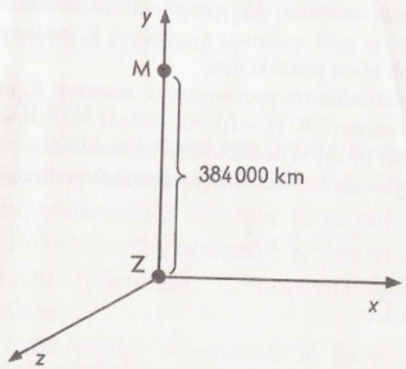
soustavu souřadnic, pak v této soustavě mají dvě soumístné události stejné prostorové souřadnice x, y a z. Soumístné události nemusí nastat ve stejném okamžiku, a proto jim může příslušet obecně různá časová souřadnice t.

Události, které se odehrály ve zvolené vztažné soustavě ve stejném okamžiku, se nazývají **současné**. Současné události mají v této soustavě stejnou časovou souřadnici t; prostorové souřadnice dvou současných událostí mohou být obecně různé.

▶ PŘÍKLAD 4

V čase $t_1 = 0$ byl vyslán ze Země na Měsíc světelný záblesk (událost U_1). Světlo se odrazilo od Měsíce (událost U_2) a část energie odraženého světelného záření byla opět zaregistrována měřicími přístroji na Zemi (událost U_3). Zvolte soustavu souřadnic podle obr. 1-7 a určete v ní souřadnice událostí U_1, U_2 a U_3. Průměrná vzdálenost Měsíce od Země je asi 384 000 km.



Obr. 1-7

Řešení

Událost U_1 (vyslání světelného záblesku) má souřadnice $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ a $t_1 = 0$. Světlo dorazí na Měsíc vzdálený 384 000 km za dobu $t_2 = \dfrac{d}{c} = \dfrac{3{,}84 \,.\, 10^8\ \mathrm{m}}{3 \,.\, 10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}} = 1{,}28\ \mathrm{s}$ a vrátí se zpět na Zem v okamžiku $t_3 = 2t_2 = 2{,}56$ s. Událost U_2 má tedy souřadnice

$x_2 = 0$, $y_2 = 3{,}84 \,.\, 10^8$ m, $z_2 = 0$ a $t_2 = 1{,}28$ s; událost U_3 má souřadnice $x_3 = 0$, $y_3 = 0$, $z_3 = 0$ a $t_3 = 2{,}56$ s.

Poznámka Pokus s vysláním světelného záblesku k Měsíci byl uskutečněn již několikrát pomocí kvantového generátoru světla (laseru).

▶ PŘÍKLAD 5

Auto záchranné služby vysílá při jízdě ulicemi města světelné signalizační záblesky. Jsou tyto záblesky soumístné události?

Řešení

Zvolíme-li za vztažnou soustavu Zemi, pak vzhledem k ní vznikají jednotlivé záblesky na různých místech; zvolíme-li však za vztažnou soustavu jedoucí auto záchranné služby, pak v této soustavě jsou všechny záblesky soumístné.

Poznámka Z příkladu plyne, že bez udání vztažné soustavy nelze rozhodnout, zda určité události jsou, nebo nejsou soumístné; **soumístnost událostí je relativní pojem.** Relativnost soumístnosti událostí je důsledkem relativnosti polohy bodu.

▶ PŘÍKLAD 6

Dotkněte se tužkou určitého bodu na stole a asi po jedné sekundě tento dotyk opakujte. Odehrály se obě události (tj. první i druhý dotyk) na stejném místě?

Řešení

Otázku opět nelze jednoznačně zodpovědět, neboť není udána vztažná soustava, vzhledem k níž je třeba určovat polohu bodu. Obě události jsou přirozeně soumístné v soustavě souřadnic spojené se Zemí. V heliocentrické soustavě souřadnic, jejíž počátek leží ve středu Slunce a souřadnicové osy míří ke hvězdám, obíhá Země kolem Slunce rychlostí asi 30 km . s^{-1}, a proto se v této soustavě oba dotyky odehrály ve dvou různých bodech, vzdálených od sebe asi 30 km.

Poznámka V praxi jsme zvyklí podvědomě vztahovat většinu dějů k Zemi, a proto představa, že obě události, které se odehrály na stejném místě vzhledem k Zemi, nejsou soumístné v jiné vztažné soustavě, je pro nás dosti neobvyklá. Nesmíme však zapomínat, že z fyzikálního hlediska je zemská vztažná soustava jen jednou z mnoha jiných vztažných soustav, a proto výrokům, které platí jen v zemské vztažné soustavě, nesmíme přisuzovat absolutní platnost.

1.5 RELATIVNOST POHYBU A KLIDU

Při mechanickém pohybu se mění poloha určitého tělesa vzhledem k jiným tělesům (vzhledem k vztažné soustavě). Kdykoli hovoříme o pohybu nebo klidu, musíme současně udat vztažnou soustavu, k níž se pohyb nebo klid tělesa vztahuje; **pohyb a klid tělesa jsou relativní pojmy.**

Pohyb určitého tělesa můžeme vztahovat k různým vztažným soustavám; z kinematického hlediska však neprobíhá pohyb téhož tělesa v různých vztažných soustavách stejně. Např. těleso vypuštěné z letadla letícího ve vodorovném směru konstantní rychlostí se pohybuje vzhledem k Zemi po parabole, vzhledem k letadlu padá volným pádem a v soustavě souřadnic spojené s padajícím tělesem je toto těleso v klidu. Otázka, po jaké trajektorii se těleso pohybuje „ve skutečnosti", nemá smysl; všechny trajektorie téhož tělesa v různých vztažných soustavách jsou stejně skutečné. Absolutní trajektorie tělesa v prostoru neexistuje; **trajektorie je vždy relativní.** Relativní jsou také některé veličiny, jako např. dráha s nebo rychlost $\boldsymbol{v}$.

Vztažnou soustavu a s ní spojenou soustavu souřadnic můžeme volit libovolně; v praxi však volíme vztažnou soustavu a soustavu souřadnic tak, aby studium daného pohybu bylo co nejjednodušší.

Dva následující příklady ukazují řešení kinematických úloh v různých vztažných soustavách.

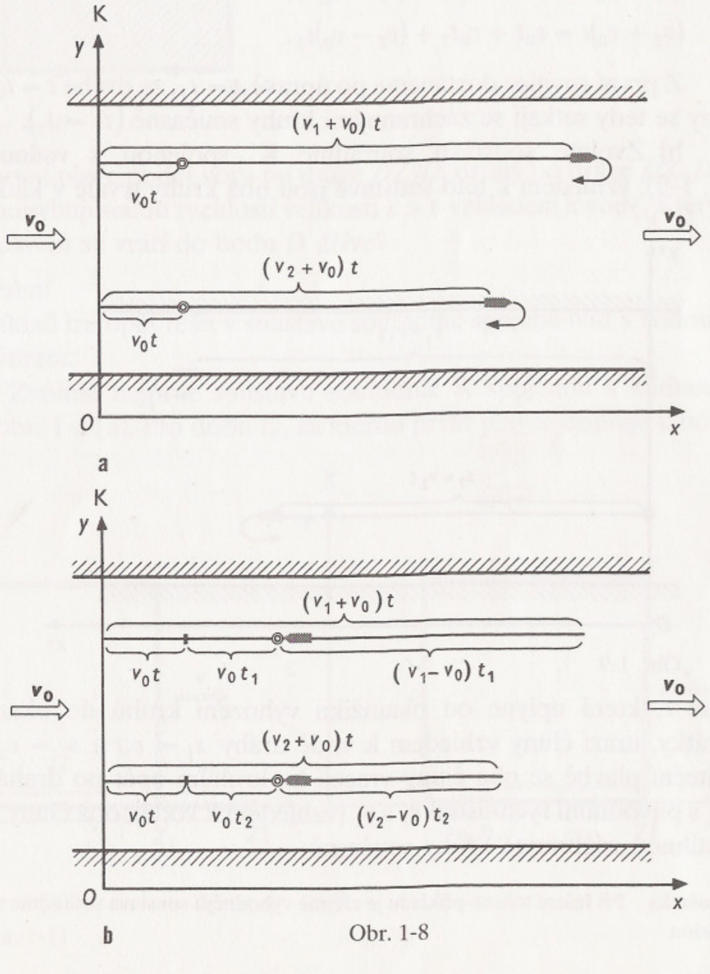
► PŘÍKLAD 7

Dva motorové čluny pluly po řece ve směru proudu různými rychlostmi. Rychlost vodního proudu vzhledem k břehu je $\boldsymbol{v}_0$, rychlost člunů vzhledem k vodě je $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$ ($v_1 > v_2$). V okamžiku, kdy byly oba čluny vedle sebe, byly z obou člunů shozeny záchranné kruhy. Za určitou dobu od tohoto okamžiku se oba čluny současně obrátily a stejně velkými rychlostmi v_1 a v_2 (vzhledem k vodě) se vracely proti proudu nazpět. Který člun se setká se svým záchranným kruhem dříve?

Řešení

Příklad lze řešit v soustavě souřadnic spojené s břehem nebo s vodou.

a) Zvolme podle obr. 1-8 soustavu souřadnic K spojenou s **břehem.** Označme dobu, která uplyne od okamžiku vyhození záchranných kruhů do okamžiku obrátky obou člunů, t; za tuto dobu urazí kruhy vzhledem k břehu dráhy $v_0 t$ a čluny dráhy $(v_1 + v_0)t$ a $(v_2 + v_0)t$ (viz obr. 1-8a).



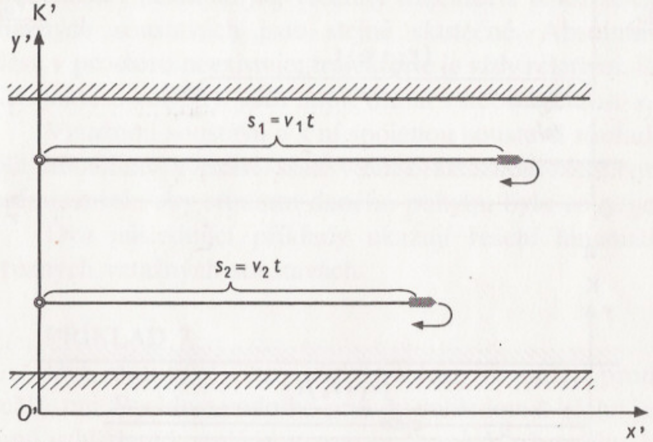
Obr. 1-8

Dobu, která uplyne od okamžiku obrátky až do okamžiku setkání **prvního člunu** se záchranným kruhem, označme t_1; za tuto dobu urazí první člun proti směru proudu dráhu $(v_1 - v_0)t_1$ a kruh ve směru proudu dráhu $v_0 t_1$ (obr. 1-8b). **Druhý člun** nechť se setká se svým záchranným kruhem za dobu t_2 od okamžiku obrátky; za tuto dobu urazí dráhu $(v_2 - v_0)t_2$ a záchranný kruh dráhu $v_0 t_2$. Z obr. 1-8b pak plyne

$$(v_1 + v_0)t = v_0 t + v_0 t_1 + (v_1 - v_0)t_1,$$
$$(v_2 + v_0)t = v_0 t + v_0 t_2 + (v_2 - v_0)t_2.$$

Z první rovnice dostaneme po úpravě $t = t_1$, ze druhé $t = t_2$; oba čluny se tedy setkají se záchrannými kruhy současně $(t_1 = t_2)$.

b) Zvolme soustavu souřadnic K′ spojenou s **vodou** (viz obr. 1-9); vzhledem k této soustavě jsou oba kruhy trvale v klidu. Za



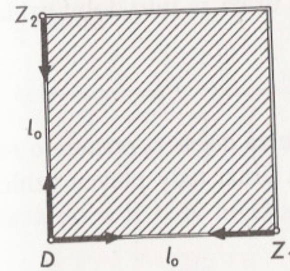
Obr. 1-9

dobu t, která uplyne od okamžiku vyhození kruhů do okamžiku obrátky, urazí čluny vzhledem k vodě dráhy $s_1 = v_1 t$ a $s_2 = v_2 t$. Při zpáteční plavbě se oba čluny vracejí ke kruhům opět po drahách s_1 a s_2 s původními rychlostmi v_1 a v_2 (vzhledem k vodě); oba čluny proto dostihnou záchranné kruhy současně.

Poznámka Při řešení tohoto příkladu je zřejmě výhodnější soustava souřadnic spojená s vodou.

PŘÍKLAD 8

V klidné vodě jezera se pohybuje čtvercový vor o straně l_0 konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ (viz obr. 1-10). Z bodu D vyplují současně dva



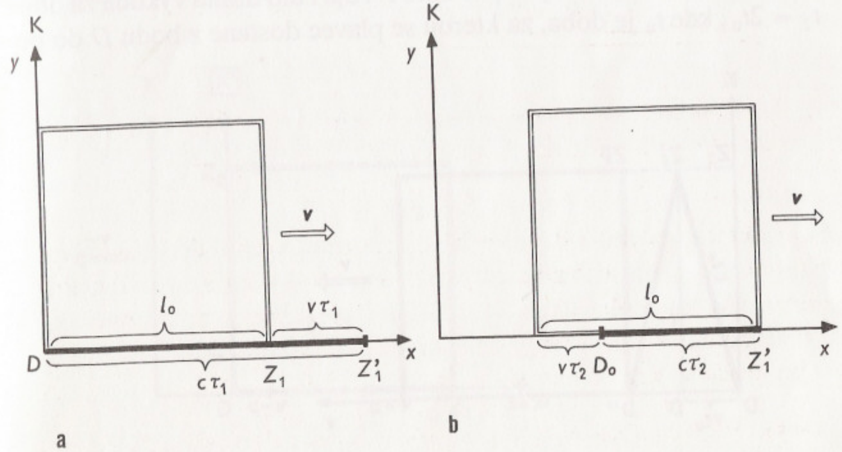
Obr. 1-10

plavci; první plave podél voru po dráze DZ_1D; druhý po dráze DZ_2D. Oba se pohybují stálou rychlostí velikosti $c > v$ vzhledem k vodě. Který z obou plavců se vrátí do bodu D dříve?

Řešení

Příklad lze opět řešit v soustavě souřadnic spojené buď s vodou, nebo s vorem.

a) Zvolme nejprve soustavu souřadnic K spojenou s klidnou vodou (obr. 1-11a). Pro dobu t_1, za kterou první plavec dopluje k bo-



Obr. 1-11

du Z_1 a vrátí se nazpět, můžeme psát $t_1 = \tau_1 + \tau_2$, kde τ_1 je doba, během níž plavec pluje k bodu Z_1, a τ_2 doba, za kterou se vrátí nazpět. Za dobu τ_1 se bod Z_1 posune o $v\tau_1$ do polohy Z_1', takže plavec plující rovnoběžně s vektorem rychlosti $\boldsymbol{v}$ voru urazí za tuto dobu vzhledem k soustavě K dráhu

$$c\tau_1 = l_0 + v\tau_1 .$$

Plavec se potom vrací k bodu D, který se za dobu τ_2 posune o $v\tau_2$ do polohy D_0 (viz obr. 1-11b); při návratu urazí tedy plavec vzhledem k soustavě K dráhu

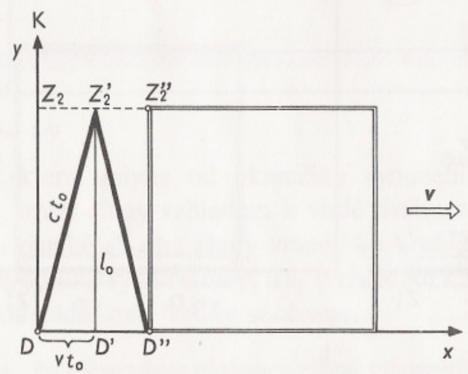
$$c\tau_2 = l_0 - v\tau_2 .$$

Z obou vztahů určíme dobu t_1:

$$t_1 = \tau_1 + \tau_2 = \frac{l_0}{c-v} + \frac{l_0}{c+v} = \frac{2l_0c}{c^2 - v^2} =$$

$$= \frac{2l_0c}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2l_0}{c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} .$$

Druhý plavec plovoucí podél voru k bodu Z_2 urazí vzhledem k soustavě K dráhu $DZ_2'D''$ (viz obr. 1-12). Tuto dráhu vykoná za dobu $t_2 = 2t_0$, kde t_0 je doba, za kterou se plavec dostane z bodu D do bo-



Obr. 1-12

du Z_2'. Za dobu t_0 se vor posune o dráhu vt_0; z pravoúhlého trojúhelníku $DZ_2'D'$ pak dostáváme

$$(ct_0)^2 = l_0^2 + (vt_0)^2$$

a odtud

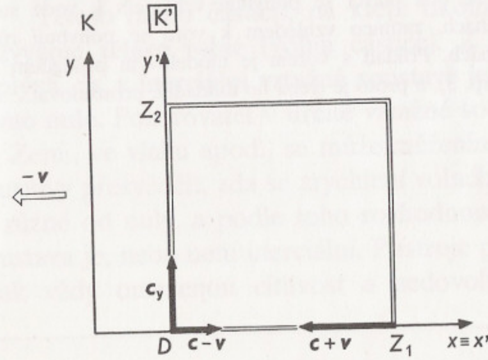
$$t_0 = \frac{l_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{l_0}{\sqrt{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{l_0}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Hledaná doba je tedy určena výrazem

$$t_2 = 2t_0 = \frac{2l_0}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Poněvadž podle předpokladu $v < c$, je $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} > \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$; odtud vyplývá $t_1 > t_2$. Plavec, který plave rovnoběžně se směrem rychlosti $\boldsymbol{v}$ voru, se vrátí do bodu D později než plavec, který plave kolmo ke směru rychlosti $\boldsymbol{v}$ voru.

b) Řešme nyní úlohu v soustavě souřadnic K′ spojené s vorem (obr. 1-13). První plavec plave po dráze DZ_1 rychlostí velikosti

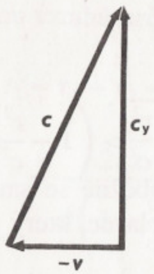


Obr. 1-13

$c - v$ (vzhledem k soustavě K′), nazpět rychlostí velikosti $c + v$; dráhu DZ_1D urazí tedy za dobu

$$t_1 = \frac{l_0}{c - v} + \frac{l_0}{c + v} = \frac{2l_0}{c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Druhý plavec plave podél stěny DZ_2 kolmo ke směru rychlosti $\boldsymbol{v}$. Velikost jeho rychlosti c_y vzhledem k voru neznáme. Poněvadž však rychlost plavce vzhledem k vodě je $\boldsymbol{c}$ a rychlost vody vzhledem k voru je $-\boldsymbol{v}$, je hledaná rychlost $\boldsymbol{c}_y$ určena vektorovým součtem rychlostí $-\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{c}$ (obr. 1-14); odtud dostáváme



Obr. 1-14

$$c_y^2 = c^2 - v^2$$

a

$$t_2 = 2t_0 = \frac{2l_0}{c_y} = \frac{2l_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l_0}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Poznámka Povšimněte si, že oba plavci se pohybují vzhledem k vodě stejnými rychlostmi po různých dráhách, zatímco vzhledem k voru se pohybují různými rychlostmi po stejných dráhách. Příklad s vorem je modelovým příkladem k tzv. Michelsonovu pokusu (viz kap. 3), a proto je třeba ho důkladně prostudovat.

1.6 INERCIÁLNÍ A NEINERCIÁLNÍ VZTAŽNÁ SOUSTAVA

Podle prvního pohybového zákona setrvává každé těleso v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není přinuceno působením jiného tělesa tento stav změnit. „Klid“ nebo „rovnoměrný přímočarý pohyb“ jsou však relativní pojmy vzhledem k volbě vztažné soustavy. Je proto na místě otázka, zda první pohybový zákon platí ve všech vztažných soustavách.

Jednoduché příklady a pozorování ukazují, že první pohybový zákon ve všech soustavách neplatí. Předpokládejme např., že pozorovatel uvnitř vagónu rozjíždějícího se vzhledem k Zemi rovnoměrným zrychleným pohybem položí na ideálně hladkou podlahu vagónu kuličku. Pozorovatel uvnitř vagónu zjistí, že kulička se bude vzhledem k vagónu pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem (proti směru jízdy), i když na ni okolní tělesa nepůsobí silami. To však znamená, že v soustavě souřadnic spojené s rozjíždějícím se vlakem první pohybový zákon neplatí. První pohybový zákon neplatí také v rotující soustavě.

Vztažná soustava nebo soustava souřadnic, v níž platí první pohybový zákon, se nazývá **inerciální.*** Pohybuje-li se soustava souřadnic K′ vzhledem k jiné inerciální soustavě souřadnic K rovnoměrně přímočaře, pak soustava K′ je opět inerciální; pohybuje-li se zrychleně, je neinerciální.

Těleso (nebo částici), na které okolní tělesa nepůsobí silami, nazýváme **těleso volné** (volná částice). Z předcházejícího výkladu vyplývá, že **v inerciální vztažné soustavě je zrychlení volného tělesa rovno nule.** Pozorovatel v určité vztažné soustavě (např. pozorovatel na Zemi, ve vlaku apod.) se může měřením provedeným uvnitř této soustavy přesvědčit, zda se zrychlení volného tělesa rovná nule, nebo je různé od nuly, a podle toho rozhodnout, zda uvažovaná vztažná soustava je, nebo není inerciální. Přístroje používané při měření mají však vždy omezenou citlivost a nedovolují zjistit libovolně malé

* Z lat. inertia = setrvačnost

► **PŘÍKLAD 1**

Za 10 s od okamžiku, kdy se souřadnicové osy inerciálních soustav K′ a K ztotožnily, vznikla v bodě o souřadnicích $x' = 6$ m, $y' = 2$ m a $z' = 3$ m jiskra. Jaké jsou souřadnice této události v soustavě K, jestliže soustava K′ se pohybuje vzhledem k soustavě K v kladném směru osy x konstantní rychlostí o velikosti $v = 7\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$?

Řešení

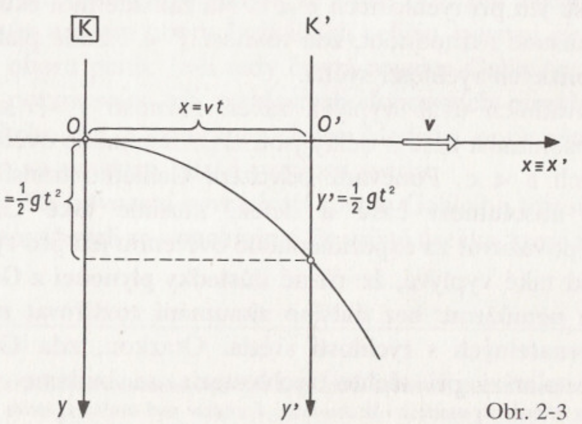
Dosazením do Galileiho transformace dostáváme $x = x' + vt' = 6\ \mathrm{m} + 7\,.\,10\ \mathrm{m} = 76\ \mathrm{m}$; $y = y' = 2$ m; $z = z' = 3$ m a $t = t' = 10$ s.

► **PŘÍKLAD 2**

Z letadla, které se vzhledem k Zemi pohybuje po vodorovné přímce konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$, je v čase $t = 0$ vypuštěno těleso. Vyjádřete závislost souřadnic x a y padajícího tělesa na čase t nejprve v soustavě K spojené se Zemí. Užitím Galileiho transformace pak najděte závislost souřadnic x' a y' na čase t v soustavě K′, která je spojena s letadlem. Jak se pohybuje těleso vzhledem k letadlu? Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení

Z hlediska pozorovatele v soustavě K lze pád tělesa při g = konst. označit za vodorovný vrh, pro který platí rovnice $x = vt$, $y = \frac{1}{2}gt^2$ (obr. 2-3). Z hlediska pozorovatele v soustavě K′ (z hlediska



Obr. 2-3

letce) má těleso v libovolném okamžiku $t' = t$ souřadnice x' a y', které dostaneme ze souřadnic x a y (viz předcházející dvě rovnice) užitím Galileiho transformace

$$x' = x - vt = vt - vt = 0,$$

$$y' = y = \frac{1}{2}gt^2.$$

Rovnice $x' = 0$ a $y' = \frac{1}{2}gt^2$ vyjadřují, že z hlediska pozorovatele v soustavě K′ padá těleso volným pádem ve směru osy y'.

► **PŘÍKLAD 3**

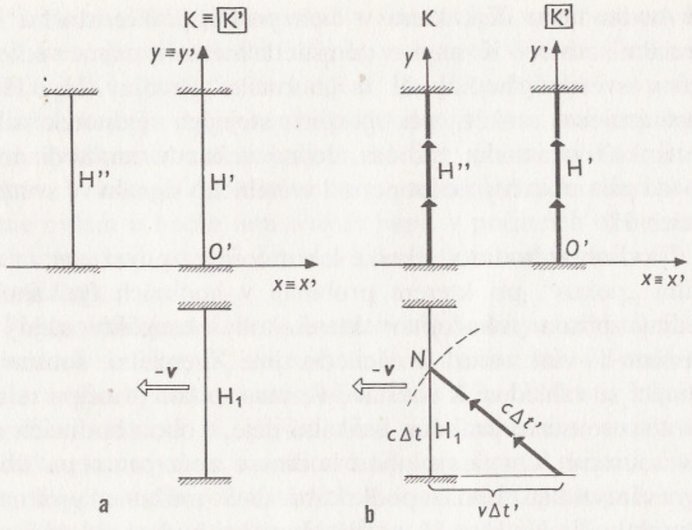
Soustava K′ (např. soustava spojená s vlakem) se pohybuje vzhledem k jiné inerciální soustavě K (např. vzhledem k soustavě spojené se Zemí) rovnoměrně přímočaře rychlostí v.* V soustavě K′ nechť se pohybuje v kladném směru osy x' těleso P rovnoměrným přímočarým pohybem (např. člověk se pohybuje ve vlaku ve směru jízdy). Rychlost tělesa P vzhledem k soustavě K′ označme u'. Užitím Galileiho transformace dokažte, že vzhledem k soustavě K má těleso P rychlost $u = u' + v$.

Řešení

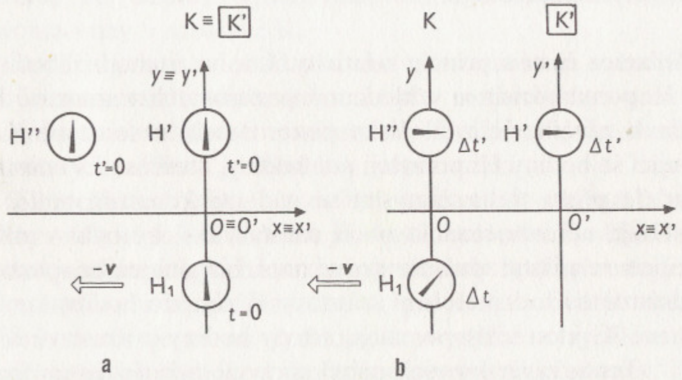
Předpokládejme, že v čase $t = t' = 0$ souřadnicové osy obou soustav K′ a K splývají a těleso P je v jejich společném počátku (obr. 2-4a). Za dobu t přejde těleso rovnoměrným pohybem do bodu A a urazí přitom vzhledem k soustavě K′ dráhu x', vzhledem k soustavě K dráhu x (obr. 2-4b). Průchod tělesa bodem A je událost, která má v souřadnicové soustavě K′ souřadnice x', t'; v soustavě K souřadnice x, t. Z definice rychlosti rovnoměrného přímočarého pohybu

---

* Rychlost $\boldsymbol{v}$ je vektorová veličina, a proto při přesnějším vyjadřování by bylo třeba rozlišovat mezi „rychlostí $\boldsymbol{v}$“ a „velikostí rychlosti v“. Termín „velikost rychlosti v“ se však ve speciální teorii relativity vyskytuje tak často, že jeho časté opakování by vedlo k topornému a nepřehlednému vyjadřování. Proto všude tam, kde nemůže dojít k záměně, používáme místo termínu „velikost rychlosti v“ stručnější označení „rychlost v“.



Obr. 6-5



Obr. 6-6

vané s hodinami H′. Z porovnání hodin H_1 a H″ vyplývá, že pohybující se hodiny H_1 ukazují opět **menší čas** než hodiny H″. **Z hlediska pozorovatele v soustavě K′ jdou tedy pohybující se hodiny H_1 opět pomaleji než hodiny, které jsou v soustavě K′ v klidu.** Soustavy K′ a K jsou ve shodě s principem relativity zcela rovnocenné.

Z obr. 6-5b užitím Pythagorovy věty dostáváme

$$c^2(\Delta t')^2 = c^2\Delta t^2 + v^2(\Delta t')^2,$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t\,.$$

Vzhledem k tomu, že $\gamma > 1$, je nyní $\Delta t < \Delta t'$.

Platnost vztahu $\Delta t' = \gamma \Delta t$ je z hlediska principu relativity samozřejmá, neboť v soustavě K′ musí platit stejné zákony jako v soustavě K, tedy i stejný vztah pro dilataci času; změnilo se jen označení časových intervalů. Soustava K se pohybuje vzhledem k soustavě K′ rychlostí $-\boldsymbol{v}$, a proto Lorentzův koeficient γ ve vztahu $\Delta t' = \gamma \Delta t$ zůstává nezávisle na změně orientace rychlosti $\boldsymbol{v}$ stejný (ve vztahu pro Lorentzův koeficient γ je velikost rychlosti v ve druhé mocnině).

