13. Záření z mezihvězdných vodíkových mraků pozorujeme na vlnové délce 21 cm. O jaký druh elektromagnetického záření jde a jaká je frekvence a energie jeho fotonů?

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{299792458}{0{,}21} =$$

$$= 1427583133 Hz \approx \underline{\underline{1{,}4 GHz}}$$

Frekvence f je mezi 300 MHz a 300 GHz, jedná se o MIKROVLNY

$$E = h \cdot f =$$

$$= 6{,}62606896 \cdot 10^{-34} \cdot 1427583133 =$$

$$= 9{,}459264285 \cdot 10^{-25} = \underline{\underline{9{,}46 \cdot 10^{-25} J}}$$

33. Ukažte, že funkce $u(x, t) = f(x \pm v\,t)$ je řešením jednorozměrné diferenciální vlnové rovnice.

Diferenciální vlnová rovnice je:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = 0$$

, kde **u** = u (x , t) je námi hledaná funkce závislá na nezávislých proměnných **x** a **t**, rychlost světla **c** je zde konstanta. (V zadání počítáme s obecnou rychlostí **v**, jejich význam v rovnici je stejný.)

Tuto diferenciální rovnici druhého řádu lze rozepsat jako součin dvou diferenciálních rovnic prvního řádu, následovně:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$$

Tyto rovnice derivujeme podle **x** a podle **t** následovně:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial (x - c\cdot t)} \cdot \frac{\partial (x - c\cdot t)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial (x + c\cdot t)} \cdot \frac{\partial (x + c\cdot t)}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial (x - c\cdot t)} + \frac{\partial u}{\partial (x + c\cdot t)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial (x - c\cdot t)} \cdot \frac{\partial (x - c\cdot t)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial (x + c\cdot t)} \cdot \frac{\partial (x + c\cdot t)}{\partial x} =$$

$$= (-c) \cdot \frac{\partial u}{\partial (x - c\cdot t)} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial (x + c\cdot t)}$$

Získali jsme tedy dvě nové rovnice:

$$\frac{\partial u}{\partial(x-ct)}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial(x+ct)}=0$$

Jejich řešení je následující:

$$u(x,t)=(x-ct)$$

$$u(x,t)=(x+ct)$$

Obecné řešení vlnové rovnice tedy je:

$$\underline{\underline{u(x,t)=(x\pm vt)}}$$

53. Fázová rychlost vlny
(a) v hluboké vodě je dána vztahem $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$,
(b) pro povrchovou vlnu je $v = \sqrt{\frac{2\pi\tau}{\rho\lambda}}$, kde τ je povrchové napětí a ρ hustota.
Vypočítejte v obou případech grupovou rychlost pro úzkou oblast frekvencí.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad v_f = \frac{\omega}{k} \qquad v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$$

A) Hluboká vlna:

$$v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{\omega}{k}$$

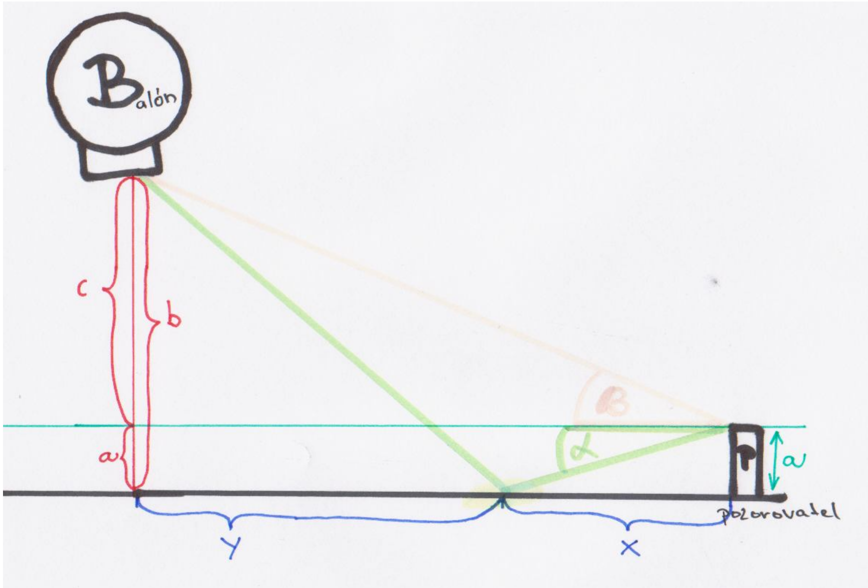
$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{g}{k}} = \underline{\underline{\frac{v_f}{2}}}$$

