČÍTÁNÍ A ODČÍTÁNÍ

1.Zapište tři různá jednociferná čísla. Pomocí nich zapište všechna trojciferná čísla (bez opakování). Všech šest čísel sečtěte. Součet vydělte součtem tří jednociferných čísel zvolených na počátku. Jestliže dobře počítáte, vždy vám vyjde 222,

2. Zapište trojciferné číslo takové, že počet jednotek a počet stovek se liší alespoň o dvě. Zapište číslo s opačným pořadím číslic. Odečtěte od většího čísla číslo menší, získáte rozdíl, který je trojciferným číslem. Z vypočteného rozdílu sestavte číslo s opačným pořadím číslic a obě tato čísla sečtěte. Jestliže dobře počítáte, ve všech případech vám vyjde 1089.

3. Řešte algebrogramy (místo písmen zapište číslice tak, aby platily součty čísel) :

a)	O K O	b)	R Y B A	c)	B U M	d)	P	e)	MNOHO
	O K O		R Y B A		U M		P A		J Í D E L
	K U K		H L A V A		M		P A C		MNOHO
					M M M		P A C I		NEMOC Í
							4 3 2 1		

4. Místo „x“ zapište číslice tak, aby platilo naznačené sčítání nebo odčítání:

a)	2 0 x 1	b)	x 4 6 8 x	c)	9 x 2 6	d)	1 x 6 x 4
	+ x 7 3 x		+ x 5 x 4		- 5 4 x 2		- 6 x 0 x
	8 x 9 6		2 2 x 1 7		x 4 1 x		8 7 9 9

Řešení:

1, 2. – lze dokázat pomocí zápisu čísla v obecném tvaru (100a + 10b + c)

3. a) vyhovují čísla 121, 242 .
   b) Vyhovují čísla 6 520, 8 520, 6 540, 8 530 (za RYBA).
   c) B = 4, U = 7, M = 5.
   d) P = 3, A = 8, C = 9, I = 1.
   e) M = 6, N = 2, O = 3, H = 4, J = 8, Í = 1, D = 7, E = 0, L = 5, C = 9.

4. a) 2 061 + 6 735 b) 14 683 + 7534 c) 9 826 – 5 412 d) 15 604 – 6 805.

ZAJÍMAVÉ NÁSOBENÍ A DĚLENÍ

1.Násobte číslo 37 postupně čísly 3, 6, 9, … (násobky čísla 3).

2. Násobte číslo 3 367 postupně čísly 3 , 6, 9, … (násobky čísla 3).

3. Násobte číslo 15 873 čísla 7, 14, … (násobky čísla 7).

4. Násobte číslo 99 postupně čísly od 9 do 1. Sledujte čísla zapsaná na místě jednotek a stovek.

5. Násobte číslo 999 999 postupně čísly 2 až 9. Sledujte čísla zapsaná na místě jednotek a milionů.

6. Platí: 11 . 11 = 121

111 . 111 = 12 321
1111 . 1111 = 1 234 321

Která čísla musíme vynásobit, abychom získali součin 12 345 678 987 654 321.

7. Vynásobte číslo 12 345 679 libovolným jednociferným číslem (různým od jedné). Získaný součin pak vynásobte devíti. Co pozorujete?

8. Zapište libovolné trojciferné číslo. Potom zapište šesticiferné číslo tak, že napíšete vaše trojciferné číslo dvakrát za sebou. Toto číslo dělte sedmi, vzniklý podíl vydělte jedenácti a další vzniklý podíl vydělte třinácti. Jaké číslo vám vyšlo?

9. Zapište svůj věk (předpokládáme dvojciferné číslo) třikrát za sebou. Vzniklé šesticiferné číslo vydělte číslem 13, vzniklý podíl vydělte číslem 21 a další vzniklý podíl vydělte číslem 37. Jaké číslo vám vyšlo?

10. Řešte algebrogramy:

a) 2 C C	b) A A B	c) V E S	d) A B C	e) x 1 x
. C	. 5	. E S	. B A C	. 3 x 2
1 5 9 C	1 1 2 0	P E S	x x x x	x 3 x
		E S A	x x A	3 x 2 x
		O V E S	x x x B	x 2 x 5
			x x x x x x	1 x 8 x 3 0

11. Místo písmen zapište číslice tak, aby platily naznačené rovnosti:

a)

A	.	B	=	C A
+		-		+
A	.	C	=	D
D	.	A	=	E C

b) (AB je číslo dvojciferné CDB trojciferné)

AB	.	AA	=	CDB
+		.		-
CD	-	AE	=	E
FB	+	AGE	=	CDH

c)

AB	+	D	=	AE
:		:		:
B	.	C	=	D
D	:	B	=	C

Řešení:

1.– 3. Součiny obsahují stejné číslice

4, 5 . Číslice na místě jednotek a na místě nejvyššího řádu se mění pravidelně, jejich součet je vždy 9.

6. 111 111 111 . 111 111 111

7. Součin je zapsán pomocí stejných číslic, jsou stejné jako číslice jednociferného čísla, kterým jsme násobili.

8, 9. Výsledkem jsou zvolená čísla.

10. a) C = 6, b) A = 2, B = 4, c) 125 . 25 , d) 286 . 826, e) 415 . 382.

11. a) A = 4, B = 6, C = 2, D = 8, E = 3
 b) A = 1, B = 9, C = 2, D = 0, E = 5, F = 3, G = 6, H = 4
 c) A = 1, B = 2, C = 3, D = 6, E = 8