Probíhá-li v místě, kde jsou umístěny hodiny H_1, určitý děj, pak $\Delta t = \Delta t_0$ je nyní vlastní čas tohoto děje a $\Delta t'$ doba trvání tohoto děje v soustavě K′.

Experimentální ověření vztahu pro dilataci času. Závěry, které vyplynuly ze speciální teorie relativity o dilataci času, byly experimentálně potvrzeny různými pokusy. Mezi jevy, které vedly k přesvědčivému ověření vztahu pro dilataci času, patří zejména **závislost doby života mezonů na jejich rychlosti** a **Dopplerův jev.** V novější době byla dilatace času ověřena **přenášením přesných atomových hodin letadlem.**

a) **Závislost doby života mezonů π^+ na jejich rychlosti**

Mezony π^+ jsou kladně nabité elementární částice o hmotnosti $m = 273 m_e$ (m_e je hmotnost elektronu), vznikající např. v urychlovačích ostřelováním hliníkového terčíku rychle letícími protony. Mezon π^+ je nestabilní částice, která se velmi rychle rozpadá na jiné částice; přitom střední doba života částice měřená v klidové soustavě (v laboratoři, vzhledem k níž by se mezon nepohyboval) je $\tau_0 = 2{,}5 \,.\, 10^{-8}$ s. Ze zákonů **klasické fyziky** vyplývá, že kdyby se mezon pohyboval vzhledem k laboratoři rychlostí $v = 0{,}99c$, urazil by od okamžiku vzniku do okamžiku rozpadu střední dráhu

$$l_k = v\tau_0 = 0{,}99 \,.\, 3 \,.\, 10^8 \,.\, 2{,}5 \,.\, 10^{-8}\ \mathrm{m} \doteq 7{,}4\ \mathrm{m}.$$

Experimenty v laboratoři však ukázaly, že střední dráhy, které mezony π^+ za těchto podmínek do okamžiku svého rozpadu urazí, jsou ve skutečnosti mnohem větší.

Chyba předcházejícího výpočtu spočívá v tom, že při rychlostech blízkých rychlosti světla není již možno použít zákony klasické fyziky. Pozorovatel, který by se pohyboval společně s mezonem, by zjistil, že střední doba jeho rozpadu je opět $2{,}5 \,.\, 10^{-8}$ s, neboť podle principu relativity se v libovolné klidové soustavě musí mezon π^+ rozpadnout za stejnou dobu. Z hlediska pozorovatele v laboratoři na Zemi, vzhledem k němuž se mezon pohybuje rychlostí $0{,}99c$, je střední doba života τ mezonu určena vztahem

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2{,}5 \,.\, 10^{-8}}{\sqrt{1-0{,}99^2}}\ \mathrm{s} \doteq 17{,}7 \,.\, 10^{-8}\ \mathrm{s}.$$

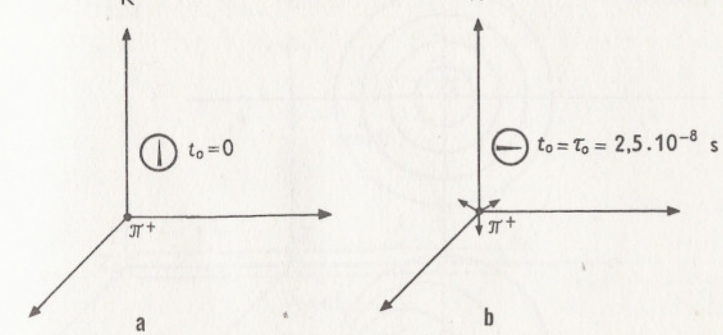
Tato doba je větší než $\tau_0 = 2{,}5 \,.\, 10^{-8}$ s, a proto mezon v laboratoři urazí větší střední dráhu

$$l_r = v\tau = 0{,}99 \,.\, 3 \,.\, 10^8 \,.\, 17{,}7 \,.\, 10^{-8}\ \mathrm{m} \doteq 53\ \mathrm{m}.$$

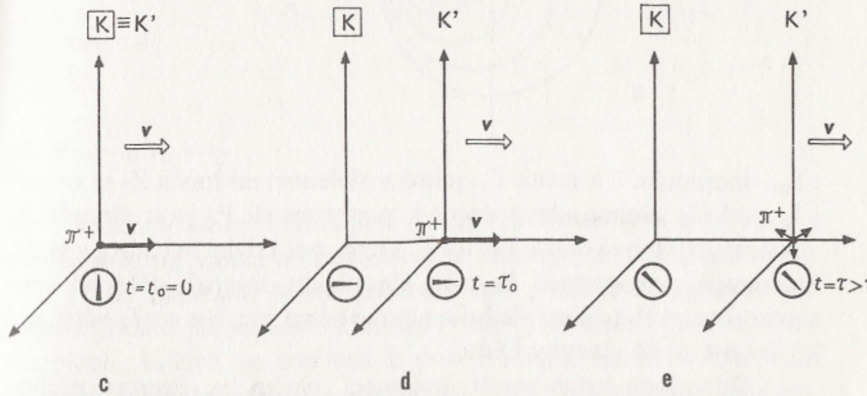
Doba života mezonu v klidové soustavě K′ a v laboratorní soustavě K, vzhledem k níž se mezon π^+ pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$, je znázorněna na obr. 6-7 ([45]).

b) Podélný Dopplerův jev

Přijíždí-li pískající lokomotiva k pozorovateli, slyší pozorovatel vyšší kmitočet zvuku (vyšší tón); při vzdalování zdroje zvuku se naopak tento tón sníží. Závislost frekvence vlnění, kterou vnímá pozorovatel, na vzájemné rychlosti zdroje vlnění a pozorovatele, objevil a teoreticky zdůvodnil v r. 1842 rakouský fyzik Ch. Doppler (1803–1853), a nazývá se proto **Dopplerův jev.** Jestliže vzájemný pohyb zdroje vlnění a pozorovatele nastává ve směru šíření vlnění, hovoříme o **podélném Dopplerově jevu.**



Obr. 6-7a Vznik mezonu v soustavě K′ Obr. 6-7b Rozpad mezonu v soustavě K′



Ob. 6-7c Vznik mezonu v soustavě K

Obr. 6-7d Za dobu $t = \tau_0$ se mezon ještě nerozpadl

Obr. 6-7e Mezon se rozpadá v soustavě K za dobu $\tau > \tau_0$

Kvalitativně lze pochopit Dopplerův jev podle obr. 6-8. Na obr. 6-8a jsou znázorněny vlnoplochy, které vysílá nepohybující se zdroj vlnění po čtyřech po sobě následujících periodách T_0; pozorovatelé P_1 a P_2 zjišťují přitom stejnou vlnovou délku λ_0, jakou vysílá zdroj vlnění.

Na obr. 6-8b jsou znázorněny vlnoplochy, které vysílá zdroj vlnění stálého kmitočtu ν_0, který se blíží rychlostí $\boldsymbol{v}$ ve směru Z_1P_1 k pozorovateli P_1. Tento pohybující se zdroj vyslal vlnoplochu 1 z místa Z_1, vlnoplochu 2 z místa Z_2, jehož vzdálenost od místa Z_1 je přesnějších měření ([23]), která přesvědčivě potvrdila platnost vztahu pro frekvenci záření u příčného Dopplerova jevu a tím i správnost relativistického vztahu pro dilataci času.

d) **Dilatace času při přenášení hodin letadlem**

Při výkladu speciální teorie relativity se často zdůrazňuje, že relativistické jevy se projevují až při rychlostech blízkých rychlosti světla. Soudobá měřicí technika je však již tak vyspělá, že některé relativistické jevy lze zjistit i při rychlostech podstatně menších.

Vztah pro dilataci času byl v současné době ověřen již při rychlostech dopravních prostředků. Při tomto pokusu, provedeném v r. 1971 v USA, byly porovnány cesiové atomové hodiny, přenesené letadlem kolem Země, s hodinami, které zůstaly na Zemi. Podle výpočtu založeného na teorii relativity se pohybující hodiny měly opožďovat za hodinami, které zůstaly na Zemi, o 184 ns ± 23 ns; při pokusu bylo naměřeno zpoždění 203 ns ± 10 ns (1 ns = 10^{-9} s). Experiment ověřil vztah pro dilataci času asi s 10%ní přesností ([105], [69]).

Pokus s přenášením cesiových atomových hodin letadlem má dnes význam spíše jako demonstrace přesného chodu atomových hodin, neboť vztah pro dilataci času je třeba považovat v současné době za ověřený s dostatečnou přesností. Nejpřesnější potvrzení tohoto vztahu (s chybou 1 promile) představuje v současné době měření doby života mionů (druh elementárních částic) pohybujících se rychlostí $v = 0{,}999\,4c$ ([105]). Měření, které bylo provedeno v r. 1968 ve výzkumném středisku CERN poblíž Ženevy, ukázalo, že miony, které jsou vzhledem k laboratoři v klidu, mají ve shodě se vztahem pro dilataci času asi 30krát kratší střední dobu života než miony, které krouží v urychlovači.

► **PŘÍKLAD 1**

Na kosmické lodi vzdalující se od Země konstantní rychlostí $0{,}1c$ probíhal určitý děj, který podle měření kosmonautů, účastníků letu, trval jednu hodinu.

a) Jak dlouho trvá tento děj pro pozorovatele na Zemi?

b) Sestrojte na milimetrovém papíru pomocí počítačky graf vyjadřující závislost Lorentzova koeficientu γ na poměru rychlostí $\beta = \frac{v}{c}$; $\gamma = f(\beta)$. Užitím tohoto grafu pak zjistěte, jak dlouho by pro pozorovatele na Zemi trval děj probíhající na kosmické lodi jednu hodinu, kdyby se tato loď pohybovala vzhledem k Zemi různými rychlostmi z intervalu $0 \leqq v < c$. Několik hodnot těchto rychlostí volte libovolně.

c) Je možné, aby děj, který na kosmické lodi trval 1 hodinu, trval z hlediska pozorovatele na Zemi 1 000 000 hodin? Řešte s použitím tabulek Lorentzových koeficientů.

Řešení

a) Čas $\Delta t_0 = 1$ h je vlastní čas trvání děje probíhajícího na kosmické lodi; z rovnice

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

po dosazení za Δt_0 a v pak vyplývá $\Delta t \doteq 1{,}005$ h.

b) Viz obr. 6-11.

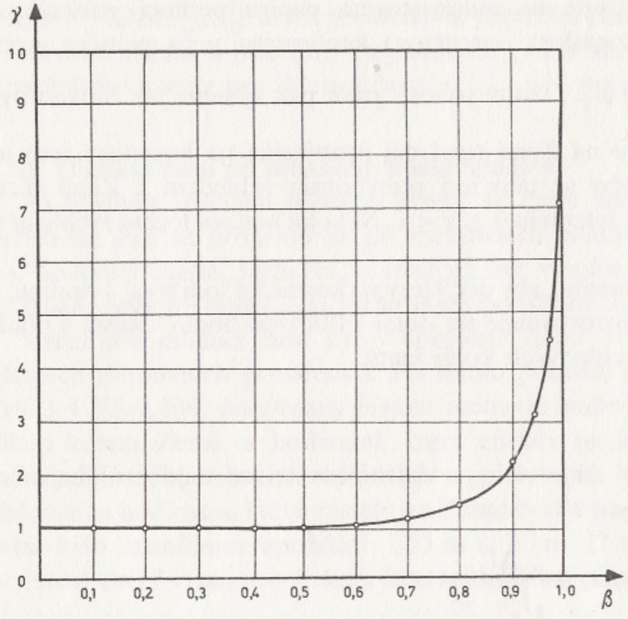
c) Z rovnice $\Delta t = \gamma \Delta t_0$, kde $\Delta t_0 = 1$ h a $\Delta t = 10^6$ h, dostáváme

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 10^6 \text{ a s použitím tabulek pak } 1 - \frac{v}{c} \doteq 5\,.\,10^{-13}.$$

Odtud vyplývá $v = c(1 - 5\,.\,10^{-13}) \doteq c - 1{,}5\,.\,10^{-4}\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$.

Děj, který na kosmické lodi trvá jednu hodinu, může trvat na Zemi 10^6 h, pohybuje-li se kosmická loď rychlostí jen o $1{,}5\,.\,10^{-4}\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ menší než rychlost světla.

Poznámka Z průběhu funkce $\gamma = f(\beta)$ je zřejmé, že při rychlostech $v \ll c$ dilatace času nenastává. Blíží-li se však rychlost v rychlosti světla ve vakuu (tj. $v \to c$, $\beta \to 1$), roste hodnota Lorentzova koeficientu nade všechny meze ($\gamma \to \infty$). Podíl $\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \gamma$ může tedy při daném vlastním čase Δt_0 nabývat teoreticky libovolně velkých hodnot. Současné



Obr. 6-11

kosmické lodi se však ve srovnání s rychlostí světla pohybují rychlostmi velmi malými (řádově asi 10 km . s^{-1}). K otázce, proč nelze tak snadno urychlit makroskopická tělesa na rychlosti $v \to c$, se ještě vrátíme (viz čl. 10.5, př. 22).

Z grafu na obr. 6-11 také plyne, že při rychlostech blízkých rychlosti světla odpovídá malé změně veličin v a β velká změna Lorentzova koeficientu γ. Při řešení úloh je proto třeba v těchto případech stanovit veličiny v a β velmi přesně.

► PŘÍKLAD 2

Let letadla pohybujícího se rychlostí 1 000 km . h^{-1} trval podle palubních hodin 1 hodinu. Vypočtěte, jak dlouho trval tento let z hlediska pozorovatele na Zemi.

Řešení

Rychlosti 1 000 km . h^{-1} ≐ 0,3 km . s^{-1} ≐ $10^{-6}c$ odpovídá Lorentzův koeficient $\gamma = 1 + 5 . 10^{-13}$ (viz tabulku I v příloze). Ze vztahu $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ pak vyplývá, že děj, který v letadle trvá jednu hodinu, trvá pro pozorovatele na Zemi 1,000 000 000 000 5 h ≐ 1 h.

Poznámka Z příkladu opět vyplývá, že při rychlostech, s nimiž se setkáváme v běžném životě, lze položit $\Delta t \doteq \Delta t_0$.

Albert Einstein společně s polským fyzikem L. Infeldem (1898–1968) ilustrují názorně hranici mezi klasickou a relativistickou fyzikou takto: „Bylo by směšné uplatňovat teorii relativity pro pohyb vozů, vlaků a lodí asi tak, jako kdybychom užívali počítací stroj tam, kde by stačila násobilka.“ ([12], str. 135). V současné době se však již běžně experimentuje s částicemi pohybujícími se rychlostmi srovnatelnými s rychlostí světla; použití vztahu $\Delta t = \Delta t_0$ by zde vedlo k zcela chybným výsledkům. Jak jsme již také viděli, při použití přesných atomových hodin se dá dilatace času prokázat i při pohybu letadel.

Hodnotu Lorentzova koeficientu γ jsme při řešení tohoto příkladu převzali z tabulek uvedených v příloze. Lze však doporučit, aby si čtenář hodnotu Lorentzova koeficientu odpovídající rychlosti $v = 10^{-6}c$ sám vypočítal užitím nám již známého přibližného vztahu $\frac{1}{1+x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$, jenž platí při $x \ll 1$.

► PŘÍKLAD 3

Při srážkách částic primárního kosmického záření s atomy vrchní vrstvy atmosféry vznikají miony. Jsou to nestabilní částice se střední dobou života $\tau_0 = 2{,}2 . 10^{-6}$ s (měřenou v klidové soustavě mionu) a s hmotností $m = 207m_e$ (m_e je hmotnost elektronu). Pozorování pomocí stratosférických balónů a raket ukázala, že miony vznikají ve velkých výškách nad povrchem Země (více než 10 km) a odtud se pohybují k Zemi rychlostí blížící se rychlosti světla. Za střední dobu života 2,2 . 10^{-6} s se mion již rozpadá na elektron a dvě neutrina.

Předpokládejme, že mion vznikl ve výšce 15 km a pohybuje se k Zemi rychlostí $v = 0{,}999\,8c$. Může tento mion doletět na povrch Země?

Řešení

Řešme tuto úlohu ve vztažné soustavě spojené se Zemí. Vzhledem k velké rychlosti mionu v porovnání s rychlostí světla je třeba při řešení vycházet z poznatků speciální teorie relativity.

Dráha, kterou může mion od okamžiku vzniku do okamžiku rozpadu urazit, je $l = v\tau$, kde $\tau = \gamma\tau_0$ je střední doba života mionu **v zemské vztažné soustavě.** Poměr rychlosti mionu k rychlosti světla je $\beta = 0{,}999\,8$; odtud $1 - \beta = 2 . 10^{-4}$ a podle tabulek $\gamma \doteq 50$. Mion tedy urazí za dobu svého života v zemské vztažné soustavě dráhu $l = v\tau =$

$= v\gamma\tau_0 \doteq 3 \,.\, 10^8 \,.\, 50 \,.\, 2{,}2 \,.\, 10^{-6}$ m $= 3{,}3 \,.\, 10^4$ m $= 33$ km, a proto může být zaregistrován přístroji na Zemi.

Poznámka Kdyby se neprojevila dilatace času a čas byl absolutní veličina $(\tau = \tau_0)$, pak by nejrychlejší miony $(v \approx c)$ mohly od okamžiku vzniku do okamžiku rozpadu urazit jen dráhu $l_k = v\tau_0 \doteq 3 \,.\, 10^8 \,.\, 2{,}2 \,.\, 10^{-6}$ m $= 660$ m; to znamená, že by se nemohly dostávat na povrch Země. V laboratoři na Zemi však můžeme miony vznikající ve velkých výškách zaregistrovat; tím je opět experimentálně prokázán jev dilatace času.

Teoretická fyzika nedovede prozatím vysvětlit, proč se mion rozpadá a proč je střední doba jeho života v klidové soustavě $2{,}2 \,.\, 10^{6}$ s; přesto je však experimentálně potvrzeno, že tato doba je ve shodě s výsledky speciální teorie relativity v různých vztažných soustavách různá. To svědčí o tom, že jev dilatace času se projeví u každého přírodního jevu; nezávisle na konkrétní povaze sledovaného fyzikálního, chemického nebo biologického jevu platí vždy vztah $\Delta t = \gamma\Delta t_0$. Dilatace času je tedy jev, který souvisí se základními vlastnostmi prostoru a času.

▶ PŘÍKLAD 4

V laboratořích na dvou kosmických lodích K a K′, které považujeme za inerciální vztažné soustavy, jsou umístěny stejné radioaktivní izotopy (např. $^7_4$Be). Izotop $^7_4$Be na lodi K označíme I_K, izotop $^7_4$Be na lodi K′ označíme $I_{K'}$. Pozorovatel na lodi K zjistil měřením na svých hodinách, že poločas rozpadu jeho izotopu I_K je 53 dní. Jaký poločas rozpadu izotopu $I_{K'}$ zjistí na svých hodinách druhý pozorovatel na lodi K′, jestliže se tato loď vzhledem k lodi K pohybuje rychlostí $v = 0{,}98\,c$?

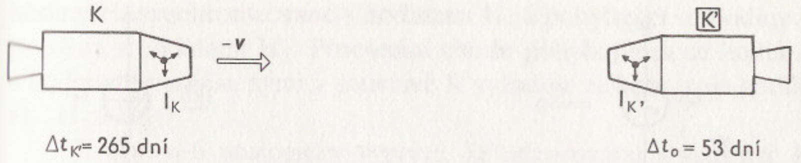
Řešení

Poločas rozpadu izotopu I_K měřený pozorovatelem na lodi K označme symbolem Δt_{0K} a poločas rozpadu izotopu $I_{K'}$ měřený pozorovatelem na lodi K′ $\Delta t_{0K'}$. Z principu relativity pak vyplývá, že $\Delta t_{0K} = \Delta t_{0K'} = 53$ dní; oba pozorovatelé zjistí stejnou dobu rozpadu. Doba $\Delta t_0 = \Delta t_{0K} = \Delta t_{0K'}$ je vlastní poločas rozpadu radioaktivní látky.

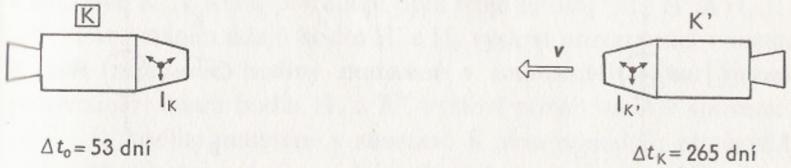
Poznámka Uveďme ještě přehledně, jaké jsou poločasy rozpadu obou radioaktivních izotopů I_K a $I_{K'}$ z hlediska pozorovatelů na lodích K a K′.

a) **Hledisko pozorovatele v lodi K** (obr. 6-12). Podle pozorovatele v lodi K je poločas rozpadu jeho izotopu I_K 53 dní; ale poločas rozpadu izotopu $I_{K'}$ pohybujícího se vzhledem k pozorovateli v lodi K rychlostí $\boldsymbol{v}$ je

$$\Delta t_K = \gamma\Delta t_0 \doteq 5 \,.\, 53 \text{ dní} = 265 \text{ dní.}$$



Obr. 6-12



Obr. 6-13

b) **Hledisko pozorovatele v lodi K′** (obr. 6-13). Podle pozorovatele v lodi K′ je poločas rozpadu jeho izotopu $I_{K'}$ 53 dní; ale poločas rozpadu izotopu I_K pohybujícího se vzhledem k pozorovateli v lodi K′ rychlostí $-\boldsymbol{v}$ je

$$\Delta t_{K'} = \gamma\Delta t_0 \doteq 5 \,.\, 53 \text{ dní} = 265 \text{ dní.}$$

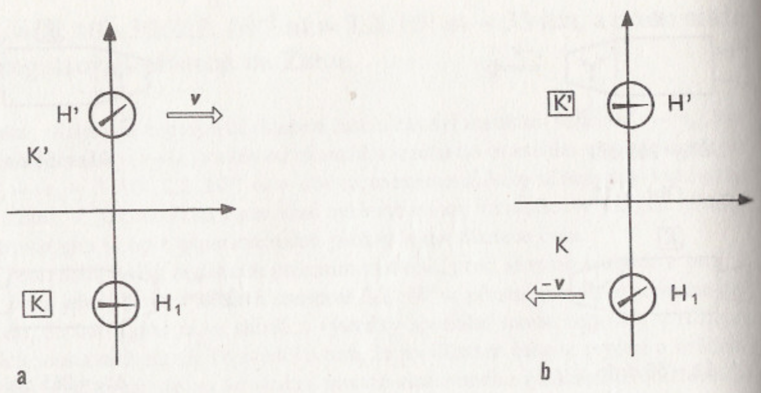
Příklad ilustruje rovnocennost obou inerciálních vztažných soustav K a K′.

▶ PŘÍKLAD 5

Podle studenta studujícího speciální teorii relativity není možné, aby pozorovatel v soustavě K tvrdil, že hodiny umístěné v soustavě K′ jdou pomaleji, zatímco pozorovatel v soustavě K′ naopak prohlašoval, že pomaleji jdou hodiny umístěné v soustavě K — v těchto tvrzeních je podle studenta logický rozpor. Student doprovodil svůj názor také náčrtem (obr. 6-14). Zvolíme-li dvojici navzájem se pohybujících hodin H′ a H_1, pak není možné, aby hodiny H′ pohybující se kolem hodin H_1 ukazovaly menší čas než hodiny H_1 (hledisko pozorovatele v K — viz obr. 6-14a) a hodiny H_1 ukazovaly ve stejném bodu menší čas než hodiny H′ (hledisko pozorovatele v K′ — viz obr. 6-14b); např. momentní fotografie musí ukázat, že je správné jen jedno z obou tvrzení. Rozeberte názor studenta a celý problém správně vysvětlete.

Řešení

Student má pravdu v tom, že jsou-li vzájemně se pohybující hodiny H′ a H_1 v jednom místě vedle sebe, pak skutečně není možné,



Obr. 6-14 a) Hledisko pozorovatele v soustavě K
b) Hledisko pozorovatele v soustavě K′

aby hodiny H′ ukazovaly menší čas než hodiny H_1 a hodiny H_1 ukazovaly menší čas než hodiny H′ — správné může být jen jedno z obou tvrzení. Porovnání údajů obou hodin (principiálně např. pomocí fotografie) by tedy vedlo k jednoznačnému výsledku.

Avšak jen z porovnání údajů dvou navzájem se pohybujících hodin na jednom místě (tj. při jejich setkání — viz studentův náčrt) nelze vyvozovat žádné závěry již proto, že oba pozorovatelé mohli ve svých vztažných soustavách uvést své hodiny do chodu v libovolném okamžiku; tj. v libovolném okamžiku mohli nastavit na svých hodinách H′ a H_1 čas $t = 0$ a $t' = 0$. Kromě toho při setkání dvojice pohybujících se hodin v jednom místě mohou oba pozorovatelé bezprostředně porovnat jen okamžité údaje obou hodin; avšak jen z tohoto porovnání nelze vyvodit žádný závěr o jejich „chodu“, tj. o tom, zda hodiny pohybující se vzhledem k určitému pozorovateli jdou např. pomaleji.

Chceme-li z hlediska určitého pozorovatele porovnat chod vzájemně se pohybujících hodin H_1 a H′, musíme nejprve u obou hodin při jejich setkání v jednom bodě nastavit stejný čas (nejlépe $t = t' = 0$) a po uplynutí určité doby jejich údaje opět porovnat. Po uplynutí této doby nemůže však již pozorovatel v soustavě K údaje hodin H′ a H_1 bezprostředně porovnat, neboť hodiny H′ se mezitím posunuly napravo (viz obr. 6-3b); pozorovatel v této soustavě proto užije další

hodiny H_2 synchronizované s hodinami H_1 a pohybující se hodiny H′ porovná s hodinami H_2. Porovnání chodu pohybujících se hodin H′ s hodinami rozmístěnými v soustavě K vyžaduje celkem troje hodiny: H_1, H_2 a H′.

Z obr. 6-6 analogicky vyplývá, že pozorovatel v soustavě K′, který porovnává pohybující se hodiny H_1 s hodinami rozmístěnými v soustavě K′, k tomu potřebuje opět troje hodiny: H′, H″ a H_1.

Porovnáním údajů hodin H′ a H_2 vysloví pozorovatel v soustavě K pak závěr, že **hodiny umístěné v soustavě K′ jdou pomaleji;** porovnáním údajů hodin H_1 a H″ vysloví pozorovatel v soustavě K′ závěr, že **hodiny umístěné v soustavě K jdou pomaleji;** poněvadž se však tyto výroky opírají o údaje **různých dvojic** hodin (H′ a H_2, H_1 a H″), není mezi těmito výroky žádný logický rozpor.

Poznámka Proti tomuto vysvětlení a proti obr. 6-3 a obr. 6-6 může však student uvést ještě tuto námitku: „Hodiny H_1 a H_2 jsou synchronizovány, a proto musí v kterémkoli okamžiku ukazovat stejný čas (viz obr. 6-3b); totéž lze říci o hodinách H′ a H″ (obr. 6-6b). Jestliže tedy např. hodiny H′ ukazují v určitém okamžiku menší čas než hodiny H_2 (obr. 6-3b), pak v tomto okamžiku musí kterékoli hodiny umístěné v soustavě K′ ukázat menší čas než hodiny umístěné v soustavě K, neboť hodiny v soustavě K′ jsou navzájem synchronizovány. Tento závěr je však v rozporu s obr. 6-6b, kde hodiny H″ ukazují větší čas než hodiny H_1.“

Nesprávnost této úvahy však spočívá v tom, že nerespektuje relativnost současnosti nesoumístných událostí a relativnost pojmu „synchronizace hodin“. Termíny „současně“ nebo „v daném okamžiku“, kterými konstatujeme současnost několika nesoumístných událostí, mají smysl jen v dané vztažné soustavě; proto ve všech úvahách o měření času je třeba tuto vztažnou soustavu nejprve zvolit. Zvolíme-li např. za vztažnou soustavu K (obr. 6-3b), pak hodiny H_1 a H_2 jsou v této soustavě synchronizovány, hodiny H′ ukazují menší čas než hodiny H_2, avšak hodiny soustavy K′ jsou synchronizovány jen v soustavě K′, nejsou tedy synchronizovány v soustavě K. Není tedy pravda, že když v určitém okamžiku **z hlediska pozorovatele soustavy K** ukazují hodiny H′ menší čas než hodiny H_2, musí všechny hodiny soustavy K′ ukazovat menší čas než hodiny soustavy K. Na tomto chybném tvrzení byla založena studentova námitka.

► PŘÍKLAD 6

Kuře se vylíhne z vajíčka za 21 dní. Předpokládejme, že líheň je umístěna na kosmické lodi pohybující se vzhledem k Zemi rychlostí

$v = 0{,}994c$. Jakou dobu vylíhnutí kuřete zjistí v tomto případu a) kosmonaut na kosmické lodi, b) pozorovatel na Zemi?