B) Povrchová vlna:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\pi\tau}{\rho\lambda}} = \frac{\omega}{k} \qquad \omega = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}\cdot\sqrt{k^3}$$

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}\cdot\sqrt{k} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\omega}{k} = \underline{\underline{\frac{3}{2}v_f}}$$

101. V jaké výšce nad povrchem Země se nachází upoutaný balón, vidíme-li z místa pozorování jeho odraz ve vodě pod depresním úhlem α a balón sám pod elevačním úhlem β? Pozorovací místo je ve výšce $\underline{a}$ nad hladinou.
Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $\alpha = 39^\circ 48'$, $\beta = 33^\circ 41'$ a $\underline{a} = 10$ m.



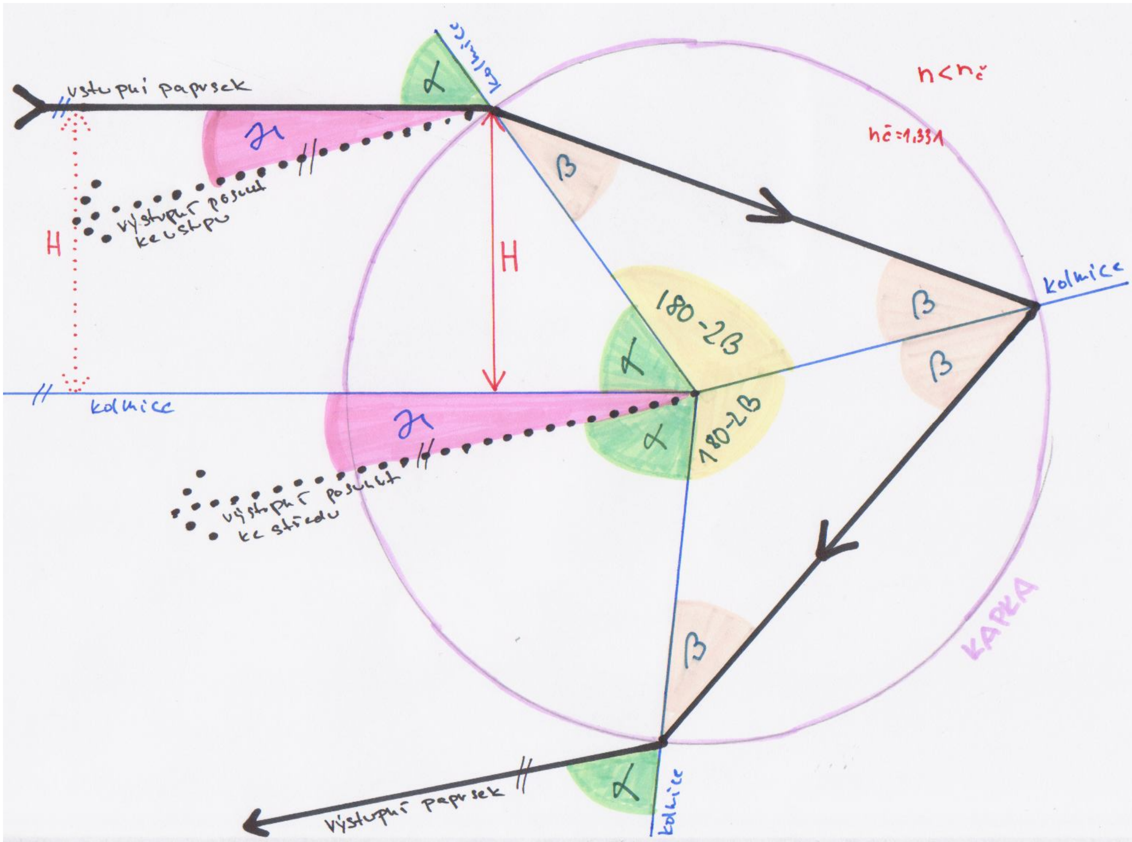
Z obrázku vyplývá:

$$x = \frac{a}{tg\alpha} \qquad y = \frac{b}{tg\alpha}$$

$$c = b - a = b \cdot \left(\frac{tg\beta}{tg\alpha} \right) + a \cdot \left(\frac{tg\beta}{tg\alpha} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \underline{\underline{\frac{a \cdot \left(\frac{tg\beta}{tg\alpha} \right)}{1 - \left(\frac{tg\beta}{tg\alpha} \right)}}} = \frac{10 \cdot \left(\frac{tg(39^\circ 48')}{tg(33^\circ 41')} \right)}{1 - \left(\frac{tg(39^\circ 48')}{tg(33^\circ 41')} \right)} = \underline{\underline{90m}}$$

125. **Světelný paprsek dopadá ze vzduchu na vodní kapku kulovitého tvaru, láme se do ní a po odrazu v kapce vystupuje z ní ven. Vypočítejte úhel, pod kterým musí paprsek dopadnout, aby odchylka vystupujícího červeného paprsku byla vzhledem k dopadajícímu paprsku maximální. Jak velká bude tato odchylka? Index lomu vodní kapky pro červenou barvu $n_č$ = 1,331.**



Z obrázku:

$$H = \sin\alpha \Rightarrow \alpha = \arcsin H$$

Ze zákona lomu:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \frac{H}{\sin\beta} = n \Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{n_č}{H}\right)$$

Z obrázku:

$$\gamma = 360^\circ - 2\alpha - 2(180^\circ - 2\beta) = 4\beta - 2\alpha =$$

$$= 4\arcsin\left(\frac{H}{n_č}\right) - 2\arcsin(H)$$

Maximum γ v bodě H:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial H} = 0 = \frac{4}{n_č\sqrt{1-\left(\frac{H}{n_č}\right)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-H^2}}$$

$$n\sqrt{1-\left(\frac{H}{n_č}\right)^2} = \sqrt{2-H^2}$$

Výška H pro maximální γ:

$$H = \sqrt{\frac{4-n_č^2}{3}} = \sqrt{\frac{4-(1{,}331)^2}{3}} =$$

$$= 0{,}8618659989$$

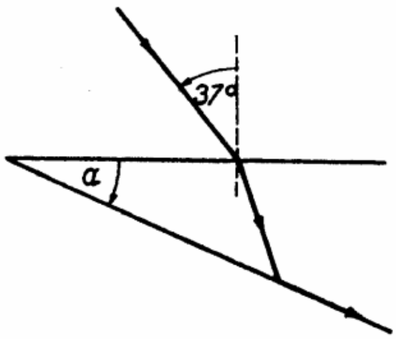
Dosazením H do rovnice pro γ :

$$\gamma = 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{\frac{4-n_{\check{c}}^2}{3}}}{n_{\check{c}}}\right) - 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{4-n_{\check{c}}^2}{3}}\right) =$$

$$= 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{\frac{4-1{,}331^2}{3}}}{1{,}331}\right) - 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{4-1{,}331^2}{3}}\right) =$$

