

Příklady – algebra - 4. roč. VVP

R. Blažková

1. Najděte dvě po sobě jdoucí přirozená čísla, pro která platí: rozdíl rozdílů jejich třetích mocnin a rozdílů jejich druhých mocnin je 30.

2. Upravte výraz: $\frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{(a-b)^2 - b(a+b)}$

3. Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla platí: jejich aritmetický průměr je menší nebo roven jejich geometrickému průměru.

4. Dokažte, že platí: $ab + bc + ac \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$

5. Dokažte, že pro každá kladná a, b platí $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

6. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí: $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$

7. Dokažte, že platí: $(ab + cd)^2 + (ac - bd)^2 = (a^2 + d^2)(b^2 + c^2)$

8. Dokažte, že pro každá reálná čísla a, b, c platí: $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 8abc$

9. Dokažte: Jestliže $xyz = 1$, pak $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz} = 1$

10. Dokažte, že platí: $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} - \frac{1}{b(a-b)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}$

11. Určete hodnotu výrazu: $\frac{2x(y-z)}{(x^2-z)(y-z)} - \frac{x+y}{xy-2x+y-z} + \frac{x-y}{xy-2x-y+z}$

12. Za předpokladu, že $ab + bc + ac = 0$ upravte výraz: $\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a+b+c)^2}$

13. Dokažte, že jestliže a, b, c jsou různá reálná čísla, pak platí:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

14. Najděte chybu ve výpočtu:

$$\begin{aligned} a &= -b && ! \cdot b \\ ab &= -b^2 && ! + a^2 \\ a^2 + ab &= a^2 - b^2 \\ a(a-b) &= (a-b)(a+b) \\ a &= a - (-a) \\ a &= 2a \\ 1 &= 2 \end{aligned}$$

15. $a = \frac{3}{2}b \quad ! \cdot 4$

$$\begin{aligned} 4a &= 6b \\ 14a - 10a &= 21b - 15b \\ 15b - 10a &= 21b - 14a \\ 5(3b - 2a) &= 7(3b - 2a) \\ 5 &= 7 \end{aligned}$$

P 1 A

1. a) Zjednodušte algebraický výraz $\left(\frac{-y}{y-x} - \frac{x}{x-y} \right) \left(\frac{xy-x^2}{x^2-y^2} + \frac{x}{x+y} + 1 \right)$

b) Proved'te analýzu učiva – které jevy má žák zvládnout.

c) Uveďte hlavní problematické části úlohy pro žáka.

2. Dokažte, že pro každá reálná čísla a, b různá od nuly, platí: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

3. a) Narýsuje graf funkce $y = -2,5x - 1$.

b) Zapište vlastnosti této funkce.

c) Narýsuje graf a zapište rovnici funkce, jejíž graf je s grafem této funkce souměrný: - podle osy x

- podle osy y

- podle počátku souřadné soustavy

- podle přímky $y = x$.

d) Zapište rovnici funkce inverzní k této funkci.

4. Zapište rovnici funkce, která vyjadřuje závislost objemu kužele na jeho poloměru (při konstantní výšce) a sestrojte její graf.

5. Sestrojte graf funkce $y = |x-2| + 2|x|$ a zapište její vlastnosti.

P 1 B

1. a) Zjednodušte algebraický výraz

$$\left(\frac{x}{2x-y} + \frac{x}{2x+y} - \frac{y^2}{4x^2-y^2} \right) \left(\frac{x+y}{x} - \frac{x-y}{y} + \frac{2x}{y} \right)$$

b) Proveďte analýzu učiva – které jevy má žák zvládnout.

c) Uveďte hlavní problematické části úlohy pro žáka.

2. Dokažte, že pro každá nezáporná čísla a, b platí: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

3. a) Narýsujte graf funkce $y = 0,5x - 3$.
b) Zapište vlastnosti této funkce.
c) Narýsuje graf a zapište rovnici funkce, jejíž graf je s grafem této funkce
souměrný: - podle osy x
- podle osy y
- podle počátku souřadné soustavy
- podle přímky $y = x$.

d) Zapište rovnici funkce inverzní k této funkci.

4. Narýsujte graf závislosti délky úhlopříčky e na délce úhlopříčky f kosočtverce, jehož obsah je 48 cm^2 .

5. Sestrojte graf funkce $y = 2|x+1| + |2x-1|$ a zapište její vlastnosti.