Řešení

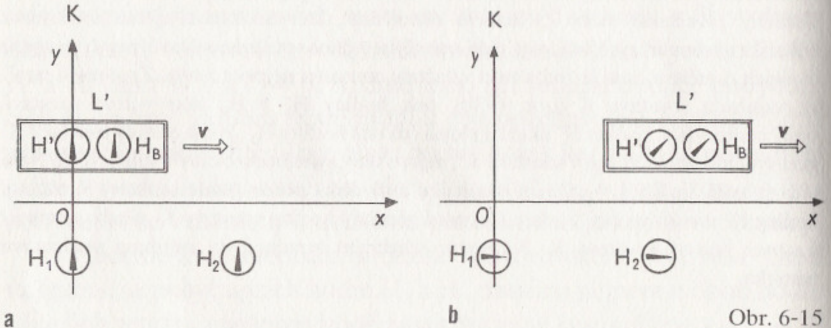
Z principu relativity vyplývá, že kosmonaut na kosmické lodi zjistí stejnou dobu líhnutí kuřete, jaká by byla v líhni na Zemi, tj. $\Delta t_0 = 21$ dní. Tato doba je vlastní čas uvažovaného děje. Doba vylíhnutí kuřete z vajíčka umístěného na kosmické lodi je pak pro pozemského pozorovatele určena vztahem

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = 9{,}142 . 21 \text{ dní} \doteq 192 \text{ dní}.$$

Poznámka Někteří biologové vyslovují občas nesprávný názor, podle kterého vztah pro dilataci času lze aplikovat jen na fyzikální děje, nikoli však na děje biologické. Podle tohoto názoru by pohybující se fyzikální hodiny šly ve shodě se speciální teorií relativity pomaleji, avšak u biologických dějů by se dilatace času neprojevovala.

Každý biologický děj je však také dějem fyzikálním, na který zákony speciální teorie relativity lze aplikovat. Navíc je možné také ukázat, že kdyby vztah pro dilataci času pro biologické děje neplatil, bylo by to v rozporu s principem relativity, podle kterého žádným pokusem provedeným uvnitř izolované vztažné soustavy nelze rozhodnout, zda se tato soustava vzhledem k jiné inerciální vztažné soustavě pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, popř. zda je v klidu.

Celá situace je znázorněna na obr. 6-15. Předpokládejme, že v pohybující se kosmické laboratoři L′ máme vedle fyzikálních hodin H′ umístěny ještě biologické hodiny H_B, tj. určitý organismus, který biologickým dějem odměřuje jistý časový interval (např. dobu líhnutí kuřete, vyklíčení semena, zahojení rány apod.).* Podle speciální

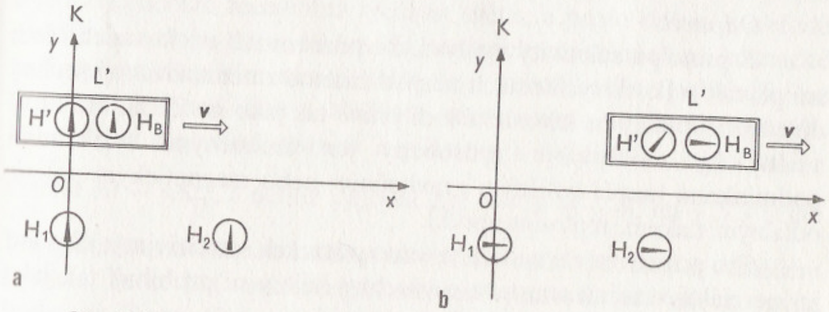


Obr. 6-15

* Také délka života člověka představuje určitý údaj biologických hodin. Velmi pěkně to vyjádřil anglický astrofyzik A. Eddington (1882–1944): „My všichni jsme hodinami a naše tváře jsou číselníky let.“ ([60], str. 88).

teorie relativity jdou pohybující se fyzikální i biologické hodiny ve shodě se vztahem pro dilataci času pomaleji, takže pozorovatel v uzavřené kosmické laboratoři L′ nemůže vzájemným porovnáváním těchto hodin zjistit, zda se jeho laboratoř vzhledem ke vztažné soustavě K pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, popř. zda je v klidu.

Kdyby však pohybující se fyzikální hodiny H′ šly ve shodě se speciální teorií relativity pomaleji a u biologických hodin H_B by se dilatace času neprojevovala (tj. hodiny H_B by ukazovaly stejný čas jako hodiny H_2, viz obr. 6-16b), pak by pozoro-



Obr. 6-16

vatel v pohybující se kosmické laboratoři L′ z různosti údajů biologických a fyzikálních hodin H_B a H′ mohl zjistit, že se jeho laboratoř pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, což je v rozporu s principem relativity. Při větší rychlosti laboratoře L′ by fyzikální hodiny H′ šly podle vztahu pro dilataci času ještě pomaleji, takže by se rozdíl časových údajů mezi biologickými a fyzikálními hodinami zvětšoval a podle tohoto rozdílu by pozorovatel v laboratoři L′ mohl usoudit, že se jeho laboratoř pohybuje větší rychlostí.

Tato úvaha ukazuje, že je krajně nepravděpodobné, že by vztah pro dilataci času neplatil pro biologické děje a že by bylo možné v rozporu s principem relativity pomocí biologického děje zjistit absolutní pohyb vztažné soustavy.

Americký fyzik, laureát Nobelovy ceny R. Feynman (1918–1988) se k tomuto problému vyjádřil takto ([19]): „Biologové a lékaři někdy říkají, že nejsou přesvědčeni o tom, že rakovinový nádor se bude v kosmické lodi rozvíjet delší dobu.* Ve skutečnosti však z hlediska současného fyzika se tak stane téměř určitě; jinak by bylo možné podle rychlosti rozvíjení nádoru usoudit, jakou rychlostí se pohybuje kosmická loď!“

* Feynman tím myslí delší dobu z hlediska pozorovatele na Zemi.

► **PŘÍKLAD 7**

Všechny děje na kosmické lodi, pohybující se rychlostí jen o málo menší než je rychlost světla, probíhají z hlediska pozorovatele na Zemi pomaleji, než v zemské laboratoři. Znamená to, že kosmonauti uvidí na své lodi probíhat všechny děje asi tak jako ve značně zpomaleném filmu?

Odpověď

Z principu relativity vyplývá, že pozorovatel na kosmické lodi ani při tak velkých rychlostech nezjistí žádnou změnu; život a všechny děje by probíhaly na kosmické lodi právě tak jako na Zemi. Případné změny by mohly být způsobeny jen změněnými fyzikálními podmínkami (např. odlišným gravitačním nebo magnetickým polem, odlišným tlakem, teplotou apod.).

Pro pozorovatele na lodi je tento poznatek samozřejmý; jeho loď je inerciální vztažná soustava a všechny děje v ní probíhají tak jako v kterékoli jiné inerciální vztažné soustavě.

Pozorovatel na Zemi si ovšem může klást otázku, proč pozorovatel na lodi zpomalení svých hodin umístěných na lodi ani zpomalení všech ostatních dějů nepozoruje. Pozorovatel na Zemi si to vysvětluje tím, že se na kosmické lodi všechny hodiny a všechny děje zpomalují stejně, takže vzájemným porovnáváním těchto hodin a dějů nemůže kosmonaut na lodi nic zjistit.

Poznámka Okolnost, že pro pozorovatele na lodi probíhají všechny děje právě tak jako na Zemi, však nic nemění na reálnosti jevu dilatace času (viz např. vysvětlení relativistického Dopplerova jevu nebo různou dobu života nestabilních částic vzhledem k různým vztažným soustavám). K jakým dalekosáhlým důsledkům může vést jev dilatace času, ukazuje také následující příklad.

► **PŘÍKLAD 8**

Dvě dvojčata A a B se po oslavě svých dvacátých narozenin rozhodnou, že dvojče A zůstane na Zemi, zatímco dvojče B se vydá na dlouhou kosmickou cestu k hvězdě vzdálené od Země 40 světelných roků; u hvězdy se loď hned obrátí a dvojče B se vrátí nazpět na Zem. Předpokládejme, že kosmická loď, na které dvojče B vykonalo svou cestu, se pohybuje k hvězdě i při zpětném návratu na Zemi konstantní

rychlostí $0{,}99c$ (s výjimkou relativně malého úseku u Země a poblíž hvězdy, kde se loď pohybuje zrychleně nebo zpomaleně). Kolik let bude oběma dvojčatům po návratu kosmické lodi?

Řešení

Při řešení příkladu zvolme za vztažnou soustavu Zemi. Kosmická loď se vzhledem k Zemi pohybuje rychlostí, která je jen o jedno procento menší než rychlost světla, a proto dorazí k hvězdě přibližně za dobu $\Delta t = 40$ let. Na hodinách umístěných na kosmické lodi uplyne mezi tím menší doba Δt_0, neboť hodiny pohybující se vzhledem k Zemi jdou z hlediska pozorovatele na Zemi pomaleji. Vlastní čas Δt_0 mezi startem a příletem k hvězdě lze vypočítat ze vztahu $\Delta t = \gamma \Delta t_0$, z něhož vyplývá $\Delta t_0 = \frac{1}{\gamma}\Delta t \doteq \frac{1}{7}\, 40$ let $\doteq 5{,}7$ roku. Při zpětném návratu se hodiny na palubě opět zpožďují a vzhledem k tomu, že se loď vrací nazpět stejnou rychlostí, trvá návrat podle hodin na Zemi 40 let a podle hodin na palubě opět jen 5,7 roku. Dilatace času se týká všech přírodních jevů probíhajících na kosmické lodi včetně jevů biologických; kosmonaut (dvojče B) zestárne proto při kosmické cestě o 11,4 roku a bude mu po návratu na Zemi 20 let + + 11,4 roku = 31,4 roku. Dvojče A, které zůstalo na Zemi, zestárne po dobu kosmické cesty o 80 let a v okamžiku návratu kosmické lodi mu tedy bude 20 let + 80 let = 100 let (pokud se ovšem tak vysokého věku dožije).

Užitím grafu na obr. 6-11 se také snadno přesvědčíme, že při vyšších rychlostech kosmické lodi může být tento věkový rozdíl ještě větší (teoreticky libovolně veliký); zatímco např. kosmonaut zestárne o několik desítek let, na Zemi se mezitím může vystřídat několik generací.

Poznámka Rozdílný věk obou dvojčat po návratu kosmické lodi na Zemi je jev jistě překvapující a neobvyklý, není to však výsledek logicky protismyslný nebo paradoxní.

Někteří fyzikové se zejména v období vzniku speciální teorie relativity domnívali, že dojdeme k logickým rozporům, zvolíme-li při řešení tohoto příkladu za vztažnou soustavu **kosmickou loď**. Pro dvojče B by pak byla kosmická loď soustavou klidovou a zeměkoule s dvojčetem A by se od kosmické lodi nejprve vzdalovala a pak přibližovala rychlostí $0{,}99c$. Poněvadž podle principu relativity jsou všechny inerciální vztažné soustavy zcela rovnocenné, vyplývá z analogických úvah, že by nyní dvojče A umístěné na pohybující se Zemi zestárlo méně než dvojče B, umístěné na raketě. To je však logický rozpor, neboť jsme uvažovali o stejném fyzikálním ději z hlediska dvou vztažných soustav, a proto po návratu rakety na Zemi musíme dospět ke stejnému výsledku; není možné, aby po přistání na Zemi dvojče A bylo starší než B a současně dvojče B starší než A.

Tento paradox (tzv. **paradox dvojčat**) však vzniká tím, že jsme obě soustavy nesprávně považovali za inerciální a v důsledku toho jsme také nesprávně tvrdili, že jsou rovnocenné. Zemi můžeme během letu rakety stále považovat za inerciální soustavu;* kosmická loď letící k daleké hvězdě však musí nejprve odstartovat, u hvězdy se zastavit a opět se vrátit zpět, přitom se pohybuje zrychleně, a proto není inerciální vztažnou soustavou. Proto také úvaha v poznámce, v níž jsme předpokládali, že kosmická loď je stále inerciální soustavou, není správná. Správné zůstává pouze první řešení, tzn. že dvojče B bude po návratu mladší než dvojče A. Podrobnější rozbor těchto problémů lze nalézt v literatuře ([83], str. 145).

Paradox dvojčat vyvolával zejména v minulosti řadu polemik a diskusí (viz např. knihu [60], která obsahuje 241 odkazů na literaturu týkající se tohoto tématu). Podstata sporů spočívala v tom, zda dvojče, které v kosmické lodi pohybující se rychlostí blízkou rychlosti světla vykoná cestu ke vzdálené hvězdě a vrátí se nazpět na Zemi, bude skutečně mladší než dvojče, které zůstane na Zemi. Někteří diskutující se domnívali, že věk obou dvojčat musí být po návratu na Zemi stejný, jiní dokonce považovali paradox dvojčat za příklad, který vede k logicky protismyslným výsledkům, a poukazuje tedy na nesprávnost speciální teorie relativity.

Správné vysvětlení paradoxu dvojčat podal již A. Einstein, který poukázal na nesymetrii tohoto příkladu, spočívající v tom, že kosmickou loď pohybující se od Země ke vzdálené hvězdě a nazpět nemůžeme považovat za inerciální vztažnou soustavu. Dnes převážná většina fyziků zastává názor, že rozdílné tempo stárnutí obou kosmonautů je reálná skutečnost, takže dvojče, které vykoná cestu ke vzdálené hvězdě, se vrátí mladší.

Lety ke hvězdám rychlostí blízkou rychlosti světla však nejsou z technického hlediska reálné. K těmto letům chybí vhodný zdroj energie, který je nutný k urychlení a k zpětnému návratu kosmické lodi a navíc je také obtížné řešit problémy, které by vznikaly při srážkách kosmické lodi pohybující se rychlostí blízkou rychlosti světla s mikročásticemi.

---

* Přitom zanedbáváme malá zrychlení Země, která vznikají v důsledku pohybu Země kolem Slunce a její rotace kolem vlastní osy.

► PŘÍKLAD 9

Astronomické objekty, které se nazývají kvazary, se vyznačují velkým posuvem spektrálních čar směrem k červenému konci spektra. U jistého kvazaru bylo měřením zjištěno, že frekvence ν příslušná určité čáře jeho spektra se zmenšila v porovnání s frekvencí téže čáry ν_0, kterou by vysílal nepohybující se zdroj světla, třikrát. Určete, jakou radiální rychlostí se vzdaluje tento kvazar od Země.

Řešení

Mezi frekvencemi ν a ν_0 platí vztah pro podélný Dopplerův jev

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

a dále vztah

$$\nu = \frac{1}{3}\nu_0 \,.$$

Odtud po úpravě dostáváme

$$\beta = \frac{\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 + 1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1} = -0{,}8\,.$$

Záporné znaménko β znamená, že se zdroj světla od pozorovatele vzdaluje. Kvazar se tedy vzdaluje od Země rychlostí $v = 0{,}8c$.

Poznámka Posuv spektrálních čar k delším vlnovým délkám způsobený Dopplerovým jevem se nazývá **rudý posuv.** Rudý posuv astronomických objektů ukazuje, že se náš vesmír rozpíná.

Při výpočtu jsme použili relativistický vztah pro podélný Dopplerův jev. Kdybychom použili klasický vztah

$$\nu = \frac{\nu_0}{1-\beta}\,,$$

dostali bychom po úpravě

$$\beta = 1 - \frac{v_0}{v} = 1 - 3 = -2.$$

Podle klasického vztahu by se tedy daný kvazar vzdaloval od Země dvakrát větší rychlostí než je rychlost světla. Jak však uvidíme později, to není možné, neboť podle speciální teorie relativity se žádný materiální objekt nemůže pohybovat větší rychlostí než je rychlost světla ve vakuu. Teorie relativity tedy lépe vysvětluje vlastnosti vesmíru než klasická fyzika.*

Úlohy

1. Proveďte jednotkovou kontrolu vztahu pro dilataci času $\Delta t = \gamma \Delta t_0$.

2. Na obr. 6-2b je nakreslena poloha světelného signálu v hodinách H′ za zvolenou dobu Δt, za niž světelný signál urazí v hodinách H_1 dráhu od dolního zrcátka k hornímu. Nakreslete tento obrázek za předpokladu, že hodiny H_1 „ukazují" čas a) poloviční, b) dvojnásobný v porovnání s dobou Δt. Rychlost $\boldsymbol{v}$ vztažné soustavy K′ vzhledem k vztažné soustavě K volte v obou případech stejně jako na obr. 6-2b.

3. Podle obr. 6-2b zjistěte, jakou rychlostí $\boldsymbol{v}$ se pohybují světelné hodiny H′ vzhledem k soustavě K. Nakreslete tento obrázek také za předpokladu, že hodiny H′ se pohybují vzhledem k soustavě K rychlostí v_1 větší než $v\,(c > v_1 > v)$. Dobu Δt, kterou ukazují synchronizované hodiny H_1 a H_2, volte stejnou jako na obr. 6-2b. Jaký závěr vysloví pozorovatel v soustavě K o závislosti chodu hodin H′ na jejich rychlosti?

4. Dokažte, že světelné hodiny se nemohou pohybovat rychlostí světla nebo rychlostí větší, než je rychlost světla. K důkazu využijte obr. 6-2b a princip relativity, z něhož vyplývá, že pro pozorovatele v soustavě K′ světelný signál v hodinách H′ se při libovolné rychlosti těchto hodin musí pohybovat po jejich ose a odrážet od obou zrcadel právě tak jako např. na Zemi.

5. Určete periodu a frekvenci světelných hodin o délce $l_0 = 5$ cm: a) v jejich klidové inerciální soustavě K′, b) v inerciální vztažné soustavě K, vzhledem k níž se hodiny pohybují rychlostí $0{,}7c$.

6. Nakreslete obr. 6-2b za předpokladu, že světelné hodiny mají délku 10 cm a pohybují se vzhledem k soustavě K rychlostí $0{,}7c$. Obrázek nakreslete opět pro okamžik (z hlediska soustavy K), v němž světelné signály v hodinách H_1 a H_2 poprvé dorazily k horním zrcátkům. Užitím narýsovaného obrázku pak určete přibližnou hodnotu Lorentzova koeficientu $\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t'}$ odpovídající dané rychlosti v a porovnejte ji s hodnotou určenou výpočtem a použitím tabulek.

7. Stejným způsobem jako v předcházejícím příkladu určete hodnoty Lorentzova koeficientu odpovídající rychlostem o velikostech $v_1 = 0{,}1\,c$, $v_2 = 0{,}2c$, atd. až $v_9 = 0{,}9c$. Získané hodnoty porovnejte s hodnotami určenými podle tabulky nebo vypočtenými na kapesní počítačce. Polohy hodin H′ kreslete na milimetrový papír do jednoho obrázku.

8. Jistý fyzikální děj odehrávající se na tomtéž místě dané klidové vztažné soustavy byl pozorován v několika inerciálních vztažných soustavách pohybujících se v témže směru různými rychlostmi. Přitom byly naměřeny tyto doby trvání děje v různých vztažných soustavách K_1 až K_6:

$K_1 \dots 10{,}5$ s	$K_4 \dots 9{,}8$ s
$K_2 \dots 10{,}2$ s	$K_5 \dots 12{,}2$ s
$K_3 \dots 12{,}0$ s	$K_6 \dots 10{,}7$ s

Která ze soustav byla vzhledem k danému fyzikálnímu ději klidová? Která se vzhledem ke klidové soustavě pohybovala nejrychleji?

9. Kosmonaut vyřešil určitý matematický úkol na Zemi za 10 min. Za jakou dobu by vyřešil tento úkol týž kosmonaut na kosmické lodi pohybující se vzhledem k Zemi rychlostí o velikosti $v = 0{,}97c$? Jak dlouho řešil tuto úlohu kosmonaut na kosmické lodi z hlediska pozorovatele na Zemi?

10. V kosmické lodi pohybující se vzhledem k Zemi rychlostí $v = 2{,}6 \,.\, 10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ probíhal určitý děj. Podle hodin pozorovatele na Zemi trval tento děj 5 min. Jaký je vlastní čas uvažovaného děje?

11. V laboratoři bylo zjištěno, že střední doba života částic pohybujících se rychlostí $0{,}96c$ je 1,0 ns. Jaká je střední doba života částic v jejich klidové soustavě?

12. V kosmické lodi pohybující se vzhledem k Zemi probíhal děj, který pro pozorovatele na lodi trval Δt_0. Pro pozorovatele na Zemi trval děj probíhající na kosmické lodi dvojnásobnou dobu $2\Delta t_0$. Jakou rychlostí se pohybuje kosmická loď vzhledem k Zemi?

13. Kosmická loď letí ke hvězdě vzdálené 4 světelné roky stálou rychlostí $0{,}8c$ vzhledem k Zemi. Jak dlouho bude trvat cesta na hvězdu pro pozorovatele na Zemi a pro cestovatele na lodi?

14. Lze pomocí Dopplerova jevu rozlišit, zda se pohybuje zdroj světla k pozorovateli, nebo pozorovatel ke zdroji světla?

15. Vysílač na kosmické lodi pohybující se vzhledem k Zemi rychlostí $0{,}7c$ vysílal elektromagnetické vlny o vlnové délce 21 cm (odpovídající frekvenci 1,43 GHz). Jakou vlnovou délku a frekvenci vln zjistí pozorovatel na Zemi? Předpokládáme, že v okamžiku příjmu elektromagnetických vln je přímka spojující pozorovatele s kosmickou lodí kolmá k vektoru její rychlosti.

* Pro studium vlastností vesmíru je nutná znalost tzv. obecné teorie relativity. Podle této teorie užití speciální teorie relativity na rudý posuv kvazarů není zcela korektní.

16. Jakou rychlostí se od nás vzdaluje galaxie, jestliže spektrální čára vodíku $\lambda_0 = 434$ nm je v jejím spektru posunuta o $\Delta\lambda = 130$ nm směrem k červenému konci spektra?

17. Fyzik přejel autem přes křižovatku v okamžiku, kdy na semaforu svítilo červené světlo. Když ho zastavil policista, vymlouval se, že jel tak rychle, že v důsledku Dopplerova jevu červené signální světlo ($\lambda_0 \doteq 700$ nm) se mu jevilo jako zelené ($\lambda \doteq 550$ nm). Vypočtěte, jakou rychlostí by se muselo jeho auto pohybovat.

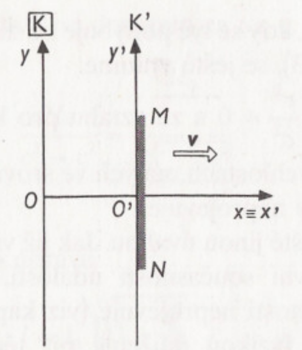
7 KONTRAKCE DÉLEK

Hovoříme-li o měření délky, obvykle si přitom představujeme proces, který nemá nic společného s měřením času. Každý ví, že k měření délky nepotřebujeme hodiny, ale např. tyčové měřidlo.

Tato představa je skutečně správná, ale jen pro měření délky předmětu, který je vzhledem k pozorovateli v klidu (např. při měření průměru válečku posuvným měřidlem). Jak jsme již poznali v kap. 1 (viz čl. 1.3, př. 3), při měření délky tyče pohybující se vzhledem k soustavě K je třeba v této soustavě vyznačit **současnou** polohu koncových bodů tyče; pojem „délka pohybujícího se předmětu" tedy úzce souvisí s pojmem „současnost událostí", a tím i s pojmem času.

Vytvoření dvou značek M a N na ose x soustavy K, které vyznačují současnou polohu koncových bodů pohybující se tyče (viz obr. 1-6), jsou však dvě události současné jen z hlediska pozorovatele v soustavě K; tyto události již nejsou současné z hlediska pozorovatelů v jiných inerciálních vztažných soustavách K_1, K_2, K_3 atd., které by se pohybovaly ve směru osy x různými rychlostmi. Obě události nejsou rovněž současné v klidové soustavě K′ tyče. Pozorovatelé v těchto soustavách, kteří by sledovali vytváření značek v soustavě K, by konstatovali, že značky M a N na ose x soustavy K nebyly vytvořeny současně, ale postupně za sebou, a v důsledku toho by nepovažovali vzdálenost MN za délku tyče ve svých soustavách.

Předpokládejme však, že kterýkoli z těchto pozorovatelů (např. pozorovatel v libovolně zvolené inerciální soustavě K_n) se sám rozhodne změřit délku uvažované tyče, a proto vyznačí současné polohy koncových bodů tyče ve své soustavě K_n. Vytvoření dvou značek označujících současnou polohu koncových bodů tyče na ose x soustavy K_n jsou však nyní dvě události, které jsou současné jen v soustavě K_n a nejsou již současné v ostatních soustavách.



Obr. 7-3

v libovolné inerciální soustavě K není současné z hlediska pozorovatelů v jiných inerciálních soustavách pohybujících se ve směru osy x. Pohybuje-li se však tyč kolmá k ose x ve směru této osy (viz obr. 7-3), pak současný záznam poloh koncových bodů tyče v inerciální soustavě K je současný i z hlediska pozorovatelů v jiných inerciálních soustavách pohybujících se ve směru osy x (viz kap. 5, př. 4). To je také důvod, proč kontrakce délek v tomto případě nenastává a pozorovatelé v různých soustavách by naměřili u téže tyče stejnou délku. **Rozměry tělesa pohybujícího se ve směru osy x, kolmé k vektoru jeho rychlosti, se nezkracují.**

► PŘÍKLAD 1

Na kosmické lodi vzdalující se od Země konstantní rychlostí je umístěna ve směru pohybu tyč o vlastní délce 1 m.

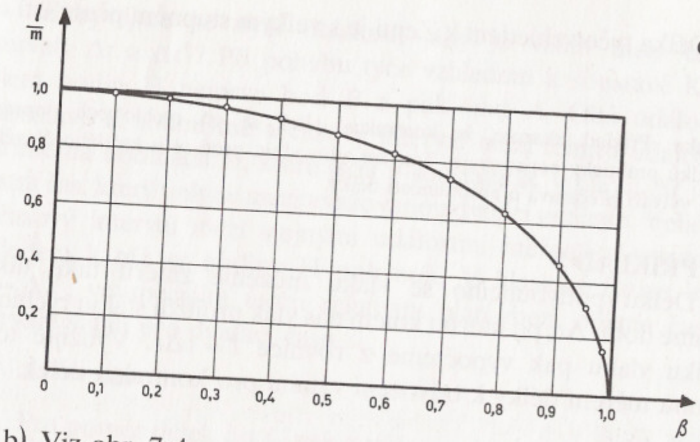
a) Jaká je délka této tyče pro pozorovatele na Zemi, jestliže se loď vzdaluje od Země rychlostí $0{,}1c$?

b) Sestrojte na milimetrovém papíru graf vyjadřující funkci $l = f(\beta);\ \beta = \dfrac{v}{c},\ 0 \leq v < c$.

c) Je možné, aby tyč, která má na kosmické lodi délku 1 m, měla pro pozorovatele na Zemi délku 1 mm?

Řešení

a) Vlastní délka tyče je $l_0 = 1$ m; délka téže tyče vzhledem k Zemi je $l = \dfrac{1}{\gamma} l_0 = 0{,}995 \,.\, 1\,\text{m} = 0{,}995$ m.



Obr. 7-4

b) Viz obr. 7-4.

c) Z rovnice $l = \dfrac{1}{\gamma} l_0$, kde $l = 10^{-3}$ m a $l_0 = 1$ m, dostáváme $\gamma = \dfrac{l_0}{l} = \dfrac{1\ \text{m}}{10^{-3}\ \text{m}} = 10^3$ a použitím tabulek pak $1 - \dfrac{v}{c} = 5 \,.\, 10^{-7}$. Odtud vyplývá $v = c - 5 \,.\, 10^{-7} c \doteq c - 1{,}5 \,.\, 10^2\ \text{m} \,.\, \text{s}^{-1}$.

Tyč, která má na kosmické lodi délku 1 m, má vzhledem k Zemi délku 1 mm, pohybuje-li se rychlostí jen o 150 m . s^{-1} menší, než je rychlost světla.

Poznámka Z příkladu je patrné, že kontrakce délek se při rychlostech blízkých rychlosti světla projevuje velmi výrazně; tak velkých rychlostí však prozatím nelze u makroskopických těles (např. u raket) dosáhnout.

► PŘÍKLAD 2

V letadle letícím rychlostí 1 000 km . h^{-1} leží ve směru jeho letu tyč o vlastní délce 1 m. Jaká je délka této tyče vzhledem k Zemi?

Řešení

Pro rychlost $v = 1\,000\ \text{km} \,.\, \text{h}^{-1} \doteq 0{,}3\ \text{km} \,.\, \text{s}^{-1} \doteq 10^{-6} c$ dostáváme podle tabulek $\dfrac{1}{\gamma} = 1 - 5 \,.\, 10^{-13}$; hledaná délka l je tedy $l = \dfrac{1}{\gamma} l_0 = (1 - 5 \,.\, 10^{-13}) \,.\, 1\ \text{m} = 0{,}999\,999\,999\,999\,5\ \text{m} \doteq 1\ \text{m}$.

Délka tyče vzhledem k Zemi je s velkým stupněm přesnosti opět 1 m.

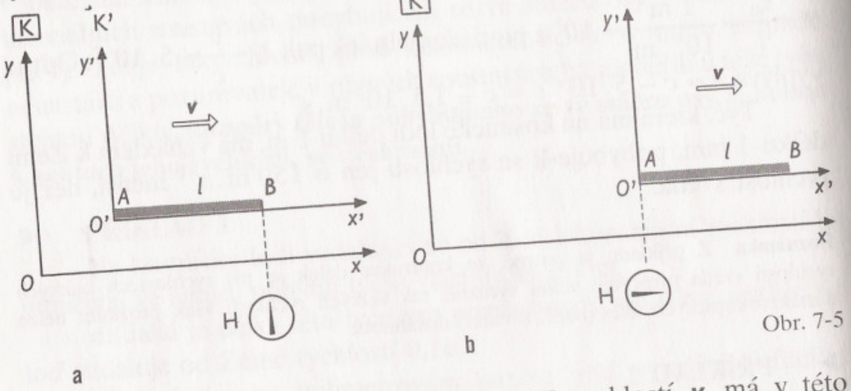
Poznámka Příklad ukazuje, že kontrakce délek se při rychlostech dopravních prostředků prakticky neprojevuje. Tím lze zdůvodnit, proč se u každého člověka již v mládí vytváří představa o absolutnosti délky.