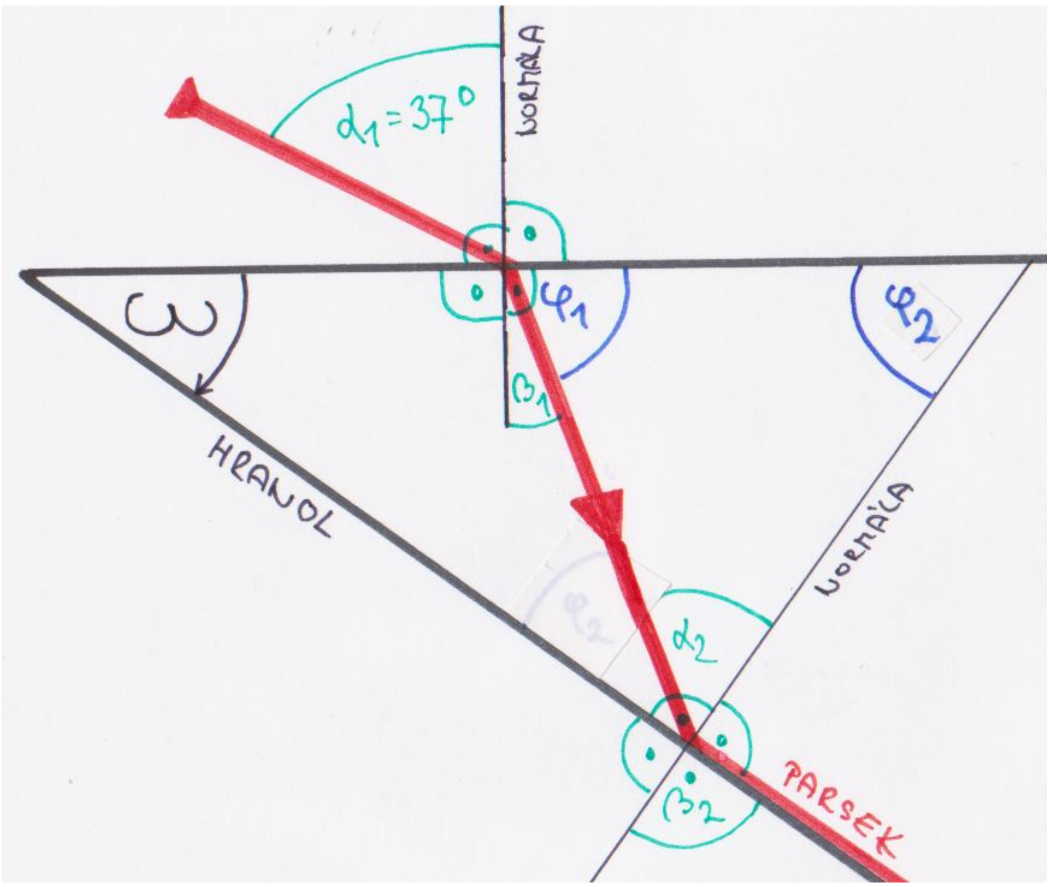
$$= 42{,}3698412 = \underline{\underline{42^\circ 22'}}$$

147. Světelný paprsek dopadá na skleněný hranol (index lomu 1,6) pod úhlem dopadu 37° (obr. 22). Jaký musí být vrcholový úhel tohoto hranolu, aby došlo k totálnímu odrazu?



Obr. 22.

Nastává totální odraz je na druhém rozhraní, to znamená že světelný paprsek hranol neopustí,tedy že úhel lomu na druhém rozhraní $\beta_2 = 90^\circ$



Podle Snellova zákonu lomu tedy platí:

$$\sin\alpha_1 = n \cdot \sin\beta_1$$

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha_1}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin 37^\circ}{1,6}\right) = 22^\circ 6'$$

$$n \cdot \sin\alpha_2 = \sin\beta_2$$

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1,6}\right) = 38^\circ 41'$$

Nyní dopočítáme pomocné úhly:

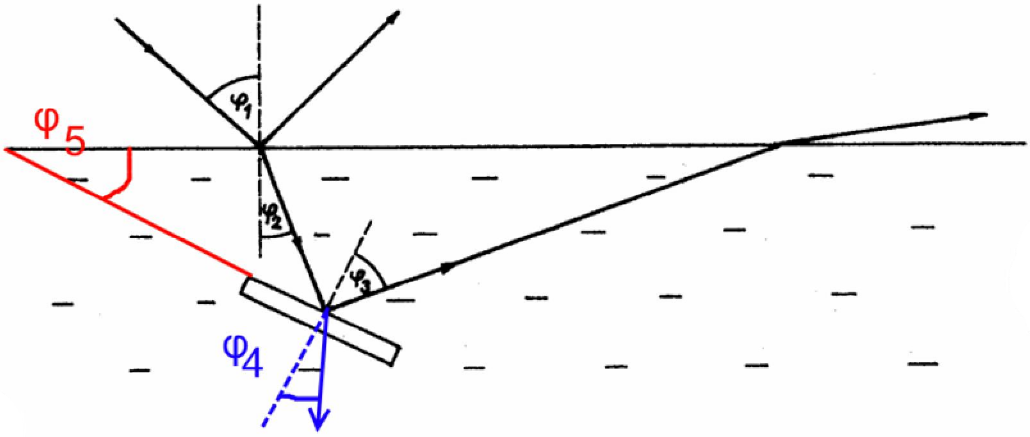
$$\varphi_1 = 90^\circ - \beta_1 = 90^\circ - 22^\circ 5' = 67^\circ 55'$$

$$\varphi_2 = 90^\circ - \varphi_1 - \alpha_2 = 180^\circ - 67^\circ 55' - 38^\circ 41' = 73^\circ 24'$$

Vyjádříme lámavý úhel:

$$\omega = 180^\circ - 90^\circ - \varphi_2 = 90^\circ - 73^\circ 25' = \underline{\underline{16^\circ 35'}}$$

167. Světlo dopadá na vodní hladinu pod takovým úhlem, že odražené světlo je úplně polarizováno.
(a) Jaký je úhel dopadu?
(b) Ve vodě je ponořena skleněná deska (n = 1,5) s vyleštěným povrchem (obr. 30). Paprsek odražený od povrchu skleněné desky je úplně polarizován. Najděte úhel, který svírá vodní hladina s povrchem skleněné desky.



Obr. 30.

A)Podle Brewsterova zákona pro polarizaci platí:

$$tg\varphi_1 = \frac{n_{vzduchu}}{n_{vody}} \Rightarrow \varphi_1 = arctg\left(\frac{n_{vody}}{n_{vzduchu}}\right) =$$

$$= arctg\left(\frac{1,33}{1,0003}\right) = 53,0529818 = \underline{\underline{53^\circ 3'}}$$

B)Podle Snellova zákonu lomu platí:

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi 2} = n_{vody} \Rightarrow \varphi_2 = \arcsin\left(\frac{\sin\varphi_1}{n_{vody}}\right) =$$

$$= \arcsin\left(\frac{\sin(53^\circ 3')}{1{,}33}\right) = \arcsin(0{,}608724726) =$$

$$= 36{,}93240948 = 36^\circ 56'$$

Z obrázku dále vyplývá:

$$180^\circ = 90^\circ + \varphi_3 + \varphi_4 \Rightarrow \varphi_4 = 90^\circ - \varphi_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\varphi_4 = \sin\left(90^\circ - \varphi_3\right) = \cos\varphi_3$$

Potom ze Snellova zákona platí:

$$\frac{\sin\varphi_3}{\sin\varphi_4} = \frac{n_{sklo}}{n_{voda}} \Rightarrow \frac{\sin\varphi_3}{\cos\varphi_3} = \frac{n_{sklo}}{n_{voda}} \Rightarrow tg\varphi_3 = \frac{n_{sklo}}{n_{voda}} \Rightarrow \varphi_3 =$$