▶ PŘÍKLAD 3

Délku pohybujícího se vlaku můžeme změřit také tak, že změříme dobu Δt, po kterou kolem nás vlak projíždí stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$, a délku vlaku pak vypočteme z rovnice $l = v\Delta t$. Využijte tohoto způsobu měření délky k odvození vztahu pro kontrakci délek.

Řešení

Označme vztažnou soustavu, v níž je pozorovatel s hodinami H, symbolem K, a klidovou vztažnou soustavu tyče K′ (obr. 7-5). Tyč,



Obr. 7-5

která se pohybuje vzhledem k soustavě K rychlostí $\boldsymbol{v}$, má v této soustavě délku

$$l = v\Delta t.$$

Z hlediska pozorovatele v soustavě K′ je tyč v klidu a hodiny H se pohybují od bodu B k bodu A rychlostí $-\boldsymbol{v}$; přitom urazí dráhu

$$l_0 = v\Delta t',$$

kde l_0 je vlastní délka tyče.

Zabývejme se nyní otázkou, jaký je vztah mezi časovými intervaly Δt a $\Delta t'$? Při pohybu tyče vzhledem k soustavě K projde kolem hodin H nejprve bod B a pak bod A. Obě události jsou v soustavě K soumístné a časový interval mezi těmito událostmi Δt měříme na hodinách H, které jsou v soustavě K v klidu; Δt je proto vlastní čas, který uplyne mezi uvažovanou dvojicí událostí. Veličina $\Delta t'$ je časový interval mezi stejnými událostmi měřený v soustavě K′, vzhledem k níž se hodiny H pohybují. V klasické fyzice by bylo $\Delta t = \Delta t'$, ve speciální teorii relativity platí mezi oběma časovými intervaly vztah pro dilataci času

$$\Delta t' = \gamma \Delta t\,.$$

Pro poměr délek l a l_0 pak z výše uvedených rovnic dostáváme

$$\frac{l}{l_0} = \frac{v\Delta t}{v\Delta t'} = \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{1}{\gamma}$$

a odtud

$$l = \frac{1}{\gamma} l_0 = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Poznámka Z příkladu vyplývá, že i při odlišných způsobech měření délky tyče dostaneme tentýž vztah pro kontrakci délek.

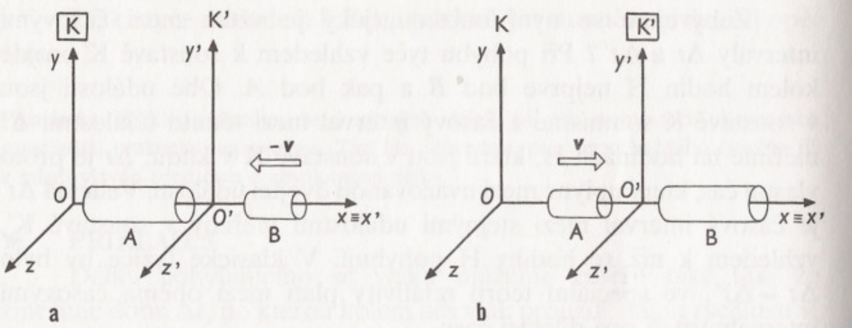
▶ PŘÍKLAD 4

Jak již víme, neprojevuje se kontrakce u příčných rozměrů tělesa. Dokažte tento poznatek myšlenkovým pokusem s užitím principu relativity.

Řešení

Předpokládejme, že dvě stejné trubice A a B s velmi tenkými stěnami se pohybují proti sobě rovnoměrně přímočaře tak, že jejich osy splývají.

Z hlediska pozorovatele v klidové soustavě K trubice A se trubice B pohybuje rychlostí $-\boldsymbol{v}$ (obr. 7-6a). Předpokládejme, že u příčných rozměrů pohybující se trubice B nastane kontrakce, takže



Obr. 7-6

poloměr trubice B bude v soustavě K menší než poloměr trubice A. V tomto případě by trubice B prošla vnitřkem trubice A.

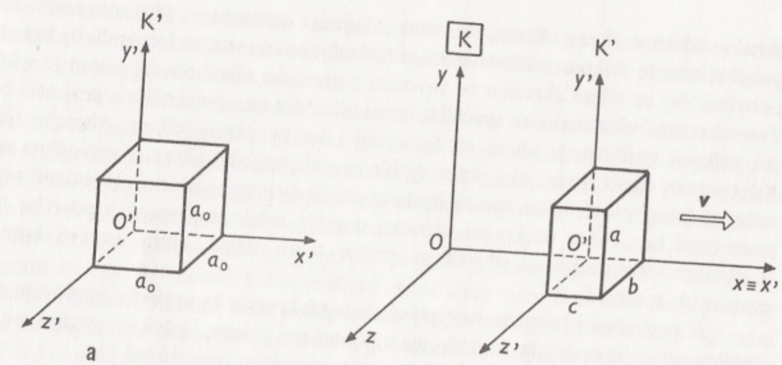
V klidové soustavě K′ trubice B se trubice A pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ (obr. 7-6b). Z principu relativity vyplývá, že stejná kontrakce příčných rozměrů by musela nyní nastat u trubice A, a proto by tato trubice prošla vnitřkem trubice B. To však není možné, neboť myšlenkový pokus s oběma trubicemi musí mít zcela jednoznačný výsledek.

Analogicky dokážeme, že není možné, aby se příčné rozměry trubice pohybující se vzhledem k pozorovateli v jeho vztažné soustavě zvětšily. Odtud vyplývá, že příčné rozměry obou těles musí při jejich vzájemném pohybu zůstat stejné.

Poznámka Čtenář může vyslovit pochybnost, zda závěry z myšlenkových pokusů, které z technických důvodů nelze realizovat, jsou dostatečně hodnověrné. Albert Einstein se k této otázce vyjádřil takto: „Myšlenkový pokus je nepřípustný jen tehdy, jestliže jeho uskutečnění není možné v principu.“ ([14] str. 376). Připomeňme, že A. Einstein ve svých pracích z teorie relativity a kvantové fyziky myšlenkové pokusy často používal.

► PŘÍKLAD 5

Těleso, které má v klidové soustavě tvar krychle, se pohybuje ve směru osy x rovnoměrně přímočaře rychlostí $\boldsymbol{v}$ kolmou na stěnu krychle. Velikost rychlosti krychle je $v = 0{,}95c$, klidová délka její hrany $a_0 = 1$ m. Určete objem tělesa ve vztažné soustavě K, vzhledem k níž se těleso pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$.



Obr. 7-7

Řešení

Krychle má v klidové vztažné soustavě K′ objem $V_0 = a_0^3$ (obr. 7-7a). Hrana tělesa ve směru jeho pohybu je v soustavě K kratší než v soustavě K′ a u příčných rozměrů kontrakce nenastává. Z hlediska pozorovatele v soustavě K je tedy pohybující se těleso kvádr o objemu $V = abc$ (obr. 7-7b). Poněvadž $a = a_0$, $b = a_0$ a $c = \frac{1}{\gamma}a_0$, je hledaný objem kvádru $V = abc = \frac{1}{\gamma}a_0^3 = \frac{1}{\gamma}V_0 = 0{,}312\ \mathrm{m}^3$.

Poznámka Z příkladu vyplývá, ža **tvar tělesa a jeho objem jsou vzhledem k volbě vztažné soustavy relativní.** Např. těleso, které má v klidové soustavě tvar koule, má v inerciální soustavě, vzhledem k níž se pohybuje velkou rychlostí, tvar elipsoidu.

Zajímavé je, zda by kosmonaut **viděl** změněný tvar těles tak, jak to vyplývá ze speciální teorie relativity, a zda je možné alespoň principiálně zachytit tento změněný tvar na fotografii. Tyto otázky byly vysvětleny až kolem roku 1960, tj. několik desítek let po vzniku speciální teorie relativity.

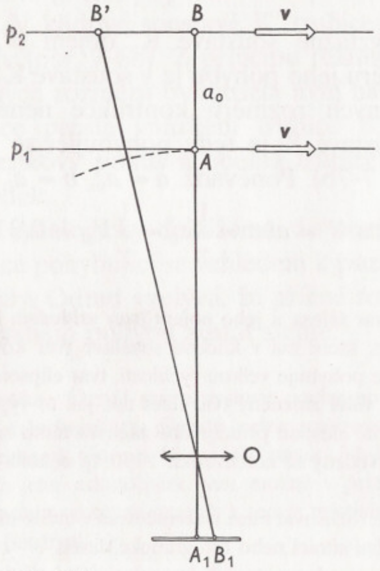
Při diskusi těchto otázek musíme rozlišovat mezi **tvarem tělesa** v určité inerciální soustavě a **obrazem** tohoto tělesa na oční sítnici nebo fotografické desce.

Tvar tělesa pohybujícího se vzhledem k soustavě K lze principiálně zjistit tak, že v této soustavě současně zaznamenáme okamžité polohy jednotlivých bodů ležících na jeho povrchu. Tento záznam by např. ukázal, že koule pohybující se vzhledem k soustavě K má v této soustavě tvar elipsoidu, krychle pohybující se kolmo k své stěně má tvar kvádru apod.

Obraz tělesa na fotografické desce (nebo sítnici) je vyvolán světlem, které na desku dopadne v určitém okamžiku; toto světlo bylo však z povrchu tělesa emitováno v různých okamžicích, neboť jednotlivé body jeho povrchu jsou od fotografické desky různě vzdáleny. Lze ukázat, že tato okolnost způsobuje při zobrazení tělesa pohybujícího se velkou rychlostí určité zkreslení jeho obrazu; na fotografii by byl obraz pohybujícího se tělesa zkreslen ve srovnání s obrazem téhož tělesa, pokud je v klidu. Toto zkreslení však nemá se speciální teorií relativity nic společného a projevilo by se při velkých rychlostech tělesa na fotografii i kdyby platily zákony klasické fyziky. Kdybychom chtěli zjistit, jaký obraz rychle se pohybujícího tělesa se vytvoří na sítnici nebo na fotografické desce, museli bychom uvážit dva jevy: klasické „zkreslení" obrazu způsobené tím, že na desku při expozici dopadá světlo emitované z povrchu tělesa v různých okamžicích, a objektivní změnu tvaru tělesa, která nastává kontrakcí podélných rozměrů.

Z podrobnějšího rozboru vyplývá, že např. krychle by se při fotografování z větší vzdálenosti jevila opět jako krychle, ale v pootočené poloze, i když ve vztažné soustavě, vzhledem k níž se pohybuje, má objektivně tvar kvádru (viz příklad 6).

Podstatu jevu, který jsme nazvali „zkreslení" obrazu na fotografii a který není relativistický jev, lze dobře pochopit z pokusu znázorněného na obr. 7-8. Předpoklá-



Obr. 7-8

dejme, že dva svítící body A a B, pohybující se stejnou relativistickou rychlostí $\boldsymbol{v}$ po rovnoběžných přímkách p_1 a p_2, fotografujeme fotografickým přístrojem, jehož optická osa je totožná s přímkou AB a kolmá k přímkám p_1 a p_2. Za určitou dobu dorazí světlo vysílané bodem A do objektivu O; předpokládejme, že právě v tomto okamžiku t se na nekonečně krátkou dobu otevře závěrka fotografického přístroje; na fotografické desce se vytvoří obraz A_1 bodu A. Oba body se mezitím posunou napravo, což však není pro

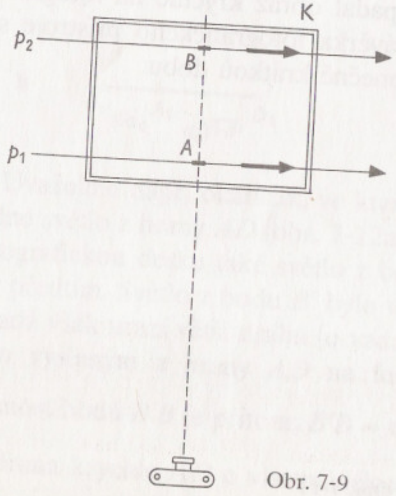
naši úvahu podstatné. Podstatnější však je, že světlo z bodu B se na fotografickou desku nedostane, neboť musí urazit delší dráhu BO než světlo z bodu A a k objektivu dorazí v okamžiku, kdy již je závěrka zavřena.

Je však zřejmé, že v okamžiku t dorazí k objektivu současně se světlem z bodu A také světlo vyslané z polohy B', v níž byl zdroj světla B krátce předtím. Světlo z polohy B' bylo vysláno dříve než světlo z bodu A, poněvadž však urazilo větší dráhu $B'O$, dorazilo se světlem vyslaným z bodu A k objektivu současně a vytvořilo na fotografické desce obraz B_1. Při fotografování se tedy na desce objeví dva obrazy A_1 a B_1 bodů A a B, které však nebudou v zákrytu, jak bychom při prvním pohledu na obr. 7-8 očekávali. Fotografií úsečky AB kolmé k fotografické desce není tedy bod, ale úsečka A_1B_1. Získanou fotografii můžeme tedy interpretovat tak, že pohybující se úsečka AB není kolmá k fotografické desce, ale je poněkud pootočena. V případě, který jsme zvolili na obr. 7-8, kontrakce úsečky AB kolmé k vektoru její rychlosti nenastává, takže celá úvaha by platila i v relativistické fyzice.

Vzdálenost $B'B$ lze snadno vypočítat. Jak jsme již uvedli, světlo, které bylo vysláno z polohy B', urazilo větší dráhu ($B'O > AO$), proto muselo být vysláno dříve než světlo z bodu A o časový interval odpovídající rozdílu drah $B'O$ a AO. Při velké vzdálenosti fotografického přístroje od fotografované úsečky je $B'O - AO \doteq a_0$. Světlo tedy bylo vysláno z bodu B' dříve o časový interval

$$\Delta t = \frac{B'O - AO}{c} \doteq \frac{a_0}{c};$$

vzdálenost bodů $B'B$ je tedy $B'B = v\Delta t = v\dfrac{a_0}{c} = \beta a_0$. Je-li $v \ll c$, je $\beta = \dfrac{v}{c} \doteq 0$ a $B'B \doteq 0$.



Obr. 7-9


Obr. 7-10

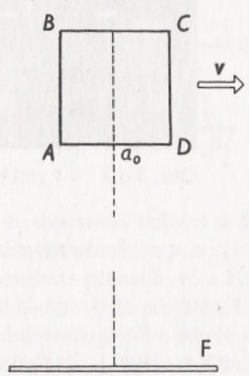
Tím lze vysvětlit, proč pootočení obrazu nastává jen při velkých rychlostech v ve srovnání s rychlostí světla.

Pro čtenáře bude jistě překvapením, že se popisovaný experiment s fotografováním úsečky AB pohybující se relativistickou rychlostí podařilo uskutečnit ([16] str. 201, [93]). Pohybující se svítící „body" byly realizovány mimořádně krátkým světelným zábleskem laseru, jehož světlo se rozdělilo na dva signály A a B. Oba signály pohybující se v horizontální rovině pak procházely skleněnou kyvetou K naplněnou vodou s malou příměsí mléka (obr. 7-9). Mléko poněkud rozptyluje světlo do stran, čímž umožňuje fotografování obou signálů ve směru kolmém k jejich pohybu. Poněvadž záblesk trval pouze po dobu $\tau = 10^{-11}$ s a světlo se ve vodě šíří rychlostí $c_1 \doteq 2.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$, byla délka světelných signálů ve vodě $d = c_1\tau = 2.10^8.10^{-11}\ \mathrm{m} = 2.10^{-3}\ \mathrm{m} = 2\ \mathrm{mm}$. Závěrka fotografického přístroje byla založena na optickém principu a otvírala se užitím téhož impulsu z laseru na velmi krátkou dobu 10^{-11} s.

Reprodukce této fotografie je na obr. 7-10. Krátké světelné signály o délce 2 mm pohybující se ve vodě rychlostí $2.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$ se na fotografii jakoby „zastavily" a podle očekávání se nepřekrývají, ačkoliv úsečka AB ležela při fotografování v optické ose fotografického přístroje. Snímek je pozoruhodný také tím, že se poprvé podařilo vyfotografovat světlo za pohybu.

▶ PŘÍKLAD 6

Těleso, které má v klidové soustavě tvar krychle, se pohybuje ve směru kolmém na svou stěnu rychlostí $v = 0{,}5c$. Krychli fotografujeme z větší vzdálenosti v okamžiku, kdy optická osa fotografického přístroje prochází středem krychle a je kolmá k vektoru její rychlosti (obr. 7-11). Určete, jak by vypadal obraz krychle na fotografickém snímku. Předpokládáme, že závěrka fotografického přístroje se při fotografování otevřela na nekonečně krátkou dobu.

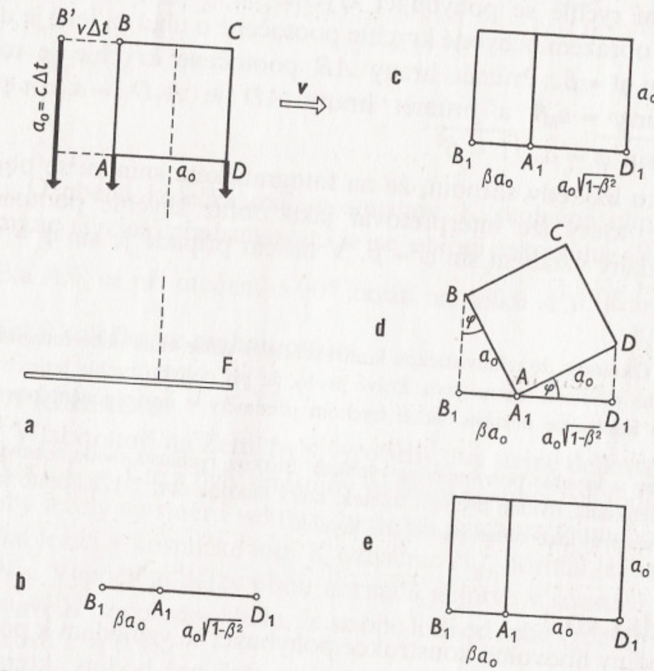


Obr. 7-11

Řešení

Z předcházejícího příkladu již víme, že světlo, které při fotografování krychle dopadne na fotografickou desku v daném okamžiku, bylo emitováno z povrchu krychle v různých okamžicích, neboť jednotlivé body povrchu krychle jsou od fotografické desky různě vzdáleny.

Obr. 7-12



Uvažujme např. okamžik, ve kterém na fotografickou desku F dopadne světlo z hrany AD (obr. 7-12a). V tomto okamžiku dopadne na fotografickou desku také světlo z bodu B', ve kterém byl bod B krátce předtím. Světlo z bodu B' bylo vysláno dříve než z hrany AD, poněvadž však urazí větší dráhu (o vzdálenost $a_0 = c\Delta t$), dopadne se světlem vyslaným z hrany AD na fotografickou desku současně. Vzdálenost bodů $B'B$ je přitom: $B'B = v\Delta t = v\dfrac{a_0}{c} = \beta a_0$.

Hrana krychle AD o vlastní délce a_0 se v důsledku kontrakce délek jeví při fotografování jako úsečka o délce $a = a_0\sqrt{1-\beta^2}$. Dolní podstava $ABCD$ krychle by se tedy jevila pozorovateli tak, jak je to znázorněno na obr. 7-12b. Celkový vzhled krychle při jejím fotografování za daných podmínek ukazuje obr. 7-12c.

Tento obraz lze interpretovat zajímavým způsobem. Z obr. 7-12b a 7-12d je vidět, že obraz, který se zaznamená při fotografování rychle se pohybující krychle na fotografickou desku, je totožný s obrazem nehybné krychle pootočené o úhel φ, jenž je dán vztahem $\sin\varphi = \beta$. Průmět hrany AB pootočené krychle je totiž $A_1B_1 = a_0 \sin\varphi = a_0\beta$ a průmět hrany AD je $A_1D_1 = a_0 \cos\varphi = = a_0\sqrt{1-\sin^2\varphi} = a_0\sqrt{1-\beta^2}$.

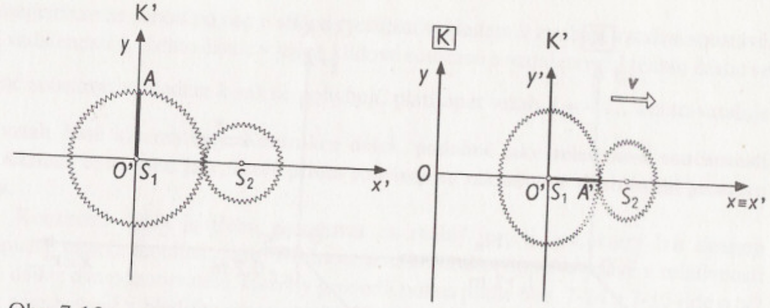
Vcelku lze tedy shrnout, že na fotografickém snímku se objeví obr. 7-12c, který lze interpretovat jako obraz krychle pootočené o úhel φ, daný vztahem $\sin\varphi = \beta$. V našem případě je $\sin\varphi = 0{,}5$, a proto $\varphi = 30°$.

Poznámka Okolnost, že relativistickou kontrakci délek nelze vidět nebo fotografovat, nemění nic na reálnosti tohoto jevu. Právě proto, že při pohybu rychle letících těles relativistická kontrakce nastává, viděli bychom předměty v nezměněném tvaru, ale pootočené.

Kdyby u krychle pohybující se rychlostí blízkou rychlosti světla relativistická kontrakce nenastala, uviděli bychom snímek, který ukazuje obr. 7-12e. Tento snímek nelze interpretovat jako obraz pootočené krychle.

▶ PŘÍKLAD 7

Hodiny libovolné konstrukce pohybující se vzhledem k pozorovateli jdou z hlediska pozorovatele pomaleji než hodiny, které jsou vzhledem k němu v klidu. Proti tomuto poznatku však vyslovil student následující námitku. Předpokládejme, že od inerciální soustavy K se relativistickou rychlostí $\boldsymbol{v}$ vzdalují náramkové hodiny. Dvě sousední ozubená hodinová kolečka mají v klidové soustavě K′ kruhový tvar (obr. 7-13a); v soustavě K však mají v důsledku kontrakce podélných rozměrů tvar eliptický (obr. 7-13b). Eliptická ozubená „kolečka" na obr. 7-13b se však nemohou otáčet; pohybující se náramkové hodiny nepůjdou tedy pomaleji, ale zastaví se. Vysvětlete, proč je studentův názor nesprávný.



Obr. 7-13

Řešení

Ozubená kolečka mají v soustavě K skutečně eliptický tvar; nesmíme si však představovat, že se otáčejí jako tuhá tělesa. Např. úsečka AS_1 se při otočení o 90° zkrátí na délku $A'S'_1 = \frac{1}{\gamma}AS_1$ a obě eliptická kolečka se mohou otáčet.

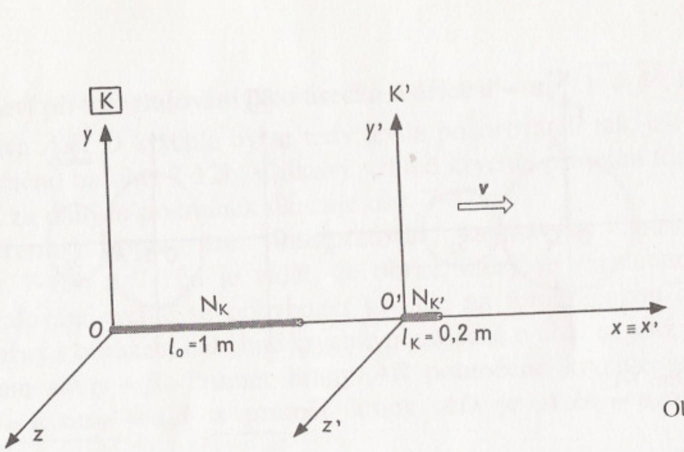
▶ PŘÍKLAD 8

V laboratoři na Zemi byly vyrobeny dva stejné délkové normály o délkách $l_0 = 1$ m a byly umístěny ve dvou kosmických lodích K a K′ tak, aby ležely ve směru vektoru rychlosti jejich vzájemného pohybu. Normál ležící v kosmické lodi K označme N_K, normál ležící v druhé lodi $N_{K'}$. Vypočtěte délky obou normálů nejprve v soustavě K a pak v soustavě K′, za předpokladu, že se obě lodi od sebe vzdalují rychlostí o velikosti $v = 0{,}98c$.

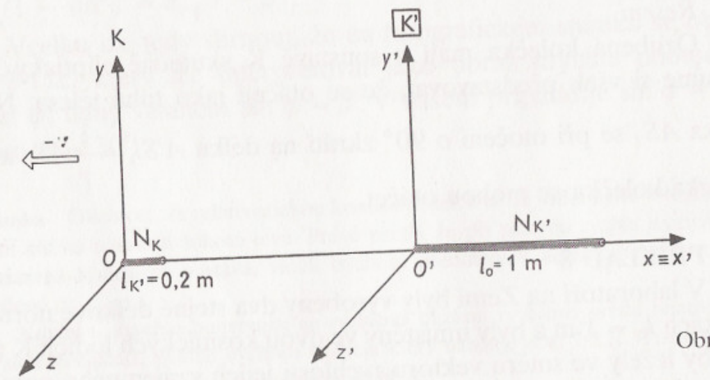
Řešení

Délky normálů v soustavě K (obr. 7-14). Vzhledem k soustavě K je normál N_K v klidu, a proto podle principu relativity musí mít v této soustavě stejnou délku $l_0 = 1$ m jako v zemské laboratoři. Normál $N_{K'}$ se vzhledem ke kosmické lodi K pohybuje rychlostí $v = 0{,}98c$, a proto má v této vztažné soustavě délku $l_K = \frac{1}{\gamma}l_0 \doteq \frac{1}{5}\,1\text{ m} = 0{,}2$ m.

Délky normálů v soustavě K′ (obr. 7-15). Vzhledem k soustavě K′ je v klidu normál $N_{K'}$ a má v této soustavě délku $l_0 = 1$ m. Nor-



Obr. 7-14



Obr. 7-15

mál N_K se pohybuje vzhledem ke kosmické lodi K′ rychlostí $-\boldsymbol{v}$ a má v této vztažné soustavě délku $l_{K'} = \frac{1}{\gamma} l_0 \doteq \frac{1}{5}\, 1\ \mathrm{m} = 0{,}2\ \mathrm{m}$.

Poznámka Bylo by nesprávné přirovnávat kontrakci délky tyče pohybující se vzhledem k pozorovateli např. k deformaci tělesa, která vzniká působením vnější síly, nebo k smršťování tělesa při jeho ochlazování. Nesprávnost této představy je patrná již z toho, že např. tyč $N_{K'}$, která má v soustavě K délku 0,2 m (obr. 7-14), má v soustavě K′ délku 1 m (obr. 7-15). Změna délky tělesa při jeho deformaci způsobené vnějšími silami nebo změnou teploty je závislá na vnitřní částicové struktuře tělesa, a proto se projevuje i za jinak stejných podmínek u těles z různých látek různě; relativistická kontrakce však nastává u všech těles nezávisle na tom, z jaké látky byla zhotovena a jaká je jejich konkrétní vnitřní struktura; přitom vždy platí stejný vztah $l = \frac{1}{\gamma} l_0$.

Kontrakce délek se neprojevuje jen u pohybujících se těles, ale také u dvou částic

pohybujících se za sebou po ose x stálou rychlostí vzhledem k zvolené vztažné soustavě. Mezi vzdáleností l_0 těchto částic v jejich klidové soustavě a vzdáleností l těchto částic ve vztažné soustavě, vzhledem k níž se pohybují, platí opět vztah $l = \frac{1}{\gamma} l_0$. Tento vztah je tedy vztah čistě kinematický. **Kontrakce délek, podobně jako relativnost současnosti nebo dilatace času, jsou jevy, které přímo souvisejí se základními vlastnostmi prostoru a času.**

Kontrakci délek je třeba považovat za reálný jev, tj. jev, který lze alespoň principiálně experimentálně zjistit. Reálnost jevu kontrakce spočívá právě v relativnosti pojmu délky; dva pozorovatelé, kteří by provedli pokus podle obr. 7-14 a 7-15 (jde o týž pokus posuzovaný z hlediska dvou vztažných soustav), by skutečně zjistili různé délky obou normálů.

▶ PŘÍKLAD 9

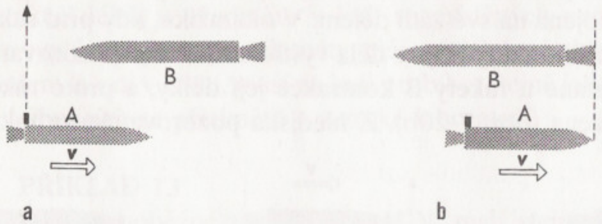
Student studující speciální teorii relativity se k výsledku předcházejícího příkladu vyjádřil takto: „Není možné, aby podle pozorovatele v soustavě K byla tyč N_K **delší** než $N_{K'}$ (obr. 7-14) a podle pozorovatele v soustavě K′ byla tatáž tyč N_K **kratší** než $N_{K'}$ (obr. 7-15) — v těchto tvrzeních je logický rozpor. Tato tvrzení také odporují výsledkům geometrie; narýsujeme-li dvě úsečky AB a $A'B'$, nemůže současně platit $AB > A'B'$ a $AB < A'B'$." Vysvětlete, proč je studentův názor nesprávný.

Řešení

Při porovnávání délek tyčí v př. 8 se nelze bezprostředně opírat o poznatky z geometrie, neboť v geometrii porovnáváme velikosti **nepohybujících se** úseček, zatímco v předcházejícím příkladu jsme porovnávali délky dvou navzájem se **pohybujících** těles. Mezi oběma případy je podstatný rozdíl; porovnání délek nepohybujících se předmětů nevyžaduje žádná časová měření nebo časové údaje, naproti tomu při porovnávání délek dvou vzájemně se pohybujících těles je třeba ve zvolené vztažné soustavě vyznačit současnou polohu koncových bodů; při tomto měření se tedy setkáváme s dvojicí současných událostí. Relativnost pojmu současnost pak vede k relativnosti délky tělesa; délku pohybujícího se tělesa již nemůžeme vztahovat jen k tělesu, jehož délku měříme, ale také k vztažné soustavě, v níž byla délka měřena a vzhledem k níž byly vyznačeny současné polohy koncových bodů. Jedno a totéž těleso má v různých vztažných soustavách různé délky.

vystřeleno. Podle výše citované věty jsou obě události současné. Současnost událostí je však relativní pojem, proto musíme určit vztažnou soustavu, v níž jsou obě události současné. V příkladu 14 tato soustava nebyla určena, a tím vznikl mezi obr. 7-20b a 7-20c rozpor.

Abychom tuto chybu odstranili, předpokládejme např., že obě události 1 a 2 jsou současné ve vztažné soustavě rakety A, tj. v okamžiku (z hlediska pozorovatele na raketě A), kdy příď rakety A je na úrovni zádi rakety B, je z děla vystřeleno. Pak vzhledem ke kontrakci délky rakety B nastane situace, která je zakreslena na obr. 7-20b, tj. raketa B nebude zasažena. Poněvadž však obě uvažované události jsou současné z hlediska pozorovatele na raketě A, nejsou současné z hlediska pozorovatele na raketě B. Z hlediska pozorovatele na raketě B nastane nejprve událost č. 2 (výstřel z děla, při němž střela raketu B nezasáhne, obr. 7-21a) a pak nastane událost č. 1 (příď rakety A se



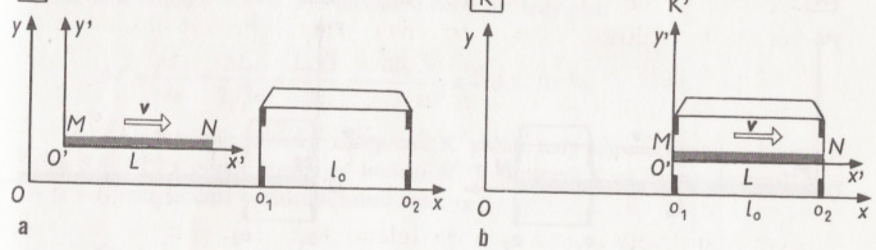
Obr. 7-21

dostane na úroveň zádi rakety B, obr. 7-21b). Obr. 7-20c je proto chybný a při správném uvažování není mezi stanovisky pozorovatelů na raketách A a B rozpor.

Poznámka Bylo by nesprávné, kdyby při řešení podobných problémových úloh vznikl ve čtenáři dojem, že speciální teorie relativity se zabývá jen problémy, které nemají praktický význam, a je proto teorií, která se uplatní až v daleké budoucnosti (až bude např. možný let raket relativistickou rychlostí). Mnohé úlohy a experimenty popsané v této knížce ukazují, že speciální teorie relativity se zabývá problematikou, která je již dnes z praktického hlediska velmi významná. S dalšími důležitými praktickými aplikacemi speciální teorie relativity se seznámíme v relativistické dynamice (viz kap. 10).

► PŘÍKLAD 15

Tyč o vlastní délce $L_0 = 20$ m se pohybuje takovou rychlostí $\boldsymbol{v}$, že má vzhledem k Zemi délku $L = 10$ m (obr. 7-22a). Předpokládej-



Obr. 7-22

me, že tyč prolétá protilehlými okny domečku, který má vlastní délku $l_0 = 10$ m (obr. 7-22b); pohybující se desetimetrová tyč se tedy z hlediska pozorovatele na Zemi do tohoto domečku právě vejde.

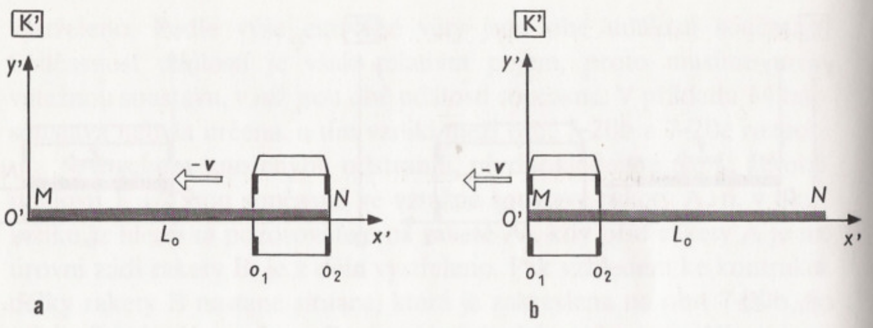
Uvažujme nyní tentýž děj v klidové vztažné soustavě tyče. Tyč má v této soustavě délku 20 m a domeček, který se vzhledem k ní pohybuje rychlostí $-\boldsymbol{v}$, má nyní délku 5 m. Jak se však může dvacetimetrová tyč vejít do pětimetrového domku?

Řešení

Vlastní délka tyče je $L_0 = 20$ m, vlastní délka domečku $l_0 = 10$ m. Tyč se pohybuje vzhledem k domečku rychlostí $\boldsymbol{v}$ a má vzhledem k Zemi délku $L = 10$ m, takže pro Lorentzův koeficient odpovídající této rychlosti dostáváme $L = \frac{1}{\gamma}L_0$; $\gamma = \frac{L_0}{L} = \frac{20\ \text{m}}{10\ \text{m}} = 2.$

Z hlediska pozorovatele na Zemi je délka L pohybující se tyče stejná jako vlastní délka l_0 domečku; tzn., že při průletu tyče domečkem leží současné polohy koncových bodů M a N v rovinách obou oken o_1 a o_2 (obr. 7-22b). Prochází-li tedy bod M rovinou o_1 v okamžiku t_1 a bod N rovinou o_2 v okamžiku t_2 , pak v souřadnicové soustavě spojené se Zemí platí $t_1 = t_2$.

V souřadnicové soustavě K′ spojené s tyčí se domeček pohybuje vlevo rychlostí $-\boldsymbol{v}$. Průchod roviny o bodem M a roviny o_2 bodem N jsou dvě události současné v souřadnicové soustavě K, proto nemohou být již současné v souřadnicové soustavě K′ spojené s tyčí. Jak vyplývá z kap. 5, pozorovatel v soustavě K′ by zaznamenal nejprve průchod roviny o_2 bodem N (obr. 7-23a) a pak průchod roviny o_1 bodem M (obr. 7-23b). Podle pozorovatele v soutavě K′ se tedy tyč do domku



Obr. 7-23

„nevejde“, průchody koncových bodů M a N této tyče okny nastávají v této soustavě v různých časových okamžicích $t'_1 \neq t'_2$.

Poznámka Zdánlivý paradox v této úloze je podmíněn naším intuitivním přesvědčením, že když pohybující se tyč je z hlediska pozorovatele na Zemi „v určitém okamžiku“ uvnitř domečku (obr. 7-22b), pak musí být v „témže okamžiku“ uvnitř domečku i z hlediska pozorovatele v soustavě K'. „Určitý okamžik“ je však reprezentován v naší úloze dvojicí současných událostí v soustavě K, které však nejsou současné v soustavě K'; proto nemá smysl hovořit v předcházející větě o „témže okamžiku“.

Asymetrie v řešení příkladu 15 v obou různých soustavách K a K' vzniká tím, že tělesa, která se vzhledem k těmto soustavám pohybují, mají různé vlastní délky L_0 a l_0. Oba pozorovatelé však vysvětlují děj podle stejných zákonů speciální teorie relativity a mezi výklady těchto pozorovatelů není logický rozpor. Připomeňme, že rovněž v klasické fyzice je jeden a tentýž děj popisován v různých vztažných soustavách různě (viz např. čl. 2.1, př. 2); přesto však v tom logický rozpor nevidíme.

V naší úloze lze také snadno vypočítat časový interval $\Delta t' = t'_1 - t'_2$, který uplyne **z hlediska pozorovatele v K'** mezi průchodem roviny o_2 bodem N (obr. 7-23a) a roviny o_1 bodem M (obr. 7-23b). V okamžiku t'_2 (měřeném v soustavě K'), v němž rovina o_2 prochází bodem N, je tyč zasunuta do domku jen jednou čtvrtinou své délky. Za dobu $\Delta t'$, za niž se domek posune vlevo tak, aby bod M ležel v rovině o_1, urazí domek dráhu

$$\frac{3}{4}L_0 = v\Delta t'.$$

Poněvadž hodnota Lorentzova koeficientu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2,$$

dostáváme odtud $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Pro hledanou dobu $\Delta t'$ tedy platí

$$\Delta t' = \frac{3L_0}{4v} = \frac{3L_0}{2\sqrt{3}c} = \frac{L_0\sqrt{3}}{2c} = \frac{20\sqrt{3}}{2.3.10^8}\ \mathrm{s} = 5{,}8.10^{-8}\ \mathrm{s}.$$

Z hlediska pozorovatele v soustavě K' projde tedy nejprve rovina o_2 bodem N a za $5{,}8.10^{-8}$ s projde rovina o_1 bodem M. V soustavě K se časový interval $\Delta t = t_1 - t_2$ mezi oběma událostmi rovná nule.

• Úlohy

1. Dokažte, že kontrakce podélných rozměrů tělesa se projevuje nezávisle na tom, zda se těleso od pozorovatele vzdaluje, nebo se k němu přibližuje.

2. Při odvození vztahu pro dilataci času $\Delta t = \gamma\Delta t'$ jsme v kap. 6 předpokládali, že délka pohybujících se světelných hodin je v obou soustavách K' a K stejná. Vysvětlete, proč byl tento předpoklad správný.

3. Tyč o klidové délce 5 m se pohybuje vzhledem k pozorovateli ve směru své podélné osy rychlostí $2.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Jakou délku tyče pozorovatel naměří?

4. Jakou rychlostí se vzdaluje od Země raketa, jestliže pro pozorovatele na Zemi je její délka ve srovnání s délkou klidovou poloviční?

5. Koule o poloměru r_0 se vzdaluje od pozorovatele rychlostí $0{,}5c$. Určete poměr délek jejího podélného a příčného průměru.

6. Určete, o jakou délku Δd se relativistickou kontrakcí v heliocentrické vztažné soustavě zkrátí průměr Země rovnoběžný s vektorem její rychlosti. Zemi považujte v její klidové vztažné soustavě za ideální kouli o poloměru $6{,}37.10^6$ m. Rychlost Země v heliocentrické vztažné soustavě $v \doteq 30\ \mathrm{km.s^{-1}}$. Při výpočtu použijte přibližný vztah $\sqrt{1 + x} \doteq 1 + \frac{1}{2}x$ platný pro $|x| \ll 1$ (viz přílohu II).

7. V zemské laboratoři byly vyrobeny dva stejné válce A a B o poloměrech $r_0 = 5{,}0$ cm a výškách $l_0 = 10$ cm. Oba válce se od sebe vzdalují ve směru své podélné osy rychlostí o velikosti $v = 0{,}994c$ (vzhledem k druhému válci). Určete objemy obou válců nejprve v klidové soustavě K válce A a pak v klidové soustavě K' válce B. Nakreslete náčrt.

8. Proton proletěl v laboratoři trubkou o délce 12 cm za dobu 5.10^{-10} s. Určete délku této trubky v klidové soustavě protonu.

9. Kosmická loď se vzdaluje od Země rychlostí, při níž relativistické zkrácení její vlastní délky je vzhledem k pozorovateli na Zemi 5 %. Na kosmické lodi probíhá určitý děj trvající podle palubních hodin 10 min. Jak dlouho trvá tento děj z hlediska pozorovatele na Zemi?

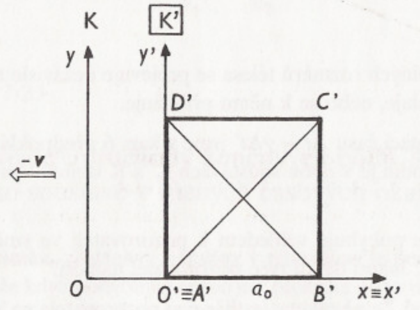
10. Kosmická loď se pohybuje rychlostí $v = 0{,}98c$ k hvězdě vzdálené od Země $3 \, . \, 10^{18}$ m.

a) Jaká je vzdálenost mezi hvězdou a lodí z hlediska pozorovatele na lodi?

b) Jak dlouho trvá tento let, použijeme-li k měření času hodiny umístěné na Zemi?

c) Jak dlouho trvá tento let podle hodin umístěných na lodi?

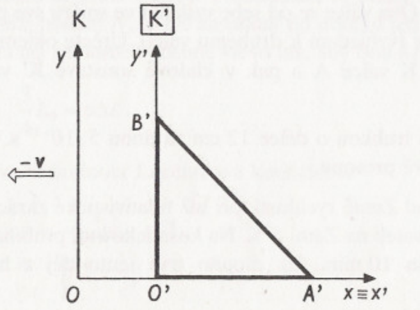
11. Čtverec, jehož strany mají v klidové soustavě K′ délku a_0 (obr. 7-24), se pohybuje vzhledem k soustavě K ve směru osy $x \equiv x'$ rychlostí $\boldsymbol{v}$, kolmou ke své straně $B'C'$;



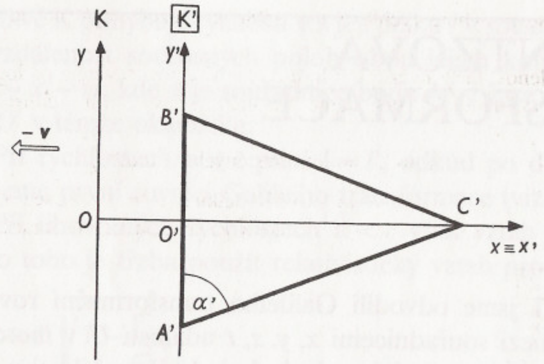
Obr. 7-24

$v = 0{,}8c$. Nakreslete náčrt z hlediska pozorovatele v soustavě K a určete úhly, které svírají v této soustavě úhlopříčky pohybujícího se čtyřúhelníku.

12. Pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník $A'O'B'$ je umístěn ve své klidové souřadnicové soustavě K′ tak, že jeho vrchol O' splývá s počátkem soustavy K′, strana $O'A'$ leží na ose x' a strana $O'B'$ na ose y' (obr. 7-25). Trojúhelník se vzhledem k soustavě K pohybuje ve směru osy $x \equiv x'$ rychlostí $\boldsymbol{v}$ rovnoběžnou s přímkou $O'A'$; $v = \frac{4}{5}c$. Nakreslete náčrt z hlediska pozorovatele soustavy K a určete v této soustavě vnitřní úhly pohybujícího se trojúhelníku.



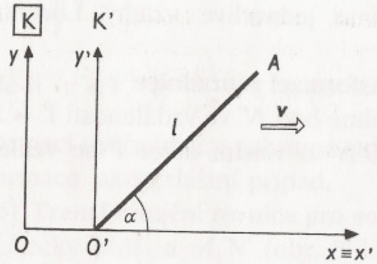
Obr. 7-25



Obr. 7-26

13. Rovnoramenný trojúhelník $A'B'C'$ je v klidové soustavě K′ určen stranou $A'B' = 6$ cm a úhlem $\alpha' = 70°$ (obr. 7-26). Jakou rychlostí se musí pohybovat vzhledem k jiné inerciální soustavě K, aby byl v této soustavě trojúhelníkem rovnostranným?

14. Určete vlastní délku tyče pohybující se vzhledem k soustavě K rychlostí o velikosti $v = \frac{c}{2}$, jestliže její délka v této soustavě je $l = 1$ m a úhel mezi vektorem rychlosti $\boldsymbol{v}$ a tyčí $\alpha = 45°$ (obr. 7-27).



Obr. 7-27

a proto platí

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2\frac{\left(\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x\right)^2}{1-\beta^2} - \frac{(\Delta x - v\Delta t)^2}{1-\beta^2}$$

a odtud po trochu zdlouhavější úpravě

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2.$$

Poznámka Veličina s definovaná vztahem

$$s^2 = c^2\Delta t^2 - l^2$$

kde Δt je časový interval mezi dvěma událostmi a l vzdálenost mezi body, v nichž tyto události nastaly, se nazývá **interval mezi uvažovanou dvojicí událostí.** Jestliže určitá veličina při přechodu od jedné inerciální vztažné soustavy k druhé užitím Lorentzovy transformace nemění svou hodnotu, pak o ní říkáme, že je **invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci.** Z věty dokázané v tomto příkladu proto vyplývá, že **interval mezi dvěma událostmi je invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci.**

Invariance intervalu se dá ve speciální teorii relativity využít např. k řešení úloh (viz př. 6 a 7).

▶ PŘÍKLAD 6

Rovnice kulové světelné vlnoplochy vyslané z počátku soustavy souřadnic K v čase $t = 0$ je $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$. Zjistěte, jaký bude tvar této vlnoplochy v soustavě K′, pohybující se vzhledem k soustavě K stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Předpokládáme, že v čase $t = t' = 0$ počátky obou soustav souřadnic K a K′ splývají.

Řešení

Z rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

vyplývá

$$(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Výraz

$$(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = (ct)^2 - r^2$$

je interval mezi vysláním světelného paprsku z počátku soustavy souřadnic K v čase $t = 0$ (událost U_1) a příchodem světelného paprsku do libovolného bodu povrchu světelné kulové vlnoplochy o poloměru r v čase t (událost U_2). Z řešení předcházejícího příkladu vyplývá, že tento interval je invariantní, platí tedy

$$(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = (ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$$

Z poslední rovnice dostáváme

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2\ ;$$

v soustavě K′ bude tedy světelná vlnoplocha opět kulová. K stejnému závěru jsme již dospěli jinou cestou v čl. 4, př. 3.

Poznámka Představa, podle níž jsou vlnoplochy v obou soustavách K a K′ kulové, ačkoli v čase $t = t' = 0$ se světlo začalo šířit ze společného počátku $O \equiv O'$, se může zdát čtenáři z hlediska „názoru" podivná. Je však třeba si uvědomit, že např. kulová vlnoplocha se středem v počátku O' a s poloměrem ct' je z hlediska pozorovatele v soustavě K′ množinou bodů, do nichž dospěje světlo z počátku O' současně; poněvadž je však současnost událostí relativní pojem, světlo z hlediska pozorovatele v soustavě K do těchto bodů současně nedospěje. Proto podle pozorovatele v soustavě K není tato množina bodů vlnoplocha, ale jen geometrická plocha, kterou projde světlo vyslané z bodu O obecně v různých časových okamžicích. Podobně koule o středu v bodě O a poloměru ct je vlnoplocha jen z hlediska pozorovatele v soustavě K, nikoli však v soustavě K′. Mezi výklady obou pozorovatelů není proto rozpor.

▶ PŘÍKLAD 7

Vlastní doba života určité nestabilní částice je $\Delta t_0 = 10$ ns. Určete dráhu l, kterou částice proletí od okamžiku svého vzniku do okamžiku rozpadu v laboratorní vztažné soustavě, ve které doba jejího života je $\Delta t = 20$ ns.

Řešení

Označme symbolem K′ klidovou vztažnou soustavu částice a symbolem K laboratorní soustavu, vzhledem k níž se částice pohybuje. Druhá mocnina intervalu od vzniku do rozpadu částice je v soustavě K $s^2 = c^2\Delta t^2 - l^2$, v soustavě K′ $s'^2 = c^2\Delta t_0^2 - l'^2 = c^2\Delta t_0^2$ (dráha částice l' v její klidové soustavě K′ je rovna nule). Z invariance intervalu pak vyplývá

$$c^2\Delta t^2 - l^2 = c^2\Delta t_0^2$$

a odtud po úpravě dostáváme

$$l = c\sqrt{\Delta t^2 - \Delta t_0^2} = 3\,.\,10^8\sqrt{(20\,.\,10^{-9})^2 - (10\,.\,10^{-9})^2}\ \mathrm{m} \doteq$$

$$\doteq 5{,}2\ \mathrm{m}$$

Poznámka Příklad lze vyřešit také jiným způsobem. Dráha nestabilní částice v soustavě K je

$$l = v\Delta t,$$

kde v je velikost neznámé rychlosti částice v této soustavě. Ze vztahu pro dilataci času

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dostáváme po úpravě

$$v^2\Delta t^2 = c^2\left(\Delta t^2 - \Delta t_0^2\right)$$

a odtud

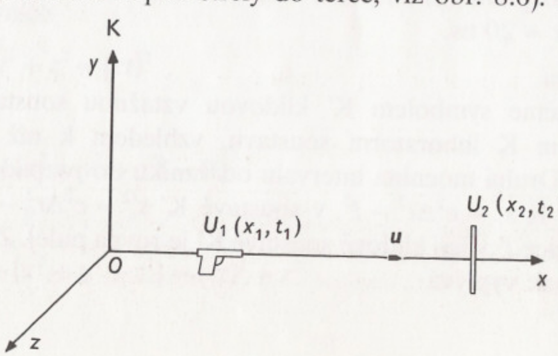
$$l = v\Delta t = c\sqrt{\Delta t^2 - \Delta t_0^2}\,.$$

► PŘÍKLAD 8

Dokažte, že časové pořadí událostí, mezi kterými je příčinná souvislost, je ve všech inerciálních soustavách stejné.

Řešení

Předpokládejme, že v inerciální soustavě K se odehrály dvě události U_1 a U_2, přičemž událost U_1 je příčinou události U_2 (např. výstřel ze zbraně a dopad střely do terče, viz obr. 8.6). Událost U_1



Obr. 8-6

(výstřel) má v soustavě K souřadnice x_1, t_1, událost U_2 (dopad střely do terče) souřadnice x_2, t_2. Poněvadž událost U_1 je příčinou události U_2 a příčina nastává dříve než její důsledek, je $t_2 > t_1$. Máme dokázat, že v libovolné inerciální soustavě souřadnic K′ platí pro časové souřadnice obou událostí $t'_2 > t'_1$.

Z čtvrté rovnice Lorentzovy transformace vyplývá, že časový interval mezi oběma událostmi v soustavě K′ je

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Ze vztahu pro rychlost střely vzhledem k soustavě K

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

vyplývá $x_2 - x_1 = u(t_2 - t_1)$ a po dosazení tohoto výrazu do první rovnice dostáváme

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}u\left(t^2 - t_1\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = (t_2 - t_1)\frac{1 - \frac{vu}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Podle speciální teorie relativity se střela (ani žádný jiný objekt) nemůže pohybovat větší rychlostí, než je rychlost světla ve vakuu, platí tedy $u \leq c$.* Z nerovností $v < c$ a $u \leq c$ vyplývá $1 - \frac{vu}{c^2} > 0$ a poněvadž $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} > 0$ a podle předpokladu $t_2 - t_1 > 0$, dostáváme z poslední rovnice $t'_2 - t'_1 > 0$, tj. $t'_2 > t'_1$.

---

* Pro střelu platí $u < c$, avšak např. při střelbě na terč z laserového děla $u = c$. Obecně u je velikost rychlosti, kterou se šíří určitý „vliv" události U_1 (příčiny) na událost U_2 (na důsledek). V našem případě je tento vliv zprostředkován letící střelou.

Ve vztažné soustavě K′, v níž je proudící kapalina v klidu, se světlo v kapalině šíří rychlostí $u' = \frac{c}{n}$; přitom je podle principu relativity tato rychlost nezávislá na tom, jakou rychlostí se pohybuje kapalina vzhledem ke stěnám trubice. Známe-li tedy rychlost světla u' vzhledem ke kapalině a rychlost kapaliny v vzhledem ke stěnám trubice, můžeme pro hledanou rychlost světla u vzhledem ke stěnám trubice psát

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{(u' + v)\left(1 - \frac{u'v}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u'v}{c^2}\right)} =$$

$$= \frac{u'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{1 - \frac{1}{n^2}\frac{v^2}{c^2}}.$$

Protože pro rychlost kapalin platí $v \ll c$, můžeme zanedbat výrazy obsahující člen $\frac{v^2}{c^2}$ vzhledem k číslu 1 a dostáváme pak

$$u = u' + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v = u' + \alpha v$$

ve shodě s Fizeauovým experimentem.

Je však třeba připomenout, že rychlost proudící vody v je velmi malá v porovnání s rychlostí světla v kapalině (u Fizeauových experimentů $v = 7{,}069\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$), a proto se velikosti rychlostí u a u' liší jen velmi málo. Fizeau proto nechal světlo procházet v proudící kapalině ve dvou navzájem opačných směrech a vliv pohybu kapaliny na rychlost šíření světla zjišťoval užitím interferenčního jevu; pohyb kapaliny se projevil posunutím interferenčních proužků.

Absolutní index lomu vody $n \doteq 1{,}33$; pro koeficient α pak dostáváme

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{1{,}33^2} \doteq 0{,}43.$$

Tato hodnota koeficientu α je v mezích chyb shodná s experimentální hodnotou, kterou získal Fizeau.

Fizeauův pokus zopakovali v přesnějším provedení v r. 1886 A. A. Michelson a E. W. Morley a v r. 1914 a 1915 holandský fyzik P. Zeeman (1865–1943). Další pokusy byly provedeny se šířením světla v pohybujících se pevných látkách. Všechny pokusy přesvědčivě potvrdily správnost relativistického vztahu pro skládání rychlostí.

▶ PŘÍKLAD 1

Těleso se pohybuje vzhledem k soustavě K′ rychlostí $u' = \frac{3}{4}c$ souhlasně orientovanou s osou x'; stejnou rychlostí v se pohybuje soustava K′ vzhledem k soustavě K. Určete rychlost tělesa vzhledem k soustavě K.

Řešení

Pro rychlosti u' a v neplatí v tomto případě podmínky $u' \ll c$ a $v \ll c$, a proto při řešení příkladu nelze použít klasický zákon pro skládání rychlostí. Z relativistického vztahu (2) dostáváme

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{\frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{24}{25}c = 0{,}96c.$$

Poznámka Výsledná rychlost u je opět menší než rychlost světla ve vakuu; klasický zákon skládání rychlostí by vedl v tomto případě ke zcela nesprávnému výsledku

$$u_k = u' + v = \frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c = 1{,}5c.$$

▶ PŘÍKLAD 2

Z letadla letícího rychlostí $1\,000\ \mathrm{km\,.\,h^{-1}}$ byla ve směru letu vystřelena střela rychlostí $2\,000\ \mathrm{km\,.\,h^{-1}}$ (vzhledem k letadlu). Určete rychlost střely vzhledem k Zemi.

Řešení

Obě rychlosti $v = 1\,000\ \mathrm{km.h^{-1}}$ a $u' = 2\,000\ \mathrm{km.h^{-1}}$ jsou ve srovnání s rychlostí světla velmi malé; při řešení příkladu lze proto použít klasický zákon skládání rychlostí

$$u = u' + v = 2\,000\ \mathrm{km.h^{-1}} + 1\,000\ \mathrm{km.h^{-1}} = 3\,000\ \mathrm{km.h^{-1}}.$$

Relativistický vztah pro skládání rychlostí vede ke stejnému výsledku

$$u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{u'v}{c^2}} = \frac{2.10^3\ \mathrm{km.h^{-1}} + 10^3\ \mathrm{km.h^{-1}}}{1 + \dfrac{2.10^6\ \mathrm{km.h^{-1}}}{c^2}} =$$

$$= 2\,999{,}999\,999\,995\ \mathrm{km.h^{-1}} \doteq 3\,000\ \mathrm{km.h^{-1}},$$

jeho použití je zde však zbytečné.

▶ PŘÍKLAD 3

Dokažte, že při skládání rychlostí v a u' o velikostech menších než c má také výsledná rychlost u velikost menší, než je rychlost světla c.

Řešení

Zvolme případ, v němž rychlosti $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{u'}$ mají stejný směr. Relativistický vztah pro skládání rychlostí upravme nejprve na tvar

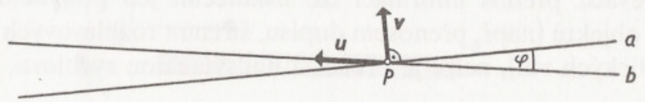
$$u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{u'v}{c^2}} = c\,\frac{c(u' + v)}{c^2 + u'v}. \qquad (3)$$

Vzhledem k tomu, že $0 < v < c$ a $0 < u' < c$, je také $(c - v)(c - u') > 0$, $c^2 - cv - cu' + u'v > 0$ a $c^2 + u'v > c(u' + v)$. Porovnáním upraveného vztahu (3) pro skládání rychlostí s poslední nerovností pak dostáváme $u < c$.

Poznámka Tato nerovnost byla ve zvláštním případě ověřena již v příkladu 1. Z nerovnosti $u < c$ vyplývá, že rychlost světla ve vakuu je **mezní rychlost**, kterou nemůže překročit žádný materiální objekt.

▶ PŘÍKLAD 4

Tenká tyč a svírající s jinou tyčí b velmi malý úhel φ se pohybuje velkou rychlostí $v < c$ ve směru kolmém k tyči a (obr. 9-2). Určete

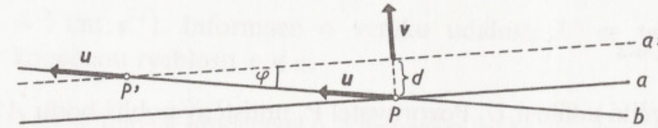


Obr. 9-2

rychlost $\boldsymbol{u}$, kterou se na tyči b pohybuje průsečík P obou přímek a i b. Může se bod P pohybovat po přímce b nadsvětelnou rychlostí?

Řešení

Za zvolenou libovolnou dobu t přejde tyč z polohy a do polohy a' a posune se o dráhu d (obr. 9-3); průsečík P se za tuto dobu po-



Obr. 9-3

sune z polohy P do polohy P' a urazí přitom dráhu $PP' = \dfrac{d}{\sin\varphi}$. Rychlost tyče je $v = \dfrac{d}{t}$ a hledaná rychlost průsečíku P je $u = \dfrac{PP'}{t} =$

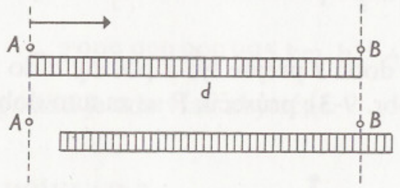
$$= \frac{d}{t\sin\varphi} = \frac{v}{\sin\varphi}.$$

Z tohoto vztahu je patrné, že při dostatečně velkých rychlostech v a malých úhlech φ je $u > c$ (je-li např. $v = 200\,000\ \mathrm{km.s^{-1}}$ a $\sin\varphi = 0{,}1$, je $u = 2\,000\,000\ \mathrm{km.s^{-1}}$). Tento výsledek však neodporuje tvrzení speciální teorie relativity, podle něhož je rychlost světla ve vakuu mezní rychlost, kterou nemůže překročit žádný materiální objekt; průsečík dvou přímek není totiž materiální objekt, ale jen geometrický pojem. Je snadné představit si bod pohybující se libovolnou nadsvětelnou rychlostí, ale v přírodě nelze tuto rychlost udělit žádnému materiálnímu objektu. Příčiny, pro které nelze materiální objekty urychlit tak, aby se pohybovaly nadsvětelnou rychlostí, vysvětluje relativistická dynamika (viz kap. 10).

Poněvadž přenos informací lze uskutečnit jen pohybem materiálních objektů (např. přenosem dopisu, šířením rozhlasových elektromagnetických vln), nelze je přenášet nadsvětelnou rychlostí.

▶ PŘÍKLAD 5

Student chtěl vyvrátit poznatek o konečné rychlosti šíření informací myšlenkovým pokusem (obr. 9-4). Předpokládejme, že v bodu A

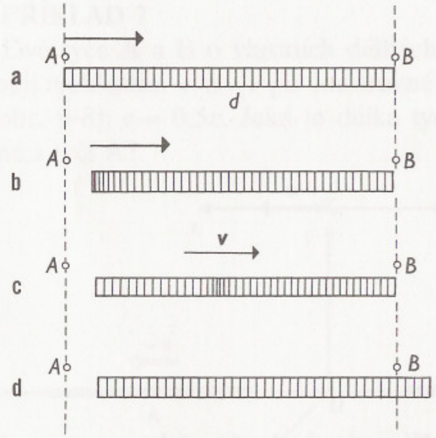


Obr. 9-4

nastala určitá událost U. Pozorovatel P_1 umístěný poblíž bodu A chce předat informaci o vzniku této události jinému pozorovateli P_2, jenž je umístěn poblíž bodu B. K přenosu informace použije pozorovatel P_1 tuhou tyč umístěnou mezi body A a B. V okamžiku, v němž událost U nastala, posune pozorovatel P_1 levý konec tyče ve směru šipky. Poněvadž tyč je tuhá, posune se současně i její pravý konec a tak lze informaci o vzniku události U předat pozorovateli P_2 nekonečně velkou rychlostí. Je studentova úvaha správná?

Řešení

Úvaha je založena na nesprávném předpokladu, že v přírodě existují absolutně tuhá tělesa. Je třeba si uvědomit, že pojem tuhá tyč je jen určitá abstrakce. Posuneme-li tyč zhotovenou z libovolné látky ve směru šipky (obr. 9-5a), deformuje se nejdříve jen její levý konec u bodu A (obr. 9-5b); tato deformace se pak šíří rychlostí $\boldsymbol{v}$ směrem k bodu B (obr. 9-5c) a teprve pak se posune pravý konec tyče (obr. 9-5d). Rychlost $\boldsymbol{v}$, kterou se šíří deformace, je stejná jako rychlost zvuku v dané látce (např. rychlost zvuku v oceli $v = 5\,000\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}} =$



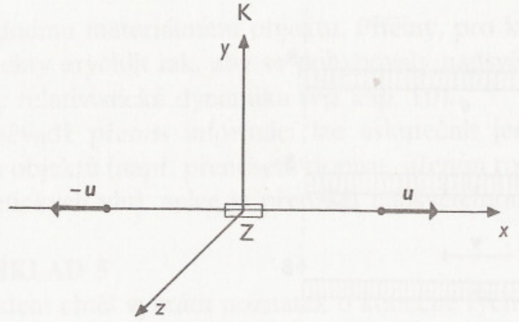
Obr. 9-5

$= 5\ \mathrm{km\,.\,s^{-1}}$). Informace o vzniku události U se tedy v tyči šíří konečnou rychlostí $v \ll c$.

Chybná představa o současném pohybu obou konců tyče při jejím uvádění do pohybu ve směru podélné osy vzniká proto, že doba $t = \dfrac{d}{v}$, o niž se pohyb bodu B za pohybem bodu A opozdí, je v praxi většinou velmi malá. Kdybychom např. ocelovou tyč o délce $d = 10$ m posunuli ve směru její podélné osy, je zpoždění $t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{10}{5\,000}\ \mathrm{s} =$ $= 2\,.\,10^{-3}$ s.

▶ PŘÍKLAD 6

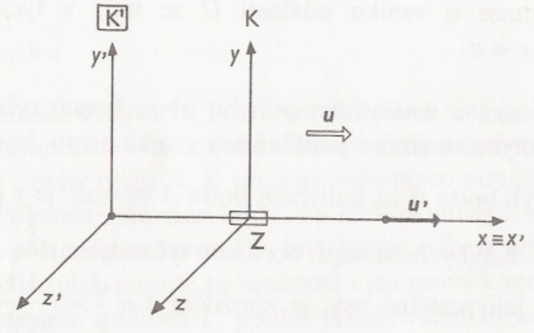
Zdroj elektronů Z emituje elektrony o rychlostech $\boldsymbol{u}$ a $-\boldsymbol{u}$ v navzájem opačných směrech; $u = 1{,}5\,.\,10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ (obr. 9-6). Určete rychlost elektronu, který se pohybuje vpravo, vzhledem k elektronu pohybujícímu se vlevo.



Obr. 9-6

Řešení

Vzhledem k soustavě K′ spojené s levým elektronem se zdroj Z pohybuje vpravo rychlostí $u = 1{,}5\,.\,10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ (obr. 9-7). Pravý elektron se vzhledem ke zdroji pohybuje ve stejném směru stejně velkou



Obr. 9-7

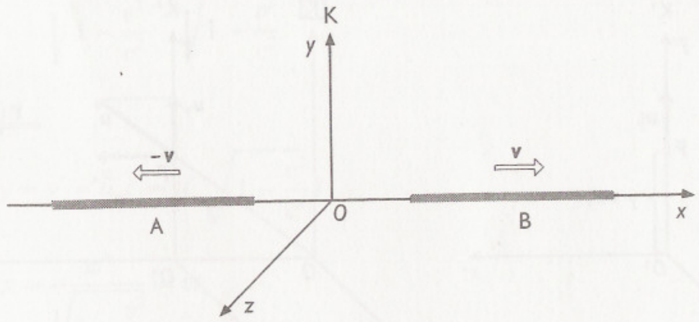
rychlostí $u = 1{,}5\,.\,10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$. Pro velikost rychlosti u' elektronu pohybujícího se vpravo vzhledem k soustavě K′ dostáváme proto

$$u' = \frac{u+u}{1+\dfrac{u^2}{c^2}} = \frac{3\,.\,10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}}{1+\dfrac{(1{,}5\,.\,10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}})^2}{(3\,.\,10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}})^2}} = 2{,}4\,.\,10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}.$$

Elektron se vzhledem k druhému elektronu pohybuje rychlostí $2{,}4\,.\,10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$.

▶ PŘÍKLAD 7

Dvě tyče A a B o vlastních délkách 1 m se vzhledem k Zemi pohybují rychlostmi $\boldsymbol{v}$ a $-\boldsymbol{v}$ po vodorovné přímce, v níž leží osy obou tyčí (obr. 9-8); $v = 0{,}5c$. Jaká je délka tyče B v soustavě souřadnic spojené s tyčí A?



Obr. 9-8

Řešení

Tyč B se vzhledem k tyči A pohybuje rychlostí

$$u = \frac{v+v}{1+\dfrac{v^2}{c^2}} = \frac{4}{5}\,c.$$

Délka tyče B vzhledem k tyči A je tedy

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = l_0\frac{3}{5} = 0{,}6\ \mathrm{m}.$$

Tyč B má v soustavě souřadnic spojené s tyčí A délku 0,6 m.

▶ PŘÍKLAD 8

Inerciální soustava K′ se pohybuje vzhledem k inerciální soustavě K stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$. V čase $t' = 0$ se začala z počátku soustavy K′ pohybovat v kladném směru osy y' částice P stálou rychlostí o velikosti u'_y. Najděte velikost rychlosti u této částice v soustavě K.

$$u = \sqrt{v^2 + u_y'^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \sqrt{v^2 + u_y'^2}$$

ve shodě s klasickou fyzikou.

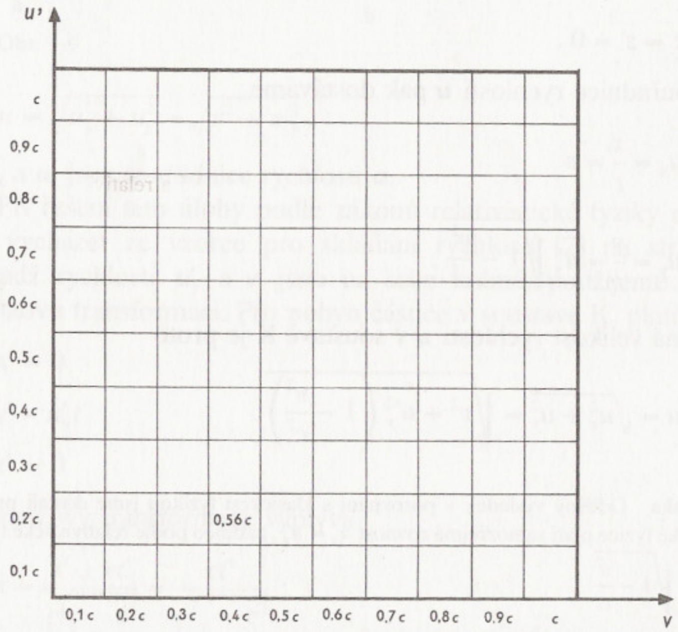
Předpokládejme, že ve směru osy y' soustavy K′ se pohybuje foton ($u'_y = c$), a položme si otázku, jaká bude velikost jeho rychlosti vzhledem k soustavě K. Dosadíme-li do vztahu pro rychlost u za u'_y rychlost světla c, dostaneme

$$u = \sqrt{v^2 + u_y'^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \sqrt{v^2 + c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \sqrt{v^2 + c^2 - v^2} =$$
$$= \sqrt{c^2} = c.$$

Tento výsledek je však samozřejmý, poněvadž podle principu stálé rychlosti světla musí být velikost rychlosti světla c v obou inerciálních vztažných soustavách K′ a K stejná. Směr vektoru rychlosti světla $\boldsymbol{c}$ je v obou soustavách různý.

• Úlohy

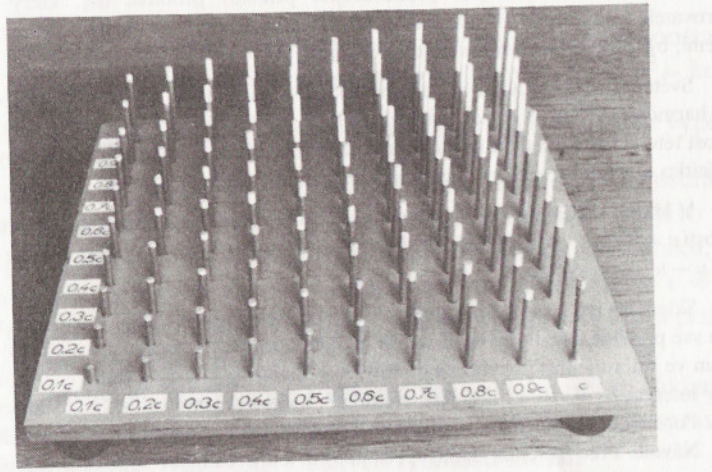
1. Do volných políček tabulky (obr. 9-10) zapište hodnoty rychlostí získané



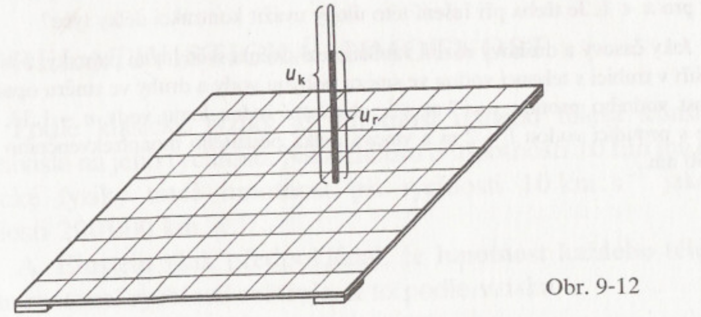
Obr. 9-10

relativistickým skládáním souhlasně orientovaných rychlostí uvedených na okraji tabulky (např. $v = 0{,}4c$, $u' = 0{,}2c$, $u = 0{,}56c$). Do podobné tabulky zapište také hodnoty rychlostí získané skládáním rychlostí podle klasického zákona (např. $v = 0{,}4c$, $u' = 0{,}2c$, $u_k = 0{,}6c$).

Sestrojte model, v němž velikosti výsledných rychlostí u_k vypočtených podle klasické fyziky znázorníte tyčinkami připevněnými kolmo k jednotlivým políčkům (obr. 9-11 a 9-12); délky tyčinek jsou přímo úměrné velikostem rychlostí u_k. Na těchto tyčinkách pak barevně vyznačte rychlosti u_r vypočtené podle speciální teorie relativity.



Obr. 9-11 Model znázorňující skládání rychlostí v klasické a relativistické fyzice



Obr. 9-12

2. Kosmická loď vzdalující se od Země rychlostí 225 000 km . s⁻¹ má na palubě urychlovač, který urychluje elektrony na rychlost 240 000 km . s⁻¹ (vzhledem k lodi). Jaká je rychlost těchto elektronů vzhledem k Zemi, jestliže se pohybují a) ve směru pohybu kosmické lodi, b) proti směru pohybu lodi?

3. Pozorovatel pohybující se vzhledem k inerciální soustavě K ve směru osy x rychlostí $2{,}9 \,.\, 10^8$ m . s^{-1} měřením zjistil, že se v opačném směru osy x vzdaluje od něho těleso rychlostí $2{,}998 \,.\, 10^8$ m . s^{-1}. Jaká je rychlost tohoto tělesa v soustavě K?

4. Z kosmické lodi pohybující se vzhledem k Zemi rychlostí $0{,}8c$ byla ve směru jejího pohybu vypuštěna raketa rychlostí $0{,}6c$ (vzhledem k lodi). Vlastní délka rakety je 10 m. Jaká je délka této rakety a) z hlediska pozorovatele v kosmické lodi, b) z hlediska pozorovatele na Zemi?

5. Na kosmické lodi (viz předcházející příklad) probíhal děj, který podle pozorovatele na lodi trval 10 min. Jak dlouho trval tento děj a) z hlediska pozorovatele na Zemi, b) z hlediska pozorovatele na raketě?

6. Světelná stopa vzniklá dopadem elektronů na stínítko obrazovky osciloskopu koná harmonický pohyb o frekvenci 10 GHz a amplitudě 0,01 m. Jaká je maximální rychlost této stopy vzhledem ke stínítku obrazovky? Může se světelná stopa pohybovat po stínítku obrazovky větší rychlostí než je rychlost světla ve vakuu?

7. V klidné vodě ($n = 1{,}33$) se světlo šíří rychlostí u'. Ve vodě proudící potrubím rychlostí $v = 7$ m . s^{-1} se světlo šíří vzhledem ke stěnám trubice rychlostí u. Určete rozdíl $\Delta u = u - u'$ obou rychlostí.

8. Skleněná tyč ($n = 1{,}5$) o délce 50 cm se pohybuje rychlostí $v = 30$ m . s^{-1} ve směru své podélné osy. Pohybující se tyčí projde monofrekvenční světlo o vlnové délce 500 nm ve směru jejího pohybu za dobu t_1 a v opačném směru za dobu t_2. Vypočtěte časový interval $\Delta t = t_1 - t_2$ a určete dráhu Δd, kterou světlo urazí za tento interval ve vakuu. Porovnejte dráhu Δd s vlnovou délkou použitého monofrekvenčního světla.

Návod: Před řešením úlohy prostudujte teorii Fizeauova pokusu se šířením světla v pohybující se vodě. Při řešení úlohy využijte přibližný vztah $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$, platný pro $x \ll 1$. Je třeba při řešení této úlohy uvážit kontrakci délky tyče?

9. Jaký časový a dráhový rozdíl vzniká mezi dvěma světelnými paprsky, z nichž se jeden šíří v trubici s tekoucí vodou ve směru pohybu vody a druhý ve směru opačném? Rychlost vodního proudu $v = 7$ m . s^{-1}, absolutní index lomu vody $n = 1{,}33$, délka trubice s proudící vodou $l = 2$ m a vlnová délka použitého monofrekvenčního světla $\lambda = 450$ nm.

10 RELATIVISTICKÁ DYNAMIKA

Podle zákonů klasické fyziky se částice, na niž působí konstantní síla, pohybuje pohybem rovnoměrně zrychleným (je-li $\boldsymbol{F}$ = konst. a m = konst., je také $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{F}}{m}$ = konst.). Z rovnice $v = at$ pak vyplývá, že rychlost této částice by se zvětšovala bez omezení a za dostatečně dlouhou dobu by překročila rychlost světla ve vakuu ($v > c$); to však není podle speciální teorie relativity možné. Klasickou dynamiku, jejíž správnost byla experimentálně ověřena jen při rychlostech $v \ll c$, je tedy třeba nahradit obecnější relativistickou dynamikou, která platí při libovolných rychlostech $\boldsymbol{v}(0 \leqq v \leqq c)$.

V následujících článcích ukážeme, jak je třeba obsah základních pojmů a zákonů klasické dynamiky pozměnit, aby vedly ke správným výsledkům i při rychlostech blízkých rychlosti světla.

10.1 RELATIVISTICKÁ HMOTNOST

Podle klasické fyziky je hmotnost daného tělesa konstantní a nezávislá na jeho rychlosti. Např. těleso o hmotnosti 10 tun má podle klasické fyziky tutéž hmotnost při rychlosti 10 km . s^{-1} jako při rychlosti 200 000 km . s^{-1}.

A. Einstein však předpokládal, že **hmotnost každého tělesa se s jeho rostoucí rychlostí zvětšuje,** a to podle vztahu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 . \qquad (1)$$

zřejmě $u' = -w$ (viz obr. 10-2b, v němž je znázorněna rychlost $-\boldsymbol{w}$ výsledného tělesa C vzhledem k soustavě K′) a $u = w$ (viz obr. 10-1b, v němž je znázorněna rychlost $\boldsymbol{w}$ výsledného tělesa C vzhledem k soustavě K). Relativistický vztah pro skládání rychlostí lze proto v našem případě psát ve tvaru

$$w = \frac{-w + v}{1 - \dfrac{wv}{c^2}}. \tag{5}$$

Ze vztahů (3), (4) a (5) dostáváme

$$m_v v = (m_v + m_0)w \tag{6}$$

$$w\left(1 - \frac{wv}{c^2}\right) = v - w. \tag{7}$$

Dosadíme-li za velikost rychlosti w vyjádřenou z rovnice (6) do rovnice (7), dostaneme

$$\frac{m_v v}{m_v + m_0}\left[1 - \frac{m_v v^2}{c^2(m_v + m_0)}\right] = v - \frac{m_v v}{m_v + m_0}$$

a odtud po úpravě*

$$m_v^2(c^2 - v^2) = m_0^2 c^2. \tag{8}$$

Z rovnice (8) dostaneme hledanou závislost hmotnosti m_v na rychlosti v

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

* Nezapomeňte nejprve vydělit celou rovnici rychlostí v!

Pro relativistickou hybnost $\boldsymbol{p}$ pak platí

$$\boldsymbol{p} = m_v \boldsymbol{v} = \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

► PŘÍKLAD 1

Letadlo o klidové hmotnosti 20 t letí rychlostí 1 000 km . h^{-1} vzhledem k Zemi. Vypočtěte přírůstek jeho hmotnosti.

Řešení

Pro rychlost $v = 1\,000\ \mathrm{km\,.\,h^{-1}} \doteq 0{,}3\ \mathrm{km\,.\,s^{-1}} \doteq 10^{-6}c$ dostáváme podle tabulek $\gamma = 1 + 5\,.\,10^{-13}$; přírůstek hmotnosti letadla je tedy

$$\Delta m = m - m_0 = m_0(\gamma - 1) = 2\,.\,10^4\,.\,5\,.\,10^{-13}\ \mathrm{kg} = 10^{-8}\ \mathrm{kg} = 10^{-2}\ \mathrm{mg}.$$

Poznámka Výpočet ukazuje, proč v běžném životě nezjišťujeme přírůstek hmotnosti tělesa při jeho rostoucí rychlosti. Při rychlostech $v \ll c$ je přírůstek hmotnosti příliš malý, takže hmotnost tělesa při těchto rychlostech lze s velkou přesností považovat za konstantní.

► PŘÍKLAD 2

V urychlovači získal elektron rychlost $v = 0{,}999\,999\,92c$. Vypočtěte jeho relativistickou hmotnost a porovnejte ji s klidovou hmotností protonu $m_p \doteq 1{,}67\,.\,10^{-27}$ kg. Klidová hmotnost elektronu $m_0 \doteq 9{,}1\,.\,10^{-31}$ kg.

Řešení

Poněvadž $\beta = \dfrac{v}{c} = 0{,}999\,999\,92$, je $1 - \beta = 8\,.\,10^{-8}$ a podle tabulek $\gamma = 2{,}5\,.\,10^3$. Pro hledanou relativistickou hmotnost elektronu m pak dostáváme

$$m = \gamma m_0 \doteq 2{,}5\,.\,10^3\,.\,9{,}1\,.\,10^{-31}\ \mathrm{kg} \doteq 2{,}25\,.\,10^{-27}\ \mathrm{kg}.$$

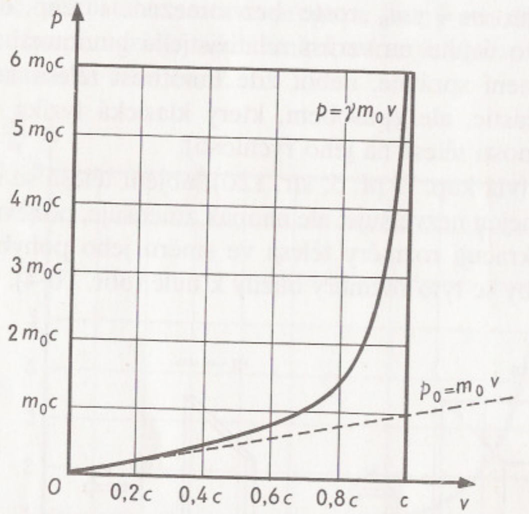
Hmotnost elektronu je při této rychlosti větší než klidová hmotnost protonu.

► **PŘÍKLAD 5**

Sestrojte graf vyjadřující relativistickou hybnost tělesa o klidové hmotnosti $m_0 = 1$ kg jako funkci jeho rychlosti.

Řešení

Graf funkce $p = \gamma m_0 v$, kde $m_0 = 1$ kg (obr. 10-5), sestrojíme za pomoci tabulek Lorentzových koeficientů γ nebo použitím počítačky.



Obr. 10-5

Poznámka Za jednotku hybnosti byla v grafu zvolena hybnost $p = m_0 c = 1\,\text{kg}\,.\,3\,.\,10^8\,\text{m}\,.\,\text{s}^{-1} = 3\,.\,10^8\,\text{kg}\,.\,\text{m}\,.\,\text{s}^{-1}$. V grafu je čárkovanou čárou znázorněna také závislost $p_0 = m_0 v$, k níž by vedla klasická fyzika.

Z grafu vyplývá, že při $v \ll c$ platí přibližně $p \approx p_0$; při větších rychlostech je však $p > p_0$ a hybnost $\boldsymbol{p}_0 = m_0 \boldsymbol{v}$ ztrácí při nich již svůj význam (neplatí pro ni zákon zachování hybnosti). Jestliže $v \to c$, pak relativistická hybnost p roste nade všechny meze.

Podle klasické fyziky je vzrůst hybnosti tělesa $\boldsymbol{p}_0 = m_0 \boldsymbol{v}$, např. při jeho urychlování stálou silou, způsoben výlučně vzrůstem rychlosti tělesa, hmotnost tělesa m_0 zůstává konstantní. Podle relativistické fyziky je vzrůst hybnosti tělesa $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ podmíněn nejen růstem jeho rychlosti, ale také růstem jeho relativistické hmotnosti. Při rychlostech blízkých rychlosti světla $v \to c$ se rychlost tělesa, na které působí stálá síla, prakticky již nemění a vzrůst hybnosti tělesa nade všechny meze je téměř výlučně podmíněn vzrůstem jeho relativistické hmotnosti.

► **PŘÍKLAD 6**

Železný kvádr se vzhledem k soustavě souřadnic K pohybuje rychlostí $0{,}98c$ ve směru osy x tak, že jeho hrany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami této soustavy. Určete hustotu železa vzhledem k soustavě souřadnic K.

Řešení

Klidová hustota železa při rychlosti $v = 0$ je podle tabulek

$$\varrho_0 = \frac{m_0}{V_0} = \frac{m_0}{a_0 b_0 c_0} \doteq 7{,}8\,.\,10^3\ \text{kg}\,.\,\text{m}^{-3}.$$

Hustotu železného kvádru, který se pohybuje vzhledem k pozorovateli rychlostí $\boldsymbol{v}$, určíme ze vztahu

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{m}{abc} = \frac{\gamma m_0}{\frac{1}{\gamma} a_0 b_0 c_0} = \gamma^2 \frac{m_0}{V_0} = \gamma^2 \varrho_0\,.$$

Pro $v = 0{,}98c$ je $\gamma \doteq 5{,}02$, $\varrho \doteq 5{,}02^2\,.\,7{,}8\,.\,10^3\ \text{kg}\,.\,\text{m}^{-3} \doteq$ $\doteq 200\,.\,10^3\ \text{kg}\,.\,\text{m}^{-3}$.

Poznámka Hustota je právě tak jako hmotnost nebo objem veličina relativní.

► **PŘÍKLAD 7**

Odvoďte vztah pro hybnost fotonu $p = \dfrac{E}{c}$, kde $E = h\nu$ je energie fotonu a c rychlost světla. Při odvození tohoto vztahu využijte de Broglieho vztah $p = \dfrac{h}{\lambda}$, ve kterém p je hybnost částice, h Planckova konstanta a λ vlnová délka vlnění přiřazeného dané částici.

Řešení

Odvození vztahu $p = \dfrac{E}{c}$ je zřejmé ze zápisu

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{cT} = \frac{h}{c\dfrac{1}{\nu}} = \frac{h\nu}{c} = \frac{E}{c}.$$

Mezi přírůstkem kinetické energie tělesa ΔE_k a přírůstkem jeho hmotnosti Δm platí tedy při rychlostech $v \ll c$ vztah $\Delta E_k = \Delta mc^2$.

Vztah mezi změnou energie tělesa a změnou jeho hmotnosti jsme odvodili jen pro změnu kinetické energie tělesa při rychlostech $v \ll c$. Albert Einstein však obecněji předpokládal, **že se při každé změně celkové energie soustavy změní také její hmotnost;** přitom platí vztah

$$\Delta E = \Delta mc^2,$$

kde ΔE je změna celkové energie soustavy, Δm změna její hmotnosti a c rychlost světla ve vakuu. Tento vztah platí nezávisle na tom, jakým způsobem se mění energie tělesa (např. změnou jeho rychlosti, jeho deformací, změnou vnitřní energie tělesa apod.).

Ze vztahu $\Delta E = \Delta mc^2$ vyplývá, že energii žádného materiálního objektu nelze zvětšit, aniž bychom zároveň nezvětšili jeho hmotnost, a naopak, zvětšíme-li hmotnost objektu, zvětší se i jeho energie; přitom přírůstek hmotnosti Δm a přírůstek energie ΔE jsou si navzájem úměrné. Zmenší-li se energie určitého materiálního objektu, zmenší se tím podle vztahu $\Delta E = \Delta mc^2$ zároveň i jeho hmotnost, a naopak, zmenší-li se hmotnost objektu, zmenší se i jeho energie; obě veličiny Δm a ΔE jsou si i v tomto případě navzájem úměrné.

Albert Einstein usoudil, že také mezi celkovou energií soustavy E a hmotností soustavy m platí vztah

$$E = mc^2.$$

Tato rovnice vyjadřuje **Einsteinův vztah mezi hmotností a energií.**

Vztah $E = mc^2$ patří mezi nejvýznamnější výsledky speciální teorie relativity. Energie a hmotnost jsou dvě různé charakteristiky materiálních objektů (dvě různé fyzikální veličiny), podle rovnice $E = mc^2$ jsou však nerozlučně spjaty tak, že jsou si navzájem úměrné.

Při experimentálním ověřování Einsteinova vztahu $\Delta E = \Delta mc^2$ je třeba prokázat, že se při každé změně energie ΔE určitého materiálního objektu jeho hmotnost mění o $\Delta m = \dfrac{\Delta E}{c^2}$. Vzhledem

k velké hodnotě rychlosti světla odpovídá určité změně energie ΔE makroskopického tělesa obvykle jen malá změna Δm hmotnosti; v klasické fyzice lze proto hmotnost těles považovat za konstantní a nezávislou na energii. Vztah $\Delta E = \Delta mc^2$ byl však bezpečně ověřen velkým počtem údajů v jaderné fyzice. Částicím lze totiž udělit relativně velkou energii a nezávisle na sobě pak změřit jejich hmotnost (např. hmotnostním spektrografem) i energii (např. podle délky dráhy, kterou částice při brzdění urazí do úplného zastavení). Na využití důsledků plynoucích ze vztahu $\Delta E = \Delta mc^2$ je rovněž založen jaderný reaktor a jaderná nebo termonukleární bomba. Vztah $\Delta E = \Delta mc^2$ má značný význam i v astrofyzice (původ sluneční energie, energie hvězd apod.).

Je-li těleso nebo částice vzhledem k vztažné soustavě v klidu ($v = 0$), pak energii tohoto tělesa (částice) nazýváme **klidová energie** E_0. Z rovnice $E = mc^2$ vyplývá, že mezi klidovou energií E_0 a klidovou hmotností m_0 platí vztah $E_0 = m_0c^2$. Celková energie tělesa E se pak rovná součtu klidové energie E_0 a kinetické energie E_k; je tedy $E = E_0 + E_k$.

Pro celkovou energii soustavy $E = mc^2$ platí **zákon zachování energie,** podle něhož **celková energie izolované soustavy zůstává při všech dějích probíhajících uvnitř soustavy konstantní.** V klasické fyzice zákon zachování energie nesouvisí se zákonem zachování hmotnosti; z hlediska klasické fyziky jsou to dva zcela odlišné zákony. Podle speciální teorie relativity je však mezi těmito zákony úzká souvislost; platí-li totiž pro celkovou hmotnost izolované soustavy M = konst., musí platit také Mc^2 = konst., a naopak. Zákon zachování energie a zákon zachování hmotnosti lze tedy ve speciální teorii relativity považovat za dvě různé formy téhož fyzikálního zákona.

Zákon zachování hmotnosti a energie patří společně se zákonem zachování hybnosti mezi nejobecnější fyzikální zákony.

► **PŘÍKLAD 10**

Určete přírůstek hmotnosti jednoho kilogramu vody při ohřátí z 0 °C na 100 °C.

Řešení

Měrná tepelná kapacita vody je přibližně $4{,}2 \,.\, 10^3\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}\,.\,K^{-1}}$;

proto se při ohřátí vody o hmotnosti 1 kg o 100 °C zvětší její vnitřní energie o $\Delta E \doteq 4{,}2 \,.\, 10^5$ J. Pro přírůstek hmotnosti Δm pak dostáváme

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \doteq \frac{4{,}2 \,.\, 10^5 \text{ J}}{(3 \,.\, 10^8 \text{ m} \,.\, \text{s}^{-1})^2} \doteq 5 \,.\, 10^{-12} \text{ kg}.$$

Poznámka Energie, kterou dodáváme makroskopickým tělesům v běžném životě (např. při zahřívání tělesa, při zvětšení jeho rychlosti apod.), je relativně malá, a proto je odpovídající přírůstek hmotnosti ve srovnání s celkovou hmotností tělesa zanedbatelný. V důsledku toho lze v běžném životě považovat hmotnost tělesa prakticky za konstantní a nezávislou na jeho energii.

► PŘÍKLAD 11

Odvoďte vztah pro vazební energii jádra atomu.

Řešení

Protony a neutrony se v jádře atomu navzájem přitahují, a proto k rozdělení jádra na Z protonů a N neutronů je třeba jádru dodat určitou energii. Energie potřebná k rozložení jádra na volné nukleony se nazývá **vazební energie jádra** E_j. Soustava Z volných protonů a N volných neutronů má tedy větší energii než jádro atomu, které se z těchto částic skládá, a podle rovnice $\Delta m = \frac{E_j}{c^2}$ má také větší klidovou hmotnost. Rozdíl mezi klidovou hmotností volných nukleonů, z nichž se skládá jádro, a klidovou hmotností jádra atomu se nazývá **hmotnostní úbytek** Δm.* Existence hmotnostního úbytku je v zřejmém rozporu s klasickou fyzikou, je však nutným důsledkem Einsteinova vztahu mezi hmotností a energií.

Z definice hmotnostního úbytku vyplývá vztah

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_j, \tag{9}$$

---

* V literatuře věnované jaderné fyzice se hmotnostní úbytek často také značí symbolem B_j.

kde m_p je klidová hmotnost volného protonu, m_n klidová hmotnost volného neutronu a m_j klidová hmotnost jádra. Poněvadž klidové hmotnosti protonu, neutronu a jader atomů lze přesně změřit, lze podle rovnice (9) určit hmotnostní úbytek Δm jádra atomu experimentálně. Vazební energii jádra atomu pak vypočteme z rovnice

$$E_j = \Delta mc^2 = (Zm_p + Nm_n - m_j)\, c^2. \tag{10}$$

Poznámka Jestliže rozložíme soustavu navzájem se přitahujících částic na jednotlivé volné částice, pak rozdíl mezi součtem hmotností volných částic a hmotností soustavy se v principu projevuje i u chemických reakcí; zde je však tento rozdíl neměřitelně malý. Např. k rozdělení molekuly vodíku H_2 na dva samostatné atomy je třeba molekule H_2 dodat energii asi $7{,}6 \,.\, 10^{-19}$ J $\doteq$ 4,7 eV* ([3], str. 294). Dva samostatné atomy vodíku mají tedy podle vztahu $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$ větší hmotnost než molekula vodíku; rozdíl hmotností je však zde zanedbatelně malý. Naproti tomu k oddělení protonu a neutronu v jádře deuteronu (deuteron je částice, která se skládá z protonu a neutronu) je zapotřebí energie asi $3{,}6 \,.\, 10^{-13}$ J $\doteq$ 2,2 MeV (viz př. 12). Větší vazební energii odpovídá pak větší hmotnostní úbytek, který již lze experimentálně zjistit.

► PŘÍKLAD 12

Klidová hmotnost deuteronu (částice složené z protonu a neutronu) je $m_d \doteq 3{,}3433 \,.\, 10^{-27}$ kg; klidové hmotnosti protonu a neutronu jsou $m_p \doteq 1{,}6726 \,.\, 10^{-27}$ kg a $m_n \doteq 1{,}6749 \,.\, 10^{-27}$ kg. Vysvětlete, proč je součet klidových hmotností protonu a neutronu větší než klidová hmotnost deuteronu, a z rozdílu těchto hmotností vypočtěte vazební energii deuteronu.

Řešení

Při oddělení protonu a neutronu je třeba vykonat práci, která se rovná vazební energii deuteronu (tj. energii potřebnou k oddělení protonu a neutronu). Soustava skládající se z volného protonu a neutronu má tedy větší energii než deuteron a podle rovnice

---

* Elektronvolt (eV) je jednotka energie používaná zejména v jaderné fyzice a ve fyzice elektronového obalu; 1 eV $\doteq 1{,}6022 \,.\, 10^{-19}$ J. Přesnější převodní vztah mezi jednotkou eV a J je uveden v příloze IV.

$\Delta m = \dfrac{\Delta E}{c^2}$ má také větší klidovou hmotnost. Rozdíl mezi součtem klidových hmotností volného protonu a neutronu a klidovou hmotností deuteronu je hmotnostní úbytek deuteronu.

Ze známého hmotnostního úbytku Δm lze pak vazební energii deuteronu E_j vypočítat z rovnice

$$E_j = \Delta mc^2 = (m_p + m_n - m_d)c^2 =$$
$$= 4{,}2\,.\,10^{-30}\,.\,(2{,}997\,9\,.\,10^8)^2\ \mathrm{J} \doteq 4\,.\,10^{-30}\,.\,9\,.\,10^{16}\ \mathrm{J} =$$
$$= 3{,}6\,.\,10^{-13}\ \mathrm{J} \doteq 2{,}2\ \mathrm{MeV}.$$

Poznámka Při rozložení deuteronu na proton a neutron je třeba deuteronu dodat vazební energii; při vytvoření deuteronu z protonu a neutronu se vazební energie naopak uvolňuje. Experimentálně bylo skutečně zjištěno, že se při vytvoření deuteronu zachycením pomalých neutronů ve vodíku uvolňuje energie 2,2 MeV. Je však třeba zdůraznit, že energie není samostatná fyzikální realita (jako např. částice nebo pole), ale jen **fyzikální veličina,** která je vždy vázána na určitý **materiální objekt.** Např. energie, která se „uvolní" při vytvoření deuteronu z volného protonu a neutronu, je energie vznikajícího záření γ a kinetická energie vytvořeného atomu deuteria.

▶ PŘÍKLAD 13

Vypočítejte vazební energii připadající na jeden nukleon jádra uranu $^{238}_{92}\mathrm{U}$ a porovnejte ji s vazební energií připadající na jeden nukleon jádra jódu $^{127}_{53}\mathrm{I}$. Relativní atomová hmotnost uranu $A_{rU} \doteq 238{,}05$, relativní atomová hmotnost jódu $A_{rI} \doteq 126{,}90$.

Řešení

Hmotnost jádra uranu lze vypočítat ze vztahu $m_j \doteq A_{rU} m_u$, kde $m_u \doteq 1{,}660\,5\,.\,10^{-27}$ kg je atomová hmotnostní konstanta.*

* Při výpočtu hmotnosti jádra uranu podle vztahu $m_j \doteq A_{rU} m_u$ jsme zanedbali hmotnost elektronů v atomu uranu; přesněji bychom měli psát $m_a = A_{rU} m_u$, kde m_a je hmotnost atomu uranu. Z tohoto důvodu je výpočet v př. 13 pouze přibližný.

Hmotnostní úbytek jádra uranu lze pak vyjádřit vztahem

$$\Delta m_u = Zm_p + Nm_n - m_j = Zm_p + Nm_n - A_{rU} m_u \doteq$$
$$\doteq 92\,.\,1{,}672\,6\,.\,10^{-27}\ \mathrm{kg} + 146\,.\,1{,}674\,9\,.\,10^{-27}\ \mathrm{kg} -$$
$$- 238{,}05\,.\,1{,}660\,5\,.\,10^{-27}\ \mathrm{kg} \doteq 3{,}132\,6\,.\,10^{-27}\ \mathrm{kg}.$$

Vazební energie jádra uranu je určena vztahem

$$E_{jU} = \Delta m_U c^2 \doteq 3{,}132\,6\,.\,10^{-27}\,.\,(2{,}997\,9\,.\,10^8)^2\ \mathrm{J} \doteq$$
$$\doteq 2{,}815\,4\,.\,10^{-10}\ \mathrm{J} \doteq 1\,757{,}2\ \mathrm{MeV}.$$

Na jeden nukleon v jádře uranu $^{238}_{92}\mathrm{U}$ připadá tedy vazební energie

$$\varepsilon_{jU} = \frac{E_{jU}}{A} \doteq \frac{1\,757{,}2\ \mathrm{MeV}}{238} \doteq 7{,}4\ \mathrm{MeV}.$$

Provedeme-li analogické výpočty pro jód $^{127}_{53}\mathrm{I}$, dostaneme

$$\Delta m_I \doteq 53\,.\,1{,}672\,6\,.\,10^{-27}\ \mathrm{kg} + 74\,.\,1{,}674\,9\,.\,10^{-27}\ \mathrm{kg} -$$
$$- 126{,}90\,.\,1{,}660\,5\,.\,10^{-27}\ \mathrm{kg} \doteq 1{,}872\,9\,.\,10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

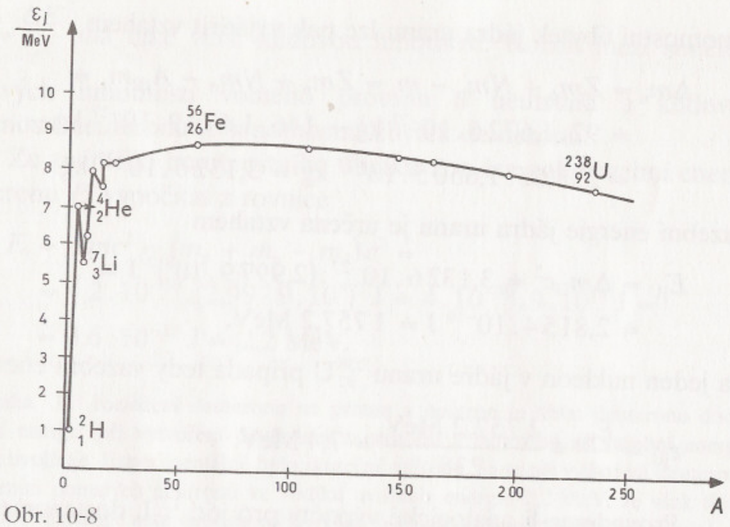
$$E_{jI} = 1{,}872\,9\,.\,10^{-27}\,.\,(2{,}997\,9\,.\,10^8)^2\ \mathrm{J} \doteq 1{,}683\,2\,.\,10^{-10}\ \mathrm{J} \doteq$$
$$\doteq 1\,050{,}6\ \mathrm{MeV}$$

$$\varepsilon_{jI} \doteq \frac{1\,050{,}6\ \mathrm{MeV}}{127} \doteq 8{,}3\ \mathrm{Mev}.$$

Z řešení příkladu vyplývá, že vazební energie připadající na jeden nukleon jádra uranu $^{238}_{92}\mathrm{U}$ je menší než vazební energie připadající na jeden nukleon jádra jodu $^{127}_{53}\mathrm{I}$.

Poznámka Podobným způsobem jako v př. 13 bychom mohli vypočítat vazební energie připadající na jeden nukleon také u dalších jader. Závislost této energie na počtu nukleonů v jádře je znázorněna na obr. 10-8. Z grafu na obr. 10-8 vyplývá, že největší vazební energii ε_j připadající na jeden nukleon mají jádra prvků nacházejících se uprostřed Mendělejevovy tabulky, kdežto jádra prvků umístěných na začátku nebo na konci Mendělejevovy tabulky mají tuto energii menší.

Různost vazebních energií připadajících na jeden nukleon v jádrech různých prvků lze využít při uvolňování jaderné energie ([37], str. 1073). Předpokládejme, že



Obr. 10-8

určité jádro J se rozdělí na dvě jádra J_1 a J_2. Můžeme si představit, že tento děj je složen ze dvou jaderných procesů: z úplného rozložení jádra J na volné protony a neutrony, k čemuž je nutno **dodat** vazební energii E_j, a z jejich složení v jádra J_1 a J_2, přičemž se **uvolní** energie $E_{j1} + E_{j2}$ rovná součtu vazebních energií obou těchto jader. Při rozdělení jádra J na dvě jádra J_1 a J_2 se tedy celkem uvolní energie

$$\Delta E = E_{j1} + E_{j2} - E_j . \tag{11}$$

Tato energie je kladná, tj. celý děj je exotermický, je-li

$$E_{j1} + E_{j2} > E_j .$$

Pro vazební energie připadající na jeden nukleon v jádrech J, J_1 a J_2 platí

$$\varepsilon_j = \frac{E_j}{A}, \qquad \varepsilon_{j1} = \frac{E_{j1}}{A_1}, \qquad \varepsilon_{j2} = \frac{E_{j2}}{A_2} . \tag{12}$$

Dosadíme-li z rovnic (12) do rovnice (11), dostaneme

$$\Delta E = A_1\varepsilon_{j1} + A_2\varepsilon_{j2} - A\varepsilon_j . \tag{13}$$

Poněvadž však pro nukleonová čísla A_1, A_2 a A platí

$$A = A_1 + A_2 ,$$

dostaneme po dosazení do vztahu (13)

$$\Delta E = A_1\varepsilon_{j1} + A_2\varepsilon_{j2} - A_1\varepsilon_j - A_2\varepsilon_j = $$
$$= A_1(\varepsilon_{j1} - \varepsilon_j) + A_2(\varepsilon_{j2} - \varepsilon_j) . \tag{14}$$

Kdyby vazební energie připadající na jeden nukleon byla pro všechna jádra stejná, platilo by $\varepsilon_{j1} = \varepsilon_j$, $\varepsilon_{j2} = \varepsilon_j$ a celková uvolněná energie by se rovnala nule ($\Delta E = 0$). Při rozpadu jádra $^{238}_{92}$U na dvě jádra ležící ve středu Mendělejevovy tabulky je však podle obr. 10-8 $\varepsilon_{j1} > \varepsilon_j$ a $\varepsilon_{j2} > \varepsilon_j$ a podle vztahu (14) je pak $\Delta E > 0$. Různost vazebních energií připadajících na jeden nukleon má tedy při uvolňování jaderné energie zásadní význam.

Z průběhu křivky na obr. 10-8 lze analogickou úvahou odvodit, že jaderná energie se uvolňuje také při skládání jader prvků umístěných na začátku Mendělejevovy tabulky v jádra těžší (termonukleární reakce).

► PŘÍKLAD 14

Těleso má klidovou hmotnost $m_0 = 1$ kg. Určete jeho klidovou energii a porovnejte ji s energií, která se uvolní dokonalým spálením 1 kg uhlí o výhřevnosti $H = 3 . 10^7$ J.kg^{-1}.

Řešení

Klidová energie tělesa o hmotnosti 1 kg je $E_0 = m_0c^2 = 1 . 9 . 10^{16}$ J $= 9 . 10^{16}$ J. Spálením uhlí o hmotnosti 1 kg se uvolní energie $E = 3 . 10^7$ J; poměr obou energií je tedy $\dfrac{E_0}{E} = 3 . 10^9$.

Poznámka Z řešení příkladu vyplývá, že těleso o hmotnosti 1 kg z jakékoli látky má obrovskou klidovou energii. Tato energie je asi z 99 % určena klidovou energií částic, ze kterých se těleso skládá (hlavně z protonů a neutronů). Zbytek klidové energie tělesa je obsažen ve vazební energii jader atomů (viz př. 11 na str. 194), v kinetické a potenciální energii molekul (v termice se tato energie nazývá energií vnitřní), v energii vzbuzených (excitovaných) atomů apod.

Úplné praktické využití celkové klidové energie tělesa však prozatím není možné. Např. při štěpení jaderného paliva lze využít nejvýše 0,1 % jeho klidové energie. To znamená, že z jedné tuny jaderného paliva lze štěpením získat nejvýše $9 . 10^{16}$ J $\doteq$ $\doteq$ 25 miliard kWh energie. I když je to jen malý zlomek celkové klidové energie jaderného paliva, má dnes již velký praktický význam (jaderné elektrárny, dopravní prostředky poháněné jadernou energií apod.).

Energie uvolněná štěpením jaderného paliva je kinetická energie úlomků vzniklých rozštěpením atomů jaderného paliva a energie vzniklého elektromagnetického a korpuskulárního záření.

► PŘÍKLAD 15

Elektron má klidovou hmotnost $m_0 \doteq 9 . 10^{-31}$ kg. Určete jeho klidovou energii.

Řešení

$$E_0 = m_0c^2 \doteq 9 \,.\, 10^{-31} \,.\, (3 \,.\, 10^8)^2 \text{ J} = 8{,}1 \,.\, 10^{-14} \text{ J} \doteq 0{,}51 \text{ MeV}.$$

Klidová energie elektronu je 0,51 MeV.

Poznámka Podle klasické mechaniky je celková energie volné nepohybující se částice nulová. Podle speciální teorie relativity je klidová energie částice $E_0 > 0$ a je jednoznačně určena svou klidovou hmotností podle vztahu $E_0 = m_0c^2$.

Pro správné pochopení významu klidové energie částice $E_0 = m_0c^2$ je důležitá otázka, zda je možné za vhodných experimentálních podmínek přeměnit tuto energii v jiné formy energie, které by se daly např. prakticky využít. Takové děje skutečně existují, a proto klidová energie není jen formální veličina určená vztahem $E_0 = m_0c^2$, ale určitý druh energie.

Elektron je stabilní částice a za obvyklých okolností nelze jeho klidovou energii využít. V jaderné fyzice však bylo zjištěno, že při setkání elektronu s pozitronem (částice, která má stejnou klidovou hmotnost jako elektron, má však kladný náboj) obě částice zmizí a místo nich se objeví zpravidla 2 fotony záření γ (elektromagnetické vlnění o velmi krátké vlnové délce). Experimentálně bylo skutečně potvrzeno, že pro úhrnnou energii E těchto fotonů vždy platí $E \geqq 1{,}02$ MeV.*

Celkově lze shrnout, že před srážkou se soustava skládala z elektronu a pozitronu, po srážce se místo těchto částic objeví fotony záření γ. Přitom však platí zákon zachování energie (součet klidových a kinetických energií elektronu a pozitronu před srážkou se rovná součtu energií fotonů γ vzniklých po srážce) a zákon zachování relativistické hmotnosti (relativistická hmotnost elektronu a pozitronu před srážkou se rovná relativistické hmotnosti fotonů γ vzniklých po srážce). Z fyzikálního hlediska je proto nesprávné vykládat tento jev jako přeměnu hmotnosti na energii.

► PŘÍKLAD 16

Podle rovnice $E = mc^2$ má každý materiální objekt s celkovou energií E hmotnost $m = \dfrac{E}{c^2}$. Určete podle této rovnice hmotnost fotonu monofrekvenčního světla o vlnové délce $\lambda = 400$ nm.

---

* Energie fotonů záření γ může být větší než součet klidových energií elektronu a pozitronu, neboť elektron a pozitron mohou mít před srážkou také určitou kinetickou energii.

Řešení

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda c} = \frac{6{,}626 \,.\, 10^{-34}}{4 \,.\, 10^{-7} \,.\, 3 \,.\, 10^8} \text{ kg} \doteq 5{,}52 \,.\, 10^{-36} \text{ kg}.$$

Hmotnost fotonu monofrekvenčního světla o vlnové délce $\lambda = 400$ nm je $5{,}52 \,.\, 10^{-36}$ kg.

Poznámka Klidová hmotnost fotonu m_0 je rovna nule; z řešení příkladu však vyplývá, že relativistická hmotnost fotonu m pohybujícího se ve vakuu rychlostí světla je vždy různá od nuly.

Foton se tedy chová jako částice, která má energii $E = h\nu$, hmotnost* $m = \dfrac{E}{c^2}$ a hybnost $p = \dfrac{E}{c}$. Foton tedy není „kvantum energie“, ale materiální objekt, který lze charakterizovat různými fyzikálními veličinami. Vlastnosti fotonu však nelze srovnávat s vlastnostmi malých mechanických částic; podrobněji je vysvětluje kvantová fyzika.

► PŘÍKLAD 17

Hustota zářivého toku Slunce ve střední vzdálenosti Země od Slunce $r \doteq 1{,}5 \,.\, 10^{11}$ m je určena solární konstantou $K = 1\,327 \text{ W} \,.\, \text{m}^{-2}$. Zjistěte celkovou energii vyzářenou Sluncem za jednu sekundu a úbytek hmotnosti Slunce za tuto dobu.

Řešení

Slunce vyzáří za dobu $\Delta t = 1$ s energii

$$\Delta E = 4\pi r^2 K \Delta t \doteq 4 \,.\, 3{,}14 \,.\, 1{,}5^2 \,.\, 10^{22} \,.\, 1{,}327 \,.\, 10^3 \,.\, 1 \text{ J} \doteq$$
$$\doteq 3{,}75 \,.\, 10^{26} \text{ J}.$$

Úbytek hmotnosti Slunce za tuto dobu je tedy

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{3{,}75 \,.\, 10^{26}}{9 \,.\, 10^{16}} \text{ kg} \doteq 4{,}2 \,.\, 10^9 \text{ kg} = 4{,}2 \,.\, 10^6 \text{ t}.$$

---

* Někteří fyzikové pojem hmotnosti fotonu nezavádějí (viz např. knihu V. A. Ugarov: Specialnaja teorija otnositeľnosti, Moskva 1977, str. 266).

(viz přibližný vzorec v příloze II). Z relativistického vztahu pro kinetickou energii pak dostáváme

$$E_k \approx m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\,m_0v^2.$$

Vztah pro kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}\,m_0v^2$ platný při $v \ll c$ je tedy zvláštním případem obecného relativistického vztahu pro kinetickou energii.

▶ PŘÍKLAD 19

Vypočtěte kinetickou energii, kterou by měla raketa o klidové hmotnosti 10 tun, kdyby se pohybovala rychlostí $0{,}98c$.

Řešení

$$E_k = m_0c^2(\gamma - 1) \doteq 10^4\,.\,9\,.\,10^{16}(5 - 1)\ \mathrm{J} = 3{,}6\,.\,10^{21}\ \mathrm{J} =$$
$$= 10^{15}\ \mathrm{kWh}.$$

Poznámka Při vypuštění rakety by si však tato raketa vyžádala ještě další energii potřebnou k vymanění z dosahu zemské přitažlivosti a k zabrzdění rakety u cíle. Velmi velkou energii by si vyžádal také zpětný návrat rakety. Uvážíme-li např., že 10 tun jaderného paliva může při štěpné reakci uvolnit maximálně $2{,}5\,.\,10^{10}$ kWh (viz př. 14), vidíme, že lety s tak velkou rychlostí nejsou prozatím možné.

▶ PŘÍKLAD 20

Jakou práci je třeba vykonat, aby částice s klidovou hmotností m_0 zvětšila svou rychlost z $0{,}6c$ na $0{,}8c$?

Řešení

Hledaná práce se rovná rozdílu kinetických energií částice při rychlostech $0{,}8c$ a $0{,}6c$

$$W = E_{k2} - E_{k1} = m_0c^2(\gamma_2 - 1) - m_0c^2(\gamma_1 - 1) =$$
$$= m_0c^2(\gamma_2 - \gamma_1).$$

Podle tabulek (viz příloha I) odpovídá rychlostem $v_2 = 0{,}8c$ a $v_1 = 0{,}6c$ Lorentzův koeficient $\gamma_2 = 1{,}667$ a $\gamma_1 = 1{,}250$. Pro hledanou práci proto dostáváme

$$W = m_0c^2(1{,}667 - 1{,}250) \doteq 0{,}42m_0c^2.$$

Poznámka Podle klasické fyziky bychom hledanou práci vypočetli ze vztahu

$$W = E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2}\,m_0v_2^2 - \frac{1}{2}\,m_0v_1^2 = \frac{1}{2}\,m_0(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\,m_0(0{,}8^2 - 0{,}6^2)c^2 =$$
$$= 0{,}14m_0c^2.$$

Porovnáme-li tento výsledek s výsledkem, který jsme dostali s použitím relativistického vztahu pro kinetickou energii, vidíme, že klasický vztah pro kinetickou energii není použitelný při rychlostech srovnatelných s rychlostí světla.

▶ PŘÍKLAD 21

Urychlovač protonů poskytuje protony s kinetickou energií přibližně 500 GeV. Vypočtěte, kolikrát v tomto urychlovači vzroste hmotnost protonů a jaké maximální rychlosti protony dosáhnou. Klidová hmotnost protonu je $m_0 \doteq 1{,}67\,.\,10^{-27}$ kg, klidová energie protonu $E_0 \doteq 0{,}938$ GeV.

Řešení

Celková energie protonu $E = mc^2 = \gamma m_0c^2$ je rovna součtu jeho klidové energie $E_0 = m_0c^2$ a energie kinetické E_k. Z rovnice $\gamma m_0c^2 = m_0c^2 + E_k$ pak dostáváme

$$\gamma = \frac{m_0c^2 + E_k}{m_0c^2} = \frac{0{,}938\ \mathrm{GeV} + 500\ \mathrm{GeV}}{0{,}938\ \mathrm{GeV}} \doteq 534 \doteq 500.$$

Z rovnice $\gamma = \dfrac{m}{m_0} \doteq 500$ vyplývá, že hmotnost protonu s kinetickou energií 500 GeV je přibližně 500krát větší než jeho hmotnost klidová. Hodnotě Lorentzova koeficientu $\gamma \doteq 500$ pak odpovídá rychlost $v \doteq 0{,}999\,998c$.

▶ PŘÍKLAD 22

Sestrojte graf vyjadřující

a) závislost celkové energie tělesa o klidové hmotnosti 1 kg na jeho rychlosti,

b) závislost kinetické energie tělesa o klidové hmotnosti 1 kg na jeho rychlosti.

energie soustavy před srážkou je $2m_0c^2 + \Delta E_k$ a po srážce má soustava jen klidovou energii M_0c^2, lze zákon zachování energie napsat ve tvaru

$$2m_0c^2 + \Delta E_k = M_0c^2. \tag{15}$$

Hmotnost soustavy před srážkou je $2m = 2\gamma m_0$, po srážce je M_0; zákon zachování relativistické hmotnosti platí proto ve tvaru

$$2\gamma m_0 = M_0. \tag{16}$$

Jak jsme již uvedli, zákon zachování energie a zákon zachování hmotnosti lze ve speciální teorii relativity považovat za dvě různé formy téhož fyzikálního zákona (viz str. 193). Dokažte proto, že z rovnice (15) vyplývá rovnice (16) a naopak z rovnice (16) vyplývá rovnice (15).

▶ PŘÍKLAD 24

Jaké rychlosti dosáhne elektron v elektrickém poli, projde-li mezi dvěma body, mezi kterými je napětí U? Závislost rychlosti v elektronu na urychlujícím napětí U vyjádřete rovněž tabulkou a grafem. Počáteční rychlost elektronu je rovna nule.

Řešení

Pro malé hodnoty urychlujícího napětí U, pro které $v \ll c$, lze hledanou rychlost v vypočítat ze vztahu $\frac{1}{2}m_0v^2 = eU$, z něhož vyplývá

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}.$$

Při větším napětí U mohou však elektrony v elektrickém poli získat i velmi velkou rychlost $v \to c$, a proto je třeba kinetickou energii elektronů obecně vyjádřit relativistickým vztahem $E_k = m_0c^2(\gamma - 1)$.

Ze vztahu mezi kinetickou energií elektronu a prací vykonanou elektrickým polem

$$m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = eU$$

po úpravách pak dostáváme pro hledanou rychlost v vztah

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{m_0c^2 + eU}\right)^2},$$

který platí pro libovolná urychlující napětí U.

Jestliže $U \to \infty$, blíží se hodnota zlomku pod odmocninou k nule a rychlost elektronu v se blíží rychlosti světla ($v \to c$). Odtud vyplývá, že při sebevětším urychlovacím napětí U nemůže rychlost elektronu překročit rychlost světla ve vakuu. Podle klasického vztahu $v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}$ by se rychlost elektronu s rostoucím napětím neomezeně zvyšovala.

Upravme vztah pro rychlost elektronu urychlovaného elektrickým polem na tvar

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{eU}{m_0c^2}\right)^2}}.$$

Je-li

$$x = \frac{eU}{m_0c^2} \ll 1,$$

lze složený zlomek pod odmocninou upravit užitím přibližného vztahu

$$\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x$$

na tvar

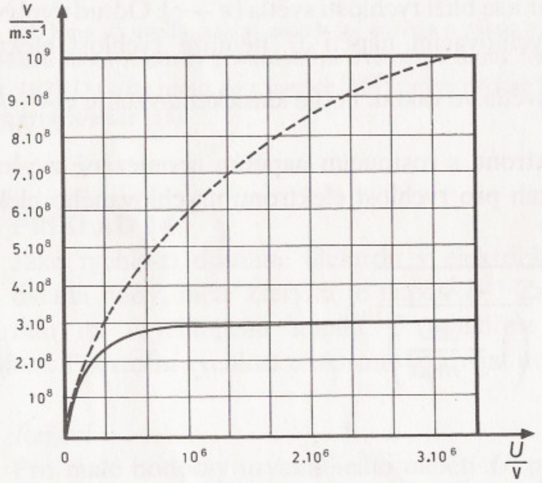
$$\frac{1}{\left(1 + \frac{eU}{m_0c^2}\right)^2} \approx 1 - 2\frac{eU}{m_0c^2}.$$

Po dosazení tohoto výrazu do vztahu pro rychlost v pak dostáváme

$$v \approx \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}.$$

Při malých napětích U, při nichž $eU \ll m_0c^2$, lze tedy rychlost elektronu v vypočítat užitím zákonů klasické fyziky.

Tabulku vyjadřující závislost rychlosti elektronu na urychlovacím napětí U (viz příloha III) dostaneme dosazením číselných hodnot do obecného vztahu pro rychlost elektronu; užitím této tabulky pak sestrojíme graf (obr. 10—10).



Obr. 10-10

• Úlohy

1. Určete rychlost, při níž je relativistická hybnost částice dvakrát větší než hybnost vypočtená podle klasické fyziky.

2. Jaká je rychlost protonu, jestliže jeho hybnost $p = 1{,}036 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$? Klidová hmotnost protonu a některých dalších částic je uvedena v příloze IV.

3. Těleso o klidové hmotnosti 2 kg se vzhledem k soustavě K′ pohybuje ve směru osy x' rychlostí $\frac{3}{5}c$. Soustava K′ se vzhledem k jiné inerciální soustavě K pohybuje ve směru osy x' rychlostí $\frac{1}{2}c$. Určete hmotnost a hybnost tělesa v soustavách K′ a K.

4. Částice s klidovou hmotností m_0 se vzhledem k soustavě K pohybuje rychlostí $0{,}8c$ a narazí na částici o stejné klidové hmotnosti, jež je vzhledem k soustavě K v klidu. Určete rychlost a klidovou hmotnost částice, která se vytvoří po dokonale nepružné srážce obou částic.

5. Proton se vzhledem k dané vztažné soustavě pohybuje rychlostí o velikosti $2{,}4 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete v této vztažné soustavě jeho relativistickou hmotnost.

6. Na lineárním urychlovači Stanfordovy univerzity v USA získávají elektrony rychlost jen o $1{,}5\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$ menší, než je rychlost světla ve vakuu. Jaká je relativistická hmotnost elektronů při této rychlosti? Porovnejte tuto hmotnost s klidovou hmotností atomu železa.

7. Určete poměr relativistické a klidové hmotnosti částice pohybující se rychlostí jen o 0,01 % menší než světlo ve vakuu.

8. Při jaké rychlosti částice je její relativistická hmotnost o 1 % větší než hmotnost klidová?

9. Jakou rychlostí se pohybuje proton, jestliže jeho relativistická hmotnost se rovná klidové hmotnosti částice α?

10. Těleso se vzhledem k dané vztažné soustavě pohybuje rychlostí $0{,}8c$. Určete poměr mezi jeho hustotou v této vztažné soustavě a jeho hustotou klidovou.

11. Klidová hustota tělesa je ϱ_0. Určete rychlost vztažné soustavy vzhledem k danému tělesu, ve které bude jeho hustota o 10 % větší než klidová hustota ϱ_0.

12. Tyč pohybující se ve směru své vlastní osy má v dané vztažné soustavě hmotnost o 10 % větší, než je její hmotnost klidová. O kolik procent je přitom její délka menší v porovnání s délkou klidovou?

13. Těleso pohybující se vzhledem k soustavě K má všechny rozměry ve směru pohybu dvakrát menší než totéž těleso, které je v soustavě K v klidu. Jaký je poměr mezi relativistickou a klidovou hmotností tělesa?

14. Elektron a pozitron mají stejnou klidovou hmotnost, a proto mají také stejnou klidovou energii $E_0 = m_0c^2 = 0{,}51$ MeV (viz kap. 10, př. 15). Vysvětlete, proč při setkání elektronu s pozitronem, kdy se vytvoří dva fotony záření γ, může být úhrnná energie obou fotonů větší než 1,02 MeV. Neodporuje tento poznatek zákonu zachování energie?

15. Led o teplotě 0 °C a hmotnosti 1 kg se táním přeměnil na vodu téže teploty. Určete rozdíl mezi hmotností vody a hmotností ledu. Měrné skupenské teplo tání ledu je $334\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

16. Žárovka o příkonu 100 W svítí trvale po dobu jednoho roku. Předpokládáme, že asi 3 % dodávané energie se v žárovce mění v energii světelnou. Jaká je hmotnost světla vyzářeného žárovkou za jeden rok? Jak dlouho by musela žárovka svítit, aby vyzářené světlo mělo hmotnost 1 g?

17. Určete v joulech a v elektronvoltech klidovou energii protonu, neutronu a částice α. Klidové hmotnosti těchto částic jsou uvedeny v příloze IV.

18. Určete vazební energii částice α v MeV.

19. Určete průměrnou vazební energii odpovídající jednomu nukleonu nuklidu $^{16}_{8}O$. Relativní atomová hmotnost nuklidu $A_r = 15{,}994\,915$, atomová hmotnostní konstanta $m_u = 1{,}660\,540 \,.\, 10^{-27}$ kg.

20. Voda vzniká syntézou vodíku a kyslíku podle rovnice $2\,H_2 + O_2 = 2\,H_2O + 5{,}7 \,.\, 10^5$ kJ. Z rovnice je patrné, že při sloučení dvou molů vodíku a jednoho molu kyslíku vznikají dva moly vody a současně se uvolňuje energie $5{,}7 \,.\, 10^5$ kJ. Zjistěte při této reakci úbytek hmotnosti vody o látkovém množství 1 mol.

21. Při dělení jádra uranu $^{235}_{92}U$ se uvolňuje energie asi 200 MeV. Určete úbytek hmotnosti při rozpadu uranu o látkovém množství 1 mol. Jakou část celkové klidové energie $^{235}_{92}U$ lze využít při jeho štěpení?

22. Jakou práci je třeba vykonat, aby částice o klidové hmotnosti m_0 zvětšila svou rychlost a) z nulové rychlosti na rychlost $0{,}9c$, b) z rychlosti $0{,}9c$ na rychlost $0{,}99c$? Která z obou prací je větší? Vysvětlete užitím grafu na obr. 10-9.

23. Jaká energie je potřebná k urychlení kosmické lodi o hmotnosti 10 t na rychlost $0{,}99c$? Jaké energie je třeba k tomu, aby touto rychlostí vykonala loď cestu k vzdálené hvězdě a vrátila se nazpět na Zemi? Vliv gravitačního pole na let kosmické lodi neberte v úvahu.

Porovnejte energii nutnou k této cestě s energií, kterou by bylo možné získat štěpením jaderného paliva $^{235}_{92}U$ o klidové hmotnosti 10 t.

24. Proton se pohybuje rychlostí, při níž je jeho relativistická hmotnost 1,5krát větší než jeho hmotnost klidová. Určete v MeV celkovou energii protonu a jeho energii kinetickou.

25. Jakou rychlostí se pohybuje částice, jestliže její celková energie je dvojnásobkem její energie klidové?

26. Určete rychlost, při níž je kinetická energie částice rovna její energii klidové.

27. Synchrofázotron udělil protonu kinetickou energii 10^4 MeV. Jaká je jeho rychlost?

28. Určete hybnost protonu, jehož kinetická energie je 500 MeV.

29. Pohybující se částice má v laboratorní soustavě střední dobu života $\tau = 1{,}76 \,.\, 10^{-5}$ s a kinetickou energii $E_k = 7m_0c^2$. Určete střední dobu života částice τ_0 v její klidové soustavě.

30. Jakou rychlost získá elektron, je-li urychlen napětím 10^6 V? Jakou rychlost by v tomto případě získal elektron podle zákonů klasické fyziky? Náboj elektronu $e \doteq 1{,}6 \,.\, 10^{-19}$ C.

31. Určete napětí potřebné k urychlení elektronu na rychlost $0{,}99c$.

32. Elektron o klidové hmotnosti m_0 má vzhledem k dané vztažné soustavě hybnost p. Určete v této vztažné soustavě jeho kinetickou energii.

11 ALBERT EINSTEIN

Albert Einstein je všeobecně považován za největšího fyzika dvacátého století. Do povědomí širší veřejnosti vstoupil především jako tvůrce teorie relativity; ve skutečnosti však významným způsobem zasáhl i do jiných oborů fyziky.

Narodil se 14. března 1879 v bavorském městečku Ulmu. Jeho rodina se brzy přestěhovala do Mnichova a tam také Einstein v deseti letech začal studovat na gymnáziu. Měl zálibu především v matematice, fyzice a filozofii, vadil mu však nadbytek neužitečných znalostí v různých předmětech, a zejména kasárenský duch tehdejšího gymnázia, který byl v rozporu s jeho samostatným a nezávislým myšlením. Rok před dokončením studia Einstein gymnázium opustil. Poněvadž měl velmi dobré výsledky v matematice a ve fyzice, pokusil se v šestnácti letech udělat přijímací zkoušku na polytechniku ve švýcarském Curychu. Úspěšně složil zkoušky z matematiky a fyziky, ale neměl dostačující znalosti v cizích jazycích, botanice a zoologii, a proto nebyl na vysokou školu přijat. Rektor techniky mu doporučil, aby nejdříve dokončil středoškolské studium na švýcarské střední škole v Aarau. Na této vynikající škole strávil Einstein více než rok. Ve své třídě byl nejlepší v algebře, geometrii, fyzice a němčině, patřil mezi nejlepší v historii a přírodopisu, byl průměrným žákem v deskriptivní geometrii a chemii a slabým žákem v kreslení, rýsování a ve francouzštině. Na konci roku 1896 složil sedmnáctiletý Einstein s výborným prospěchem maturitu a byl bez zkoušek přijat na curyšskou polytechniku. Zde v r. 1900 složil závěrečné zkoušky a obdržel diplom. Podle šestibodové soustavy měl Einstein u závěrečných zkoušek následující známky: teoretická fyzika 5, fyzikální praktikum 5, teorie funkcí 5,5, astronomie 5, diplomová práce 4,5, celková známka 4,91.

4. $-\boldsymbol{v}$
5. a) C, b) A a B, c) jen C, d) žádné
6. $v_A = 3\ \mathrm{m.s^{-1}}$; $v_B = 5\ \mathrm{m.s^{-1}}$; $v_C \doteq 4{,}1\ \mathrm{m.s^{-1}}$
7. $89\ \mathrm{s} \doteq 1{,}5\ \mathrm{min}$

3. kapitola

1. Ze vztahu $\Delta t \doteq \frac{l_0}{c}\beta^2$ pro časový rozdíl obou paprsků Michelsonova interferometru vyplývá, že tento rozdíl je úměrný délce l_0 ramena interferometru. Kdyby Michelson a Morley zvětšili rozměry přístroje, vznikly by tím technické potíže při jeho konstrukci a navíc by se přístroj při otáčení snadno deformoval.
2. $\overline{\delta}_1 \doteq \frac{2l_0\beta^2}{\lambda} = 0{,}04$; $\overline{\delta}_2 \doteq 0{,}37$

4. kapitola

1. Podle principu relativity nezjistí pozorovatel na kosmické lodi ani při rychlosti blízké rychlosti světla žádnou odchylku od správné funkce počítače. Práci počítače lze považovat za určitý „pokus", jehož výsledek musí být podle principu relativity stejný na kosmické lodi i na Zemi; proto počítač vyřeší v obou případech týž úkol za stejnou dobu.
2. $c \doteq 3.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$

5. kapitola

1. Nemusí, musí však být $PA = PB$.
2. Správné jsou výroky b), c) a d).
3. V soustavě K′ nastane nejprve událost U_4, pak současně události U_2 a U_3 a nakonec událost U_1. V soustavě K″ je pořadí těchto událostí opačné.

6. kapitola

4. Hodiny H′ na obr. 6-2b by při rychlosti $v > c$ předstihly světlo, a proto by se v nich světelný signál nemohl pohybovat po jejich ose. Podle principu relativity musí však pokus se světelnými hodinami H′ v soustavě K′ probíhat stejně jako např. na Zemi. Hodiny H′ se proto nemohou pohybovat rychlostí $v > c$.

5. $T_0 \doteq 3{,}33.10^{-10}\ \mathrm{s}$; $\nu_0 = 3\ \mathrm{GHz}$, $T \doteq 4{,}66.10^{-10}\ \mathrm{s}$; $\nu \doteq 2{,}14\ \mathrm{GHz}$
8. $\mathrm{K_4}$; $\mathrm{K_5}$
9. $\Delta t_0 = 10\ \mathrm{min}$; $\Delta t = 41{,}1\ \mathrm{min}$
10. $\Delta t_0 \doteq 2{,}5\ \mathrm{min}$
11. $\Delta t_0 \doteq 2{,}8.10^{-10}\ \mathrm{s}$
12. $v \doteq 2{,}6.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$
13. 5 let; 3 roky
14. Nelze. Podle principu relativity jsou všechny inerciální vztažné soustavy rovnocenné a ani pomocí Dopplerova jevu nelze říci, která z nich je „ve skutečnosti" v klidu a která v pohybu. Vždy platí stejný vztah pro Dopplerův jev a vždy lze hovořit jen o vzájemném pohybu zdroje světla a pozorovatele. Podle klasické fyziky však rozlišení obou těchto pohybů je možné.
15. $\lambda = 0{,}3\ \mathrm{m}$; $\nu \doteq 1\ \mathrm{GHz}$
16. $\beta = -0{,}26$
17. $v = c\,\dfrac{\lambda_0^2 - \lambda^2}{\lambda_0^2 + \lambda^2} \doteq 7{,}1.10^4\ \mathrm{km.s^{-1}}$

7. kapitola

1. Ve vztahu pro kontrakci délek $l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ je druhá mocnina v^2; délka tyče je tedy nezávisle na orientaci rychlosti $\boldsymbol{v}$ vždy stejná.
2. Osa pohybujících se světelných hodin byla kolmá k vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$; kontrakce délky v tomto případě nenastává.
3. $l = 3{,}73\ \mathrm{m}$
4. $v = 2{,}6.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$
5. 0,866
6. 6,4 cm
7. Soustava K: $V_A \doteq 785\ \mathrm{cm^3}$; $V_B \doteq 86\ \mathrm{cm^3}$
   Soustava K′: $V'_A \doteq 86\ \mathrm{cm^3}$; $V'_B \doteq 785\ \mathrm{cm^3}$
8. 7,2 cm
9. 10 min 31 s
10. a) $5{,}97.10^{17}\ \mathrm{m}$, b) $10^{10}\ \mathrm{s}$, c) $2.10^9\ \mathrm{s}$
11. 118°
12. 59°; 31°; 90°
13. $v = 0{,}776c$
14. $l_0 = 1{,}08\ \mathrm{m}$

8. kapitola

2. 9,09 s
3. $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 30{,}5$ s
4. $v = 1{,}5 \,.\, 10^8$ m.s^{-1} ve směru ***BA***
5. $\Delta t = t_2 - t_1 = 2{,}8 \,.\, 10^{-6}$ s, $t_2 > t_1$
6. $l_0 = 4{,}5$ m

9. kapitola

2. a) 291 000 km.s^{-1}, b) $-37\,500$ km.s^{-1}
3. $-2{,}88 \,.\, 10^8$ m.s^{-1}
4. a) 8,0 m, b) 3,24 m
5. a) 16,7 min, b) 12,5 min
6. $v_{\max} \doteq 6{,}28 \,.\, 10^8$ m.s^{-1}, $v_{\max} > c$. Světelná stopa na stínítku obrazovky vzniká postupným dopadem elektronů a není materiálním objektem. Může se proto pohybovat rychlostí větší než je rychlost světla ve vakuu.
7. $\Delta u \doteq 3$ m.s^{-1}
8. $\Delta t \doteq 4{,}17 \,.\, 10^{-16}$ s; $\Delta d \doteq c\Delta t \doteq 1{,}25 \,.\, 10^{-7}$ m; $\dfrac{\Delta d}{\lambda} \doteq 0{,}25$

   Rychlost tyče v je v porovnání s rychlostí světla ve vakuu velmi malá, proto lze kontrakci její délky zanedbat.
9. $\Delta t \doteq 2{,}39 \,.\, 10^{-16}$ s; $\Delta d = c\Delta t \doteq 7 \,.\, 10^{-8}$ m; $\dfrac{\Delta d}{\lambda} = 0{,}16$

10. kapitola

1. $v \doteq 2{,}6 \,.\, 10^8$ m.s^{-1}
2. $v \doteq 2{,}7 \,.\, 10^8$ m.s^{-1}
3. K': 2,5 kg; $4{,}5 \,.\, 10^8$ kg.m.s^{-1}. K: 3,75 kg; $9{,}53 \,.\, 10^8$ kg.m.s^{-1}
4. $0{,}5c$; $2{,}3m_0$
5. $2{,}79 \,.\, 10^{-27}$ kg
6. $m_e \doteq 9{,}1 \,.\, 10^{-26}$ kg; $m_{Fe} \doteq 9{,}3 \,.\, 10^{-26}$ kg; $m_e \doteq m_{Fe}$
7. 70,7
8. $v \doteq 0{,}14c \doteq 4{,}2 \,.\, 10^7$ m.s^{-1}
9. $v \doteq 0{,}968c$

10. 2,78
11. $0{,}3c$
12. 9,1 %
13. 2
14. Neodporuje, neboť elektron a pozitron mají kromě klidové energie m_0c^2 také energii kinetickou.
15. $3{,}7 \,.\, 10^{-12}$ kg
16. $\Delta m \doteq 10^{-9}$ kg; $t \doteq 3 \,.\, 10^{13}$ s $\doteq 10^6$ r
17. $E_{0p} \doteq 1{,}503\,28 \,.\, 10^{-10}$ J $\doteq 0{,}938\,273$ GeV;
    $E_{0n} \doteq 1{,}505\,35 \,.\, 10^{-10}$ J $\doteq 0{,}939\,566$ GeV;
    $E_{0\alpha} \doteq 5{,}989\,85 \,.\, 10^{-10}$ J $\doteq 3{,}738\,572$ GeV
18. 28,3 MeV
19. 7,72 MeV
20. $3{,}2 \,.\, 10^{-9}$ kg
21. $2 \,.\, 10^{-4}$ kg; 0,1 %
22. a) $1{,}3m_0c^2$, b) $4{,}8m_0c^2$
23. $E_1 \doteq 5{,}5 \,.\, 10^{21}$ J; $E_2 = 4E_1 \doteq 2{,}2 \,.\, 10^{22}$ J; $E_3 \doteq 9 \,.\, 10^{17}$ J
24. $E \doteq 1{,}4 \,.\, 10^3$ MeV; $E_k \doteq 470$ MeV
25. $v \doteq 0{,}87c$
26. $v \doteq 0{,}87c$
27. $0{,}996c$
28. $5{,}8 \,.\, 10^{-19}$ kg.m.s^{-1}
29. $2{,}2 \,.\, 10^{-6}$ s
30. $v \doteq 2{,}83 \,.\, 10^8$ m.s^{-1}; $v_k \doteq 5{,}93 \,.\, 10^8$ m.s^{-1}
31. $U = 3{,}1$ MV
32. $E_k = E - m_0c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2$

PŘÍLOHA I

Tabulka hodnot Lorentzových koeficientů γ

V tabulce jsou uvedeny přibližné hodnoty Lorentzova koeficientu γ (popř. $\frac{1}{\gamma}$) pro zvolené hodnoty $\beta = \frac{v}{c}$. Pro β z intervalu $1 > \beta > 0{,}995$ je pro stručnost zápisu uváděna jen hodnota $1 - \beta$ (např. místo $\beta = 0{,}999\,998$ je ve čtvrtém sloupci tabulky uvedeno $1 - \beta = 2.10^{-6}$).

$\beta = \frac{v}{c}$	γ	$\frac{1}{\gamma}$	$1-\beta$
10^{-6}	$1 + 5.10^{-13}$	$1 - 5.10^{-13}$	
10^{-5}	$1 + 5.10^{-11}$	$1 - 5.10^{-11}$	
10^{-4}	$1 + 5.10^{-9}$	$1 - 5.10^{-9}$	
10^{-3}	$1 + 5.10^{-7}$	$1 - 5.10^{-7}$	
10^{-2}	$1 + 5.10^{-5}$	$1 - 5.10^{-5}$	
0,1	1,005	0,995	9.10^{-1}
0,2	1,021	0,980	8.10^{-1}
0,3	1,048	0,954	7.10^{-1}
0,4	1,091	0,917	6.10^{-1}
0,5	1,155	0,866	5.10^{-1}
0,6	1,250	0,800	4.10^{-1}
0,7	1,400	0,714	3.10^{-1}
0,8	1,667	0,600	2.10^{-1}
0,9	2,294	0,436	1.10^{-1}
0,91	2,412	0,415	9.10^{-2}
0,92	2,552	0,392	8.10^{-2}
0,93	2,721	0,368	7.10^{-2}
0,94	2,931	0,341	6.10^{-2}
0,95	3,203	0,312	5.10^{-2}
0,96	3,571	0,280	4.10^{-2}
0,97	4,113	0,243	3.10^{-2}
0,98	5,025	0,199	2.10^{-2}
0,99	7,089	0,141	1.10^{-2}

$\beta = \frac{v}{c}$	γ	$\frac{1}{\gamma}$	$1-\beta$
0,991	7,470	0,134	9.10^{-3}
0,992	7,992	0,126	8.10^{-3}
0,993	8,466	0,118	7.10^{-3}
0,994	9,142	0,109	6.10^{-3}
0,995	10,01	0,099	5.10^{-3}
	25,00	0,040	8.10^{-4}
	50,00	0,020	2.10^{-4}
	1.10^{2}	0,010	5.10^{-5}
	$2{,}5.10^{2}$	0,004	8.10^{-6}
	5.10^{2}	0,002	2.10^{-6}
	1.10^{3}	0,001	5.10^{-7}
	$2{,}5.10^{3}$	4.10^{-4}	8.10^{-8}
	5.10^{3}	2.10^{-4}	2.10^{-8}
	1.10^{4}	1.10^{-4}	5.10^{-9}
	$2{,}5.10^{4}$	4.10^{-5}	8.10^{-10}
	5.10^{4}	2.10^{-5}	2.10^{-10}
	1.10^{5}	1.10^{-5}	5.10^{-11}
	$2{,}5.10^{5}$	4.10^{-6}	8.10^{-12}
	5.10^{5}	2.10^{-6}	2.10^{-12}
	1.10^{6}	1.10^{-6}	5.10^{-13}
	$2{,}5.10^{6}$	4.10^{-7}	8.10^{-14}
	5.10^{6}	2.10^{-7}	2.10^{-14}
	1.10^{7}	1.10^{-7}	5.10^{-15}
	$2{,}5.10^{7}$	4.10^{-8}	8.10^{-16}
	5.10^{7}	2.10^{-8}	2.10^{-16}
	1.10^{8}	1.10^{-8}	5.10^{-17}
	$2{,}5.10^{8}$	4.10^{-9}	8.10^{-18}
	5.10^{8}	2.10^{-9}	2.10^{-18}
	1.10^{9}	1.10^{-9}	5.10^{-19}
	$2{,}5.10^{9}$	4.10^{-10}	8.10^{-20}
	5.10^{9}	2.10^{-10}	2.10^{-20}

PŘÍLOHA II

Přibližné vzorce používané ve speciální teorii relativity

Přibližné vzorce platí pro kladná i záporná čísla x, pro která $|x| \ll 1$.

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \qquad (1+x)^2 \approx 1 + 2x$$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad \frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x$$

PŘÍLOHA III

Závislost rychlosti elektronu na urychlovacím napětí

$\frac{U}{\mathrm{V}}$	$\frac{v}{\mathrm{m.s^{-1}}}$	$\frac{U}{\mathrm{V}}$	$\frac{v}{\mathrm{m.s^{-1}}}$
0	0	10^5	$1{,}642 . 10^8$
1	$5{,}930 . 10^5$	$5 . 10^5$	$2{,}591 . 10^8$
10	$1{,}875 . 10^6$	10^6	$2{,}835 . 10^8$
10^2	$5{,}929 . 10^6$	10^7	$2{,}992\,1 . 10^8$
10^3	$1{,}871 . 10^7$	10^8	$2{,}999\,96 . 10^8$
10^4	$5{,}843 . 10^7$	10^9	$2{,}999\,999\,6 . 10^8$
$5 . 10^4$	$1{,}237 . 10^8$	10^{10}	$2{,}999\,999\,996 . 10^8$

Poznámka Při výpočtu rychlosti elektronu byla použita přibližná hodnota rychlosti světla ve vakuu $c \doteq 3 . 10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

PŘÍLOHA IV

Vybrané základní fyzikální konstanty

rychlost světla ve vakuu	$c = 2{,}997\,924\,58 . 10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$
klidová hmotnost elektronu	$m_e = 9{,}109\,389\,7 . 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
klidová hmotnost protonu	$m_p = 1{,}672\,623\,1 . 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
klidová hmotnost neutronu	$m_n = 1{,}674\,928\,6 . 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
elementární náboj	$e = 1{,}602\,177\,33 . 10^{-19}\ \mathrm{C}$
klidová hmotnost deuteronu	$m_d = 3.334\,43 . 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
klidová hmotnost částice α	$m_\alpha = 6{,}664\,61 . 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Planckova konstanta	$h = 6{,}626\,075\,5 . 10^{-34}\ \mathrm{J.s}$
Avogadrova konstanta	$N_A = 6{,}022\,136\,7 . 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Některé vedlejší jednotky:	
elektronvolt	$\mathrm{eV} = 1{,}602\,177\,33 . 10^{-19}\ \mathrm{J}$
atomová hmotnostní konstanta	$m_u = 1{,}660\,540\,2 . 10^{-27}\ \mathrm{kg}$

Poznámka Konstanty uvedené v příloze IV (s výjimkou klidové hmotnosti deuteronu a částice α) jsou nejpřesnější hodnoty základních fyzikálních konstant z r. 1986 ([118], str. 297).