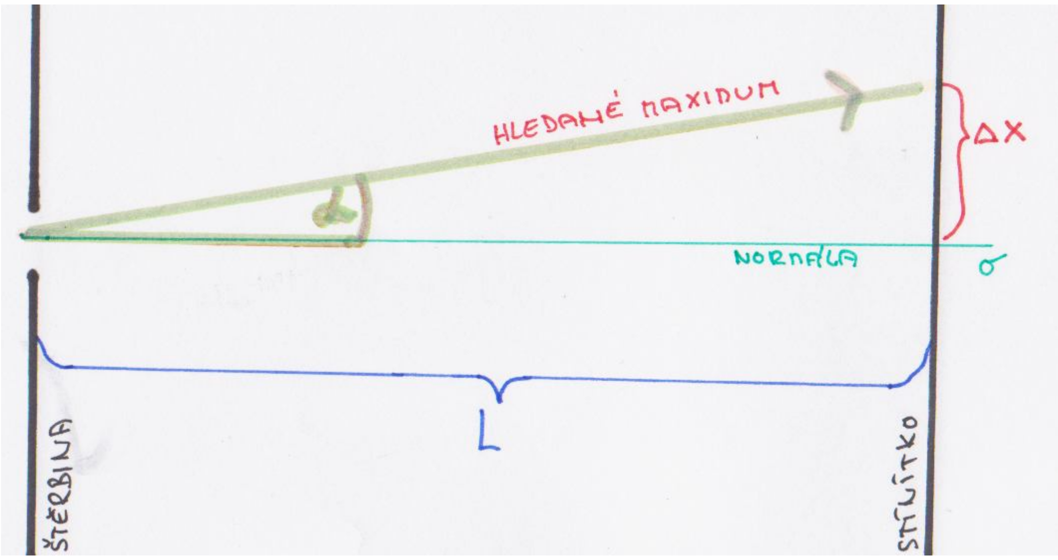
$$= arctg\left(\frac{n_{sklo}}{n_{voda}}\right) = arctg\left(\frac{1{,}5}{1{,}33}\right) = 48{,}43766499 = 48^\circ 26'$$

Z obrázku dále vyplývá:

$$\varphi_5 + 90^\circ + \varphi_2 + \left(90^\circ - \varphi_3\right) = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_5 = \varphi_3 - \varphi_2 = 48^\circ 26' - 36^\circ 55' = \underline{\underline{11^\circ 30'}}$$

260. **Fraunhoferova difrakce vzniká na štěrbině šířky 0,4 mm a je zviditelněna na stínítku v ohniskové rovině čočky. Ohnisková vzdálenost použité čočky je 1 m a štěrbina je osvětlena dvěma vlnovými délkami λ_1 a λ_2. Bylo zjištěno, že čtvrté minimum pro vlnovou délku λ_1 splývá s pátým minimem pro vlnovou délku λ_2 a je přesně 5 mm od hlavního maxima. Určete obě vlnové délky.**



$d = 0{,}4mm = 4 \cdot 10^5\,nm$

$L = 1m = 1 \cdot 10^9\,nm$

$\Delta x = 5mm = 5 \cdot 10^6\,nm$

$k_1 = 4$

$k_2 = 5$

$\lambda_1 = ?\,nm$

$\lambda_2 = ?\,nm$

Z obrázku určíme velikost α :

$$\sin\alpha = \frac{\Delta x}{L} = \frac{5 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^9} = 5 \cdot 10^{-3}$$

Poté dosadíme do následujícího vzorce. A jelikož se obě zmiňovaná maxima překrývají ve stejném úhlu, můžeme je ve vzorci položit do následující rovnosti:

$$\sin\alpha = k_1 \cdot \frac{\lambda_1}{d} = k_2 \cdot \frac{\lambda_2}{d}$$

Z toho tedy plyne:

$$\lambda_1 = d \cdot \frac{\sin\alpha}{k_1} = 4 \cdot 10^5 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4} = \underline{\underline{500nm}}$$

$$\lambda_2 = d \cdot \frac{\sin\alpha}{k_2} = 4 \cdot 10^5 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{5} = \underline{\underline{400nm}